

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الجـــزء الخـــاص بالشـــرح
و التمـــارين

2022



معاك
Ma3ak App

التطبيق التفاعلي
للتعلم عن بُعد

التفـاضل و التكـامل

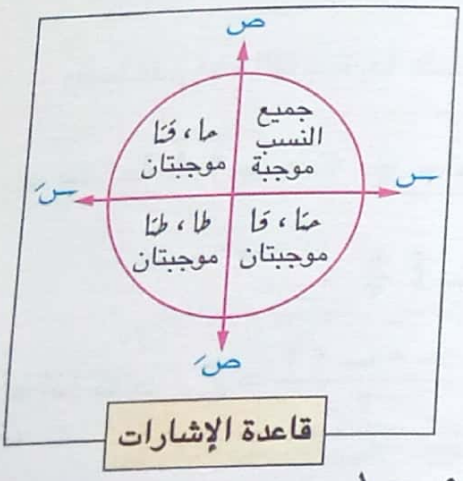
المعاصر

3
ثانوى

إعداد نخبة من خبراء التعليم

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أهم قوانين حساب المثلثات



* العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية :

لأى زاوية قياسها (هـ) فإن :

(١) $\text{حتا}^{٢}\text{هـ} + \text{ما}^{٢}\text{هـ} = ١$

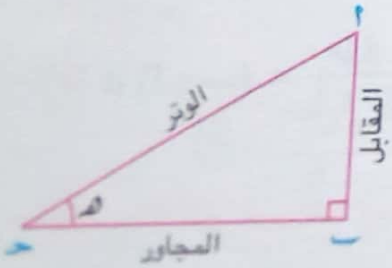
(٢) $١ + \text{ظا}^{٢}\text{هـ} = \text{قا}^{٢}\text{هـ}$

(٣) $١ + \text{ظتا}^{٢}\text{هـ} = \text{قتا}^{٢}\text{هـ}$

(٤) $\text{ما هـ قتا هـ} = ١$ ، $\text{حتا هـ قا هـ} = ١$ ، $\text{ظا هـ ظتا هـ} = ١$

(٥) $\text{ظا هـ} = \frac{\text{ما هـ}}{\text{حتا هـ}}$ ، $\text{ظتا هـ} = \frac{\text{حتا هـ}}{\text{ما هـ}}$

* تذكر العلاقات الآتية :

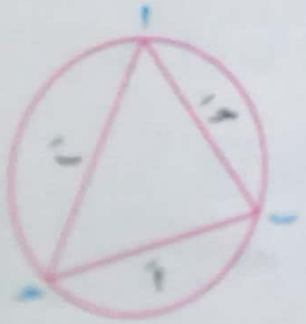


(١) $\text{ما هـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}}$

(٢) $\text{حتا هـ} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}}$

(٣) $\text{ظا هـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}}$

* قاعدة الجيب :



فى أى مثلث أ ب حـ يكون : $\frac{أ}{\text{ما أ}} = \frac{ب}{\text{ما ب}} = \frac{حـ}{\text{ما حـ}} = ٢ \text{ نق}$

حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ

* قاعدة جيب التمام :

فى أى مثلث أ ب حـ يكون :

$$أ^{٢} = ب^{٢} + حـ^{٢} - ٢ ب حـ \text{ حتا أ}$$
$$، ب^{٢} = أ^{٢} + حـ^{٢} - ٢ أ حـ \text{ حتا ب}$$
$$، حـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} - ٢ أ ب \text{ حتا حـ}$$

ونستخدم هذه القاعدة إذا علم طولا ضلعين فى مثلث وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أهم قوانين النهايات

(١) $\lim_{س \to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = ن أ^{ن-١}$

(٢) $\lim_{س \to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{ن}{م} أ^{ن-م}$

(٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{(س + أ)^{ن} - أ^{ن}}{س} = ن أ^{ن-١}$

(٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{ط س}{س} = ١$ وأيضًا $\lim_{س \to ٠} \frac{س}{ط س} = ١$ حيث س بالقياس الدائرى.

(٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{ط أ س}{ب س} = \frac{أ}{ب}$ وأيضًا $\lim_{س \to ٠} \frac{ط أ س}{ب س} = \frac{أ}{ب}$ حيث س بالقياس الدائرى.

(٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا س}{س} =$ صفر حيث س بالقياس الدائرى.

الاتصال وقابلية الاشتقاق

(١) يقال إن الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = أ (حيث أ ∈ مجال د)

إذا وفقط إذا كانت د' (أ) لها وجود حيث د' (أ) = $\lim_{ه \to ٠} \frac{د(أ + ه) - د(أ)}{ه}$

(٢) إذا كان أ ∈ مجال د :

وكان:
- د' ($أ^{+}$) = د' ($أ^{-}$) ← فإن: الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = أ ويكون د' (أ) = د' ($أ^{+}$) = د' ($أ^{-}$)
- د' ($أ^{+}$) ≠ د' ($أ^{-}$) ← فإن: الدالة د غير قابلة للاشتقاق عند س = أ

(٣) إذا كانت الدالة د غير متصلة عند نقطة ما فإنها تكون غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

(٤) (إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = أ فإنها تكون متصلة عند س = أ)

ولكن العكس غير صحيح بالضرورة بمعنى أنه (إذا كانت الدالة د متصلة عند س = أ

فليس من الضرورى أن تكون قابلة للاشتقاق عند س = أ)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑦ قاعدة السلسلة :

إذا كانت : ص = د (ع) دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى ع ، ع = ر (س) دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

فإن : ص = (د ○ ر) (س) = د [ر (س)] تكون قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

ويكون : $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{ء ص}{ء ع} \times \frac{ء ع}{ء س}$

أى أن : $\frac{ء}{ء س}$ [(د ○ ر) (س)] = $\frac{ء}{ء س}$ [د (ر (س))] = دَ (ر (س)) × رَ (س)

⑧ إذا كانت : ص دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

فإن : $\frac{ء}{ء س}$ (ص^{ن}) = ن ص$^{ن-١}$ $\frac{ء ص}{ء س}$

⑨ إذا كانت : ص = [د (س)]^{ن} فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ن [د (س)]$^{ن-١}$ × دَ (س)

أى أن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ن (القوس)$^{ن-١}$ × مشتقة ما بداخل القوس.

⑩ إذا كانت : ص = $\sqrt{د (س)}$ فإن : $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{دَ (س)}{٢\sqrt{د (س)}}$

أى أن : $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{\text{مشتقة ما تحت الجذر}}{٢ \text{ (الجذر)}}$

⑪ اشتقاق الدوال المثلثية : (حيث س بالتقدير الدائرى)

* إذا كانت : ص = جا س فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = جتا س

* إذا كانت : ص = جتا س فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = − جا س

* إذا كانت : ص = ظا س فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = قا^{٢} س

وبصفة عامة

① إذا كانت : ص = جا د (س) فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = دَ (س) جتا د (س)

② إذا كانت : ص = جتا د (س) فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = − دَ (س) جا د (س)

③ إذا كانت : ص = ظا د (س) فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = دَ (س) قا^{٢} د (س)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ملاحظات

١ معادلة المستقيم الذى يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (ل ، ك) هى : ص = ك

٢ معادلة المستقيم الذى يوازى محور الصادات ويمر بالنقطة (ل ، ك) هى : س = ل

٣ معادلة محور السينات هى : ص = ٠

٤ معادلة محور الصادات هى : س = ٠

٥ معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة الأصل هى : ص = م س

٦ لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات نضع ص = ٠ ونوجد قيم س

٧ لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات نضع س = ٠ ونوجد قيم ص

٨ لإيجاد نقط تقاطع منحنيين نحل معادلتيهما آنيًا.

معادلتا المماس والعمودى عليه لمنحنى :

إذا كانت $(س_١ ، ص_١)$ نقطة تقع على منحنى الدالة د حيث :

ص = د (س) ، م ميل المماس عند هذه النقطة أى م = $[\frac{ء ص}{ء س}]_{(س_١ ، ص_١)}$ فإن :

* معادلة المماس للمنحنى عند النقطة $(س_١ ، ص_١)$ هى :

$$ص - ص_١ = م (س - س_١)$$

* معادلة العمودى للمنحنى عند النقطة $(س_١ ، ص_١)$ هى :

$$ص - ص_١ = \frac{-١}{م} (س - س_١)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أهم قواعد التكامل

① $\int 1 \, d س = س + ث$

② $\int [د(س) \pm ر(س)] \, d س = \int د(س) \, d س \pm \int ر(س) \, d س$

③ $\int س^{ن} \, d س = \frac{س^{ن+1}}{ن+1} + ث$ حيث $ن \neq -1$

④ $\int (أ س + ب)^{ن} \, d س = \frac{(أ س + ب)^{ن+1}}{أ \times (ن+1)} + ث$ حيث $ن \neq -1$

⑤ $\int (د(س))^{ن} \, د'(س) \, d س = \frac{(د(س))^{ن+1}}{ن+1} + ث$ حيث $ن \neq -1$

⑥ * $\int \text{جا} س \, d س = -\text{جتا} س + ث$

* $\int \text{جتا} س \, d س = \text{جا} س + ث$

* $\int \text{قا}^{٢} س \, d س = \text{ظا} س + ث$

⑦ * $\int \text{جا}(أ س + ب) \, d س = \frac{-١}{أ} \text{جتا}(أ س + ب) + ث$

* $\int \text{جتا}(أ س + ب) \, d س = \frac{١}{أ} \text{جا}(أ س + ب) + ث$

* $\int \text{قا}^{٢}(أ س + ب) \, d س = \frac{١}{أ} \text{ظا}(أ س + ب) + ث$

ملاحظات

① $\text{جا}^{٢} س = \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} \text{جتا} ٢ س$

② $\text{جتا}^{٢} س = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} \text{جتا} ٢ س$

③ $\frac{د}{د س} \int د(س) \, d س = د(س)$ بينما $\int \frac{د}{د س} [د(س)] \, d س = د(س) + ث$

فمثلاً : $\frac{د}{د س} \int س^{٥} \, d س = س^{٥}$ بينما $\int \frac{د}{د س} (س^{٥}) \, d س = س^{٥} + ث$

الوحدة 1

الاشتقاق وتطبيقاته



يمكنك حل الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان

الدرس 1 اشتقاق الدوال المثلثية.

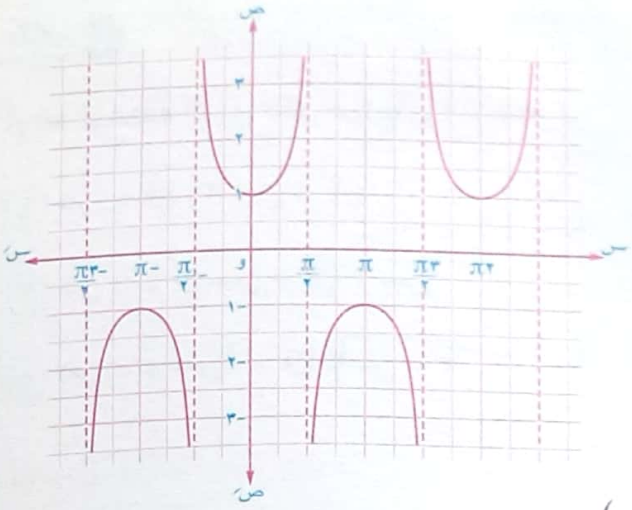
الدرس 2 الاشتقاق الضمنى والبارامترى.

الدرس 3 المشتقات العليا للدالة.

الدرس 4 معادلتا المماس والعمودى لمنحنى.

الدرس 5 المعدلات الزمنية المرتبطة.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



② دالة القاطع ص = قا س

حيث : س ∈ ع

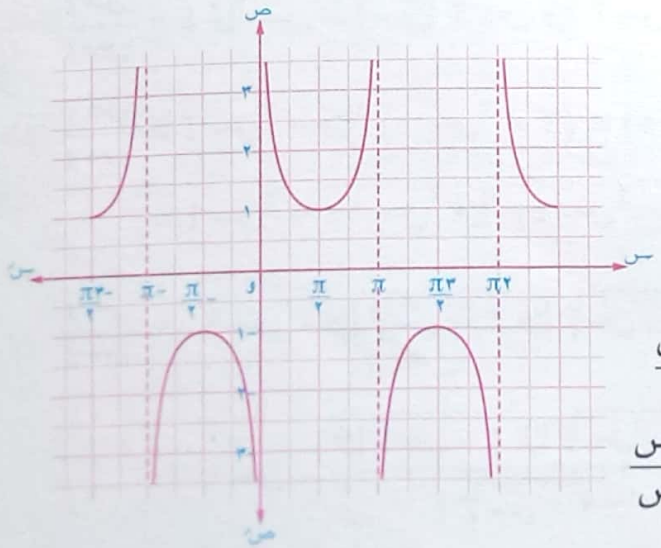
، س ≠ $\frac{\pi (١ + ن ٢)}{٢}$

، ن ∈ ص

∵ ص = قا س = $\frac{١}{\text{جتا س}}$

∴ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = $\frac{\text{جتا س} \times \text{صفر} - ١ \times (-\text{جا س})}{\text{جتا}^{٢} \text{س}}$

= $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا}^{٢} \text{س}}$ = $\frac{١}{\text{جتا س}} \times \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ = قا س ظا س



③ دالة قاطع التمام ص = قتا س

حيث : س ∈ ع ، س ≠ ن π

، ن ∈ ص

∵ ص = قتا س = $\frac{١}{\text{جا س}}$

∴ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = $\frac{\text{جا س} \times \text{صفر} - ١ \times \text{جتا س}}{\text{جا}^{٢} \text{س}}$

= $\frac{-\text{جتا س}}{\text{جا}^{٢} \text{س}}$ = $\frac{-١}{\text{جا س}} \times \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$

= − قتا س ظتا س

وبصفة عامة

① إذا كانت : ص = ظتا ع فإن : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = (− قتا^{٢} ع) . $\frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$

② إذا كانت : ص = قا ع فإن : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = (قا ع ظا ع) . $\frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$

③ إذا كانت : ص = قتا ع فإن : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = (− قتا ع ظتا ع) . $\frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$

حيث ع دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى المتغير س

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ١

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

١ ص = قتا (٢ س − ١)

٢ ص = ٤ ظا س − قتا ٣ س

٣ ص = ٥ س^{٢} + قا $\sqrt{س - ٢}$

٤ ص = قا (٣ س + ٥)

٥ ص = س^{٤} + ظا (٥ س^{٣} − ٢)

٦ ص = قا $\frac{س}{٣}$ + قا $\frac{\pi}{٣}$

الحل

١ $\frac{ء ص}{ء س}$ = − قا^{٢} (٢ س − ١) × ٢ = −٢ قا^{٢} (٢ س − ١)

٢ $\frac{ء ص}{ء س}$ = قا (٣ س + ٥) ظا (٣ س + ٥) × ٣ = ٣ قا (٣ س + ٥) ظا (٣ س + ٥)

٣ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٤ قا^{٢} س − (− قا ٣ س ظا ٣ س) × ٣ = ٤ قا^{٢} س + ٣ قتا ٣ س ظتا ٣ س

٤ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٤ س^{٣} − قا^{٢} (٥ س^{٣} − ٢) × (١٥ س^{٢})

= ٤ س^{٣} − ١٥ س^{٢} قا^{٢} (٥ س^{٣} − ٢)

٥ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ١٠ س − قا $\sqrt{س - ٢}$ ظا $\sqrt{س - ٢}$ × $\frac{١}{٢\sqrt{س - ٢}}$

= ١٠ س − $\frac{قا \sqrt{س - ٢} ظا \sqrt{س - ٢}}{٢\sqrt{س - ٢}}$

٦ $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{١}{٣}$ قا $\frac{س}{٣}$ ظا $\frac{س}{٣}$ + صفر = $\frac{١}{٣}$ قا $\frac{س}{٣}$ ظا $\frac{س}{٣}$

لاحظ أن

قا $\frac{\pi}{٣}$ = ٢ = مقدار ثابت

∴ المشتقة = صفر

مثال ٢

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

١ ص = ظا ٦ س^{٣} + ظا^{٣} ٦ س

٢ ص = س^{٤} ظا ٥ س

٣ ص = (٥ − ٣ قتا س)^{٤}

٤ ص = ما س قا ٣ س

٥ ص = $\frac{١ - ظا س}{١ + ظا س}$

٦ ص = ما (قتا ٥ س^{٣})

الحل

١ $\frac{ء ص}{ء س}$ = − قا^{٢} ٦ س^{٢} × (١٨ س^{٢}) + ٣ ظا^{٢} ٦ س × − قا^{٢} ٦ س × ٦

= −١٨ س^{٢} قا^{٢} ٦ س^{٢} − ١٨ ظا^{٢} ٦ س قا^{٢} ٦ س

٢ $\frac{ء ص}{ء س}$ = س^{٤} × − قا^{٢} ٥ س × ٥ + ظا ٥ س × ٤ س^{٣}

= −٥ س^{٤} قا^{٢} ٥ س + ٤ س^{٣} ظا ٥ س

٣ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٤ (٥ − ٣ قتا س)^{٣} × [٣ قتا س ظتا س]

= ١٢ قتا س ظتا س (٥ − ٣ قتا س)^{٣}

٤ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ما س × قا ٣ س ظا ٣ س × ٣ + قا ٣ س حتا س

= ٣ ما س قا ٣ س ظا ٣ س + قا ٣ س حتا س

٥ $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{(١ + ظتا س) \times (قتا^{٢} س) - (١ - ظتا س)(- قتا^{٢} س)}{(١ + ظتا س)^{٢}}$

= $\frac{قتا^{٢} س (١ + ظتا س + ١ - ظتا س)}{(١ + ظتا س)^{٢}}$ = $\frac{٢ قتا^{٢} س}{(١ + ظتا س)^{٢}}$

٦ $\frac{ء ص}{ء س}$ = حتا (قتا ٥ س^{٣}) × − قتا ٥ س^{٣} ظتا ٥ س^{٣} × ١٥ س^{٢}

= −١٥ س^{٢} قتا ٥ س^{٣} ظتا ٥ س^{٣} حتا (قتا ٥ س^{٣})

مثال ٣

إذا كانت : ص = $\sqrt{١٤ - ٥ ع}$ ، ع = ظا ٢ س

أثبت أن : ٣ $\frac{ء ص}{ء س}$ − ١٠ = صفر عند س = $\frac{\pi}{٨}$

الحل

∵ $\frac{ء ص}{ء ع}$ = $\frac{-٥}{٢\sqrt{١٤ - ٥ ع}}$ ، $\frac{ء ع}{ء س}$ = −٢ قا^{٢} ٢ س

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمارين 1

على اشتقاق الدوال المثلثية

اختبار تفاعلي

• فهم • تطبيق مستويات عليا من أسئلة الكتاب المدرسي

١ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

(١) ص = طا ٥ س

(٢) ص = قتا ٢ س

(٣) ص = قا ٧ س

(٤) ص = قتا $\frac{س}{٢}$

(٥) ص = قا $\frac{٣}{٤}$ س

(٦) ص = قا (٥ س + ٢)

(٧) ص = قتا (π − ٢ س)

(٨) ص = طا ($س^{٢}$ + ٣)

(٩) ص = س + طا ٢ س

(١٠) ص = $\sqrt{س^{٣}}$ + قا ٥ س

(١١) ص = طا $(\frac{١}{٢} س^{٤})$

(١٢) ص = قتا $(\sqrt{س})$

(١٣) ص = قا $(٣ س^{٤} + ٢ س^{٢} - ١)$

(١٤) ص = طا $(\pi - \frac{١}{س})$

(١٥) ص = ٣ $س^{٥}$ + ٤ طا س

(١٦) ص = جتا ٢ س − ٥ طا ٣ س

(١٧) ص = ٣ قا ٢ س + ٢ قتا ٣ س

(١٨) ص = جتا س + ٤ قا س

(١٩) ص = قا $\frac{س}{٤}$ + قا $\frac{\pi}{٤}$

(٢٠) ص = ٣ قتا $(\sqrt{١ + س^{٢}})$

٢ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

(١) ص = س قا ٣ س

(٢) ص = $س^{٢}$ طا ٣ س

(٣) ص = $س^{٣}$ قتا س

(٤) ص = قا س طا ٢ س

(٥) ص = قتا س طا س

(٦) ص = قتا ٢ س قا ٣ س

(٧) ص = ($س^{٢}$ + ٥ س + ٦) قا س

(٨) ص = قا $س^{٢}$ طا $س^{٢}$

(٩) ص = $س^{٢}$ قا $\frac{١}{س}$

(١٠) ص = (٣ س + ٤) (٥ س + قا س)

(١١) ص = $\sqrt{س}$ قا $\sqrt{س}$

(١٢) ص = $س^{٢}$ جتا س طا س

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

١ • تذكر • تعلم

٣ أوجد $\frac{ص}{س}$ في كل مما يأتي :

(١) $ص = \frac{ظا\ س}{س}$

(٢) $ص = \frac{٦ - س}{قا\ س}$

(٣) $ص = \frac{قا\ ٢س}{س^{٢}}$

(٤) $ص = \frac{قا\ س}{١ + قا\ س}$

(٥) $ص = \frac{قا\ س}{س}$

(٦) $ص = \frac{١ - قا\ س}{١ + قا\ س}$

(٧) $ص = \frac{قا\ (٣س + ١)}{ظا\ (٤س - ١)}$

٤ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

(١) $ص = قا^{٤}\ س$

(٢) $ص = ظا^{٧}\ س$

(٣) $ص = ٣\ قا^{٢}\ (٢س + \pi)$

(٤) $ص = قا^{٢}\ (١ + ٣س^{٢})$

(٥) $ص = ظا^{٢}\ \sqrt{س}$

(٦) $ص = ما^{٢}\ ٣س + قا^{٢}\ س$

(٧) $ص = س\ ظا^{٢}\ س$

(٨) $ص = س^{٣}\ قا^{٢}\ ٣س$

(٩) $ص = \frac{قا^{٢}\ س}{س}$

(١٠) $ص = \frac{س}{قا^{٢}\ ٢س}$

(١١) $ص = ظا\ ٧س^{٢} + ظا^{٢}\ ٧س$

(١٢) $ص = قا^{٣}\ ٢س\ ظا^{٣}\ ٢س$

(١٣) $ص = \sqrt{١ + ظا\ س}$

(١٤) $ص = \sqrt{١ + قا\ س}$

(١٥) $ص = \sqrt{س + ظا\ س}^{٣}$

(١٦) $ص = \sqrt{س^{٣} + ظا^{٢}\ ٤س}$

٥ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

(١) $ص = (١ + ظا\ س)^{٢}$

(٢) $ص = (٣ - ٢\ ظا\ س)^{٢}$

(٣) $ص = (قا\ س + ظا\ س)^{-١}$

(٤) $ص = \frac{١}{(س + قا\ س)^{٣}}$

(٥) $ص = ظا\ (ظا\ س)$

(٦) $ص = ظا\ (ما\ ٣س)$

(٧) $ص = قا\ (ظا^{٢}\ س)$

(٨) $ص = قا^{٢}\ (ظا\ س)$

(٩) $ص = ما\ (قا\ ٣س^{٢})$

(١٠) $ص = ظا\ (قا\ س^{٢})$

٦ أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث ص = د (س) لكل مما يأتي عند النقطة المعينة :

(١) $ص = قا\ \frac{س}{٢}$ عند $س = \frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

(٢) $ص = ٢\ ظا\ س + \sqrt{٢}\ قا\ س$ عند $س = \frac{\pi}{٤}$ ، $٢\sqrt{٠}$

(٣) $ص = ٣\ ظا\ س - قا^{٢}\ س$ عند $س = \frac{\pi\ ٣}{٤}$ ، ٢٠

(٤) $ص = ٣\ ظا^{٥}\ س$ عند $س = \frac{\pi}{٤}$ ، ٣٢٠

٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : د (س) = ظا (٥ س − π) فإن : د' $(\frac{\pi}{٤})$ = ...

(أ) $٥\sqrt{٢}$ (ب) $-٥\sqrt{٢}$ (جـ) ١٠ (د) −١٠

(٢) إذا كانت : $ص = قا\ ٢س$ فإن : $\frac{ع\ ص}{ع\ س}$ = ... عند $س = \frac{\pi}{٦}$

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{-٤}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\sqrt{٣}$

(٣) إذا كانت : د (س) = $قا^{٢}\ س - ظا^{٢}\ س$ فإن : د' (−١) = ...

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

(٤) إذا كانت : د (س) = $(٥ - ٢\ ظا\ س)^{٣}$ فإن : د' $(\frac{\pi}{٤})$ = ...

(أ) −١٠٨ (ب) ٢٧ (جـ) ٥٤ (د) ١٠٨

(٥) إذا كان : $ص = ما\ س - \frac{١}{٣}\ ما^{٣}\ س$ فإن : $\frac{ع\ ص}{ع\ س} = (.....)^{٣}$

(أ) − جتا س (ب) ظا س (جـ) جتا س (د) ما س

(٦) إذا كان : $ص = ظا\ س + \frac{١}{٣}\ ظا^{٣}\ س$ فإن : $\frac{ع\ ص}{ع\ س} = (.....)^{٤}$

(أ) $قا^{٤}\ س$ (ب) $قا\ س$ (جـ) ظا س (د) $قا^{٤}\ س$

(٧) إذا كان : د (س) = ما س $قا\ ٢س$ فإن : د' (٠) = ...

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

(٨) $\frac{ع}{ع\ س}(٢\ ظا\ \frac{\pi}{٤})$ = ...

(أ) $-٢\ قا^{٢}\ \frac{\pi}{٤}$ (ب) $-٢\ ظا\ \frac{\pi}{٤}\ قا\ \frac{\pi}{٤}$

(جـ) ٢ (د) صفر

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٩ $\frac{د}{د س}$ (٢ جتا٢ س − ١) =

(أ) جا ٢ س (ب) جا ٢ س (جـ) −٢ جا ٢ س (د) −٢ جا ٢ س

١٠ $\frac{د}{د س}$ [(١ + ظا س)٢] =

(أ) ٦ قا٢ س ظا س (ب) ٢ قا٢ س ظا س

(جـ) ٦ قا٢ س ظا س (د) ٣ قا٢ س ظا س

١١ $\frac{د}{د س}$ [س٢ + $\frac{د}{د س}$ (س + قا س)] =

(أ) ٢ س + ١ + قا س ظا س (ب) ٢ س + ٢ قا٢ س − قا س

(جـ) ٢ + قا٢ س − قا س (د) ٢ س + قا٢ س ظا٢ س

١٢ إذا كان : د (س) = ٨ س جا س جتا س جتا ٢ س فإن : د′ $\left(\frac{\pi}{٨}\right)$ = ...

(أ) −٢ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

١٣ $\frac{د}{د س}$ [(قا س − ١) (قا س + ١)] = ...

(أ) قا٢ س ظا٢ س (ب) ٢ قا٢ س ظا س

(جـ) قا٢ س ظا س (د) قا٤ س

١٤ $\frac{د}{د س}$ (جتا س قتا س) = ...

(أ) صفر (ب) قتا٢ س (جـ) قا٢ س (د) − قتا٢ س

١٥ إذا كانت : ص = جا س قا $\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)$ حيث س زاوية حادة

فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١

(جـ) جتا س قتا س + جا س قا س (د) جا س جتا س + قا س ظا س

١٦ إذا كانت : ص = جتا $\left(\frac{\pi}{٢} - \frac{١}{س}\right)$ فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = ...

(أ) − جتا $\frac{١}{س}$ (ب) $\frac{١}{س^٢}$ جتا $\frac{١}{س}$

(جـ) $\frac{-١}{س^٢}$ جا $\left(\frac{\pi}{٢} + \frac{١}{س}\right)$ (د) $\frac{-١}{س^٢}$ جتا $\left(\frac{\pi}{٢} - \frac{١}{س}\right)$

١٧ إذا كانت : ص = قا $\left(\frac{\pi}{٤} س\right)$ فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = ...

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ قا $\left(\frac{\pi}{٤} س\right)$ ظا $\left(\frac{\pi}{٤} س\right)$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ س

(جـ) $\frac{\pi}{٤}$ (د) $\sqrt{٢}$

١٨ إذا كانت : ص = (قا $\frac{\pi}{٤}$) س فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = ...

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ قا $\left(\frac{\pi}{٤} س\right)$ ظا $\left(\frac{\pi}{٤} س\right)$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ س

(جـ) $\frac{\pi}{٤}$ (د) $\sqrt{٢}$

١٩ إذا كان : د (س) = قا س جا س + ظا س جا س

فإن : د $\left(\frac{\pi ١٣}{٤}\right)$ + د′ $\left(\frac{\pi ١٣}{٤}\right)$ = ...

(أ) $-\frac{\pi ١٣}{٤}$ (ب) $\frac{\pi ١٣}{٤}$ (جـ) ٢ (د) غير معرفة

٢٠ إذا كانت : ص + ظا س = ٠ فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = ...

(أ) ١ + ص (ب) ١ + ص٢ (جـ) ص٢ − ١ (د) ص٢

٢١ إذا كان : ص = $\frac{١}{٤}$ قا٤ س فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = ...

(أ) ٤ ص ظا س (ب) ٤ ص (جـ) قا٣ س ظا س (د) ص ظا س

٢٢ إذا كانت : ص = (قتا س − ظتا س) (قتا س + ظتا س) فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) − ص قتا س (د) − ص ظتا س

٢٣ إذا كانت : ص = $\frac{٢ ظتا س}{ظتا^٢ س - ١}$ فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = ... حيث س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٦}$ [

(أ) ٢ قا٢ ٢ س (ب) ٢ ظتا٢ ٢ س (جـ) ٤ قتا٢ ٢ س (د) ظا ٢ س

٢٤ إذا كانت : ص = قا ٣ س + ظا ٣ س فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = ...

(أ) ٣ ص قا ٣ س (ب) ٣ ص ظا ٣ س

(جـ) ٣ ص قا٢ ٣ س (د) ٣ ص ظا٢ ٣ س

٢٥ إذا كان : ص = ظتا ٢ س وكان : $\frac{د ص}{د س}$ + ٤ (١ + ص٢) = ٠ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) −٢ (جـ) ٤ (د) −٤

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٢٦) إذا كان ص = طا٢ ٣ س + ظا٢ ٣ س فإن : أ = ...
(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٦

(٢٧) إذا كانت : ص = $\frac{\text{قا س . قتا س}}{\text{قا}^2 \text{س} - \text{قتا}^2 \text{س}}$ فإن : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ...
(أ) قا٢ ٢ س (ب) $\frac{1}{2}$ ظا ٢ س (جـ) قا س قتا س (د) ٢ ظا٢ ٢ س

(٢٨) إذا كان : د (س) = ظا (س − θ) . ظا (س + θ)
فإن : د′ (س) = ... عند س = θ
(أ) ظا θ (ب) ظا ٢ θ (جـ) ظا ٢ θ (د) ظا θ + ظا θ

(٢٩) ميل المماس للمنحنى : ص = $\sqrt{\text{جا س + قا س}}$ عند س = صفر يساوى
(أ) −١ (ب) صفر (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) ١

(٣٠) نهـا $_{\text{هـ} \to 0}$ $\frac{\text{ظا (س + هـ) − ظا س}}{\text{هـ}}$ = ...
(أ) − قا٢ س (ب) قا٢ س (جـ) ظا٢ س (د) ظا٢ س

(٣١) نهـا $_{\text{هـ} \to 0}$ $\frac{\text{قا}\left(\frac{\pi}{4} + \text{هـ}\right) - \text{قا}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\text{هـ}}$ = ...
(أ) $\sqrt{2}$ (ب) صفر (جـ) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (د) غير معرف.

(٣٢) إذا كان : ص = $\frac{\text{١ + ظا س}}{\text{١ − ظا س}}$ فإن : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ...
(أ) جتا٢ $\left(\text{س} + \frac{\pi}{4}\right)$ (ب) قا٢ $\left(\text{س} + \frac{\pi}{4}\right)$
(جـ) جا٢ $\left(\text{س} + \frac{\pi}{4}\right)$ (د) قتا٢ $\left(\text{س} + \frac{\pi}{4}\right)$

(٣٣) (دور أول ٢٠٢١) إذا كانت : ص = $\sqrt{2}$ (قا س + ظا س) حيث س ∈ $\left]0 ، \frac{\pi}{2}\right[$
فإن : $\frac{1}{\text{ص}}\left(\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right)$ = ...
(أ) ٢ قا س (ب) − $\frac{1}{2}$ قا س (جـ) $\frac{1}{2}$ قا س (د) − ٢ قا س

٨ إذا كانت : ص = طا $\frac{\pi}{6}$ ع ، ع = ٣ $\sqrt{\text{س}}$ أوجد : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عند س = ١ $\frac{\pi}{4}$

٩ إذا كانت : ص = جا س + قا س ، س = ٣ π ع أوجد : $\frac{\text{د ص}}{\text{د ع}}$ عند ع = ١ π٣−

١٠ إذا كانت : ص = $\sqrt{\text{٥ − ٢ ع}}$ ، ع = قا ٢ س
أثبت أن : $\sqrt{3}$ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ + ١٢ = ٠ عند س = $\frac{\pi}{6}$

١١ إذا كانت : ص = (٥ ع + ١)° ، ع = $\frac{1}{5}$ ظا ٢ س أوجد : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عند س = $\frac{\pi}{8}$
«٣٢٠»

١٢ إذا كانت : ص = قا س + ظا س أثبت أن : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ + ص قا س = ٠

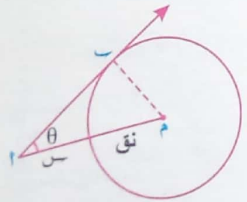
١٣ إذا كانت : ص = (قا س + ظا س)$^{\text{ن}}$ أثبت أن : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ن ص قا س

١٤ إذا كانت : ص = قا$^{\text{ن}}$ (س) أثبت أن : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ن ص ظا س

١٥ إذا كانت : ص = قا س (جا س + جتا س) أثبت أن : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ − ظا٢ س = ١

١٦ إذا كانت : ص = ع^{٤} − ٢ ع^{٢} + ١ ، ع = قا ٤ س
أثبت أن : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ + ٣٢ ص قا ٨ س = ٠

١٧ في الشكل المقابل :
أ نقطة تتحرك في المستوى ، $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة م عند ب
، أ م = س + نق حيث نق طول نصف قطر الدائرة.



(١) أثبت أن : س = نق (قا θ − ١)
(٢) أوجد : معدل تغير س بالنسبة إلى θ عندما : θ = $\frac{\pi}{6}$
«−٢ $\sqrt{3}$ نق»

مسائل تقيس مهارات التفكير

١٨ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :
(١) إذا كانت : ص = ظا س فإن : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ معرفة لجميع قيم س ∈
(أ) ح (ب) ح − {٠}
(جـ) ح − {ن π حيث ن ∈ ص} (د) ح − $\left\{\frac{\text{ن π}}{2} \text{ حيث ن} \in \text{ص}\right\}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٣) إذا كان : $0 < س < \frac{\pi}{2}$ وكان : د (ظا س) = ما س فإن : د (١) = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (جـ) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (د) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

(٤) إذا كان : د (س) = $س^{2}$ ، ق (س) = ظا س وكانت ف (س) = (د ○ ق) (س)

فإن : ف' $(\frac{\pi}{4})$ = ...

(أ) ١ (ب) ٤ (جـ) صفر (د) ١-

(٥) إذا كانت : د (س) = $ما^{2}$ س وكان : د (٠) = ٠

فإن : $\lim_{س \to 0} \frac{د (س)}{س}$ = ...

(أ) ١- (ب) صفر (جـ) ١ (د) غير موجودة.

(٦) إذا كانت : ص = ق | س | فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ...

(أ) ق | س | ظا | س | (ب) - ق س ظا س

(جـ) $\frac{س}{|س|}$ ق | س | ظا | س | (د) $\frac{س}{|س|}$ ق س ظا س

(٧) إذا كان : $0 < س < \frac{\pi}{2}$ وكان : د (ما س) = أ $ما^{2}$ س حيث أ ثابت

وكان : د' $(\frac{3}{5})$ = -٦ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(٨) إذا كانت : ص = ظا س حيث س مقاسة بالتقدير الستينى

فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ...

(أ) - ق $ظا^{2}$ س (ب) - ق ظا س ظا س

(جـ) $\frac{-\pi}{180}$ ق $ظا^{2}$ س (د) $\frac{-180}{\pi}$ ق $ظا^{2}$ س

الاشتقاق الضمنى والبارامترى

الاشتقاق الضمنى

إذا كان لدينا المعادلتان : ص = $س^{2}$ + ٣ ، ٥ $س^{2}$ + ٢ س ص + $ص^{2}$ = ٠

نلاحظ أن المعادلة الأولى تعرف ص كدالة فى س وتسمى هذه المعادلة بالدالة الصريحة

وتعرف بالصورة [ص = د (س)]

أما المعادلة الثانية فلا تعبر عن دالة وتسمى بالعلاقة الضمنية وتعرف بالصورة [ع (س ، ص) = ٠]

والاشتقاق فى هذه الحالة يسمى بالاشتقاق الضمنى.

فمثلًا : إذا كانت : س ≠ ١ وكان ص = $\frac{س}{١ - س}$ (١)

فإن : ص هنا دالة فى س وبضرب طرفى (١) فى (١ - س)

∴ ص (١ - س) = س ∴ ص - س ص - س = ٠ (٢)

ونلاحظ أن : (١) ، (٢) هما صورتان لدالة واحدة وتسمى الصورة الأولى بالدالة الصريحة

أما الصورة الثانية فتسمى دالة ضمنية.

ومن العلاقة (١) : ص = $\frac{س}{١ - س}$ نجد أن : $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{(١ - س) - س \times -١}{(١ - س)^{2}} = \frac{١}{(١ - س)^{2}}$

ومن العلاقة (٢) : ص - س ص - س = ٠ باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س (اشتقاق ضمنى)

∴ $\frac{ء}{ء س}$ (ص) - $\frac{ء}{ء س}$ (س ص) - $\frac{ء}{ء س}$ (س) = ٠

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ - $(س \frac{ء ص}{ء س} + ص)$ - ١ = ٠ ∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ - س $\frac{ء ص}{ء س}$ - ص - ١ = ٠

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ (١ - س) = ص + ١

∴ $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{ص + ١}{١ - س} = \frac{١ + \frac{س}{١ - س}}{١ - س} = \frac{س + ١ - س}{(١ - س)^{2}} = \frac{١}{(١ - س)^{2}}$

وهى نفس النتيجة التى حصلنا عليها من الصورة الأولى.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٣) إذا كان : $0 < س < \frac{\pi}{2}$ وكان : د (طا س) = ط س فإن : د (١) = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (جـ) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (د) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

(٤) إذا كانت : د (س) = $س^{2}$ ، ق (س) = ط س وكانت ف (س) = (د ○ ق) (س)

فإن : ف' $(\frac{\pi}{4})$ = ...

(أ) -٤ (ب) ٤ (جـ) صفر (د) -١

(٥) إذا كانت : د' (س) = $ط^{2}$ س وكان : د (٠) = ٠

فإن : $\lim_{س \to 0} \frac{د (س)}{س}$ = ... (د) غير موجودة.

(أ) -١ (ب) صفر (جـ) ١

(٦) إذا كانت : ص = ق|س| فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ...

(أ) ق|س| ط|س| (ب) - ق س ط س

(جـ) $\frac{س}{|س|}$ ق|س| ط|س| (د) $\frac{س}{|س|}$ ق س ط س

(٧) إذا كان : $0 < س < \frac{\pi}{2}$ وكان : د (طا س) = أ طا س حيث أ ثابت

وكان : د' $(\frac{\pi}{5})$ = -٦ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(٨) إذا كانت : ص = طا س حيث س مقاسة بالتقدير الستينى

فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ...

(أ) - ق $ا^{2}$ س (ب) - ق ا س ط ا س

(جـ) $\frac{\pi}{180}$ - ق $ا^{2}$ س (د) $\frac{180}{\pi}$ - ق $ا^{2}$ س

الاشتقاق الضمنى والبارامترى

الاشتقاق الضمنى

إذا كان لدينا المعادلتان : ص = $س^{2}$ + ٣ ، ٥ $س^{2}$ + ٢ س ص + $ص^{2}$ = ٠

نلاحظ أن المعادلة الأولى تعرف ص كدالة فى س وتسمى هذه المعادلة بالدالة الصريحة

وتعرف بالصورة [ص = د (س)]

أما المعادلة الثانية فلا تعبر عن دالة وتسمى بالعلاقة الضمنية وتعرف بالصورة [ع (س ، ص) = ٠]

والاشتقاق فى هذه الحالة يسمى بالاشتقاق الضمنى.

فمثلاً : إذا كانت : س ≠ ١ وكان ص = $\frac{س}{١ - س}$ (١)

فإن : ص هنا دالة فى س وبضرب طرفى (١) فى (١ - س)

∴ ص (١ - س) = س ∴ ص - س ص - س = ٠ (٢)

ونلاحظ أن : (١) ، (٢) هما صورتان لدالة واحدة وتسمى الصورة الأولى بالدالة الصريحة

أما الصورة الثانية فتسمى دالة ضمنية.

ومن العلاقة (١) : ص = $\frac{س}{١ - س}$ نجد أن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{(١ - س) - س \times - ١}{(١ - س)^{2}}$ = $\frac{١}{(١ - س)^{2}}$

ومن العلاقة (٢) : ص - س ص - س = ٠ باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س (اشتقاق ضمنى)

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ (ص) - $\frac{ء ص}{ء س}$ (س ص) - $\frac{ء}{ء س}$ (س) = ٠

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ - $(س \frac{ء ص}{ء س} + ص)$ - ١ = ٠ ∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ - س $\frac{ء ص}{ء س}$ - ص - ١ = ٠

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ (١ - س) = ص + ١

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{ص + ١}{١ - س}$ = $\frac{١ + \frac{س}{١ - س}}{١ - س}$ = $\frac{س + ١ - س}{(١ - س)^{2}}$ = $\frac{١}{(١ - س)^{2}}$

وهى نفس النتيجة التى حصلنا عليها من الصورة الأولى.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الاشتقاق الضمنى والبارامترى

2 الدرس

الاشتقاق الضمنى

إذا كان لدينا المعادلتان : ص = س^{٢} + ٣ ، ٥ س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢} = ٠

نلاحظ أن المعادلة الأولى تعرف ص كدالة فى س وتسمى هذه المعادلة بالدالة الصريحة

وتعرف بالصورة [ص = د (س)]

أما المعادلة الثانية فلا تعبر عن دالة وتسمى بالعلاقة الضمنية وتعرف بالصورة [ع (س ، ص) = ٠]

والاشتقاق فى هذه الحالة يسمى بالاشتقاق الضمنى.

فمثلًا : إذا كانت : س ≠ ١ وكان ص = $\frac{س}{١ - س}$ (١)

فإن : ص هنا دالة فى س وبضرب طرفى (١) فى (١ − س)

∴ ص (١ − س) = س ∴ ص − س ص − س = ٠ (٢)

ونلاحظ أن : (١) ، (٢) هما صورتان لدالة واحدة وتسمى الصورة الأولى بالدالة الصريحة

أما الصورة الثانية فتسمى دالة ضمنية.

ومن العلاقة (١) : ص = $\frac{س}{١ - س}$ نجد أن : $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{١ - (١ - س) - س \times ١}{(١ - س)^{٢}} = \frac{١}{(١ - س)^{٢}}$

ومن العلاقة (٢) : ص − س ص − س = ٠ باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س (اشتقاق ضمنى)

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ (ص) − $\frac{ء}{ء س}$ (س ص) − $\frac{ء}{ء س}$ (س) = ٠

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ − $\left(س \frac{ء ص}{ء س} + ص\right)$ − ١ = ٠ ∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ − س $\frac{ء ص}{ء س}$ − ص − ١ = ٠

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ (١ − س) = ص + ١

∴ $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{ص + ١}{١ - س} = \frac{\frac{س}{١ - س} + ١}{١ - س} = \frac{س + ١ - س}{(١ - س)^{٢}} = \frac{١}{(١ - س)^{٢}}$

وهى نفس النتيجة التى حصلنا عليها من الصورة الأولى.

(١) إذا كان : ٠ < س < $\frac{\pi}{٢}$ وكان : د (ظا س) = ظا س فإن : د (١) = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٢}}{٤}$ (د) $\frac{\sqrt{٢}}{٦}$

(٢) إذا كانت : د (س) = س^{٢} ، ن (س) = ظا س وكانت ف (س) = (د ○ ن) (س)

فإن : ف' ($\frac{\pi}{٤}$) = ...

(أ) ١ (ب) ٤ (جـ) صفر (د) −١

(٣) إذا كانت : د' (س) = ظا^{٢} س وكان : د (٠) = ٠

فإن : نهـا $\frac{د (س)}{س}$ = ...

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) غير موجودة.

(٤) إذا كانت : ص = ق ا س ا فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ...

(أ) ق ا س ا ظا س (ب) − ق ا س ا ظا س

(جـ) $\frac{س}{|س|}$ ق ا س ا ظا س (د) $\frac{س}{|س|}$ ق ا س ظا س

(٥) إذا كان : ٠ < س < $\frac{\pi}{٢}$ وكان : د (ظا س) = أ ظا س حيث أ ثابت

وكان : د' ($\frac{٣}{٥}$) = −٦ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(٦) إذا كانت : ص = ظا س حيث س مقاسة بالتقدير الستينى

فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ...

(أ) − ق ظا^{٢} س (ب) − ق ظا س ظا س

(جـ) $\frac{\pi}{١٨٠}$ ق ظا^{٢} س (د) $\frac{-١٨٠}{\pi}$ ق ظا^{٢} س

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الاشتقاق الضمنى

إذا كان لدينا المعادلتان : ص = س^{٢} + ٣ ، ٥ س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢} = ٠

نلاحظ أن المعادلة الأولى تعرف ص كدالة فى س وتسمى هذه المعادلة بالدالة الصريحة

وتعرف بالصورة [ص = د (س)]

أما المعادلة الثانية فلا تعبر عن دالة وتسمى بالعلاقة الضمنية وتعرف بالصورة [ع (س ، ص) = ٠]

والاشتقاق فى هذه الحالة يسمى بالاشتقاق الضمنى.

فمثلًا : إذا كانت : س ≠ ١ وكان ص = $\frac{\text{س}}{١ - \text{س}}$ (١)

فإن : ص هنا دالة فى س وبضرب طرفى (١) فى (١ − س)

∴ ص (١ − س) = س ∴ ص − س ص − س = ٠ (٢)

ونلاحظ أن : (١) ، (٢) هما صورتان لدالة واحدة وتسمى الصورة الأولى بالدالة الصريحة

أما الصورة الثانية فتسمى دالة ضمنية.

ومن العلاقة (١) : ص = $\frac{\text{س}}{١ - \text{س}}$ نجد أن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{(١ - \text{س}) - \text{س} \times -١}{(١ - \text{س})^{٢}} = \frac{١}{(١ - \text{س})^{٢}}$

ومن العلاقة (٢) : ص − س ص − س = ٠ باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س (اشتقاق ضمنى)

∴ $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ (ص) − $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ (س ص) − $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ (س) = ٠

∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ − (س $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ + ص) − ١ = ٠ ∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ − س $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ − ص − ١ = ٠

∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ (١ − س) = ص + ١

∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{ص} + ١}{١ - \text{س}} = \frac{١ + \frac{\text{س}}{١ - \text{س}}}{١ - \text{س}} = \frac{\text{س} + ١ - \text{س}}{(١ - \text{س})^{٢}} = \frac{١}{(١ - \text{س})^{٢}}$

وهى نفس النتيجة التى حصلنا عليها من الصورة الأولى.

④ إذا كان : د (س) = ظا^{٢} س وكان : د (٠) = ٠

فإن : $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{د (س)}}{\text{س}}$ = ...

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) غير موجودة.

⑤ إذا كانت : ص = ق | س |

فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ...

(أ) ق | س | ظا | س | (ب) − ق س ظا س

(جـ) $\frac{\text{س}}{|\text{س}|}$ ق | س | ظا | س | (د) $\frac{\text{س}}{|\text{س}|}$ ق س ظا س

⑥ إذا كان : ٠ < س < $\frac{\pi}{٢}$ وكان : د (ظا س) = أ ظا س حيث أ ثابت

وكان : د$'$ $\left(\frac{\pi}{٥}\right)$ = −٦ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

⑦ إذا كانت : ص = ظا س حيث س مقاسة بالتقدير الستينى

فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ...

(أ) − ق$'$ ظا^{٢} س (ب) − ق$'$ ظا س ظا س

(جـ) $\frac{-\pi}{١٨٠}$ ق$'$ ظا^{٢} س (د) $\frac{-١٨٠}{\pi}$ ق$'$ ظا^{٢} س

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

1 • مفهوم • تطبيق

② إذا كان : ٠ < س < $\frac{\pi}{٢}$ وكان : د (ظا س) = جا س فإن : دَ (١) = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٢}}{٤}$ (د) $\frac{\sqrt{٢}}{٦}$

③ إذا كانت : د (س) = س^{٢} ، ق (س) = ظا س وكانت ف (س) = (د ○ ق) (س)

فإن : فَ $\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ = ...

(أ) -٤ (ب) ٤ (جـ) صفر (د) -١

④ إذا كانت : دَ (س) = جا^{٢} س وكان : د (٠) = ٠

فإن : $\lim_{س \to ٠}$ $\frac{د (س)}{س}$ = ...

(أ) -١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) غير موجودة.

⑤ إذا كانت : ص = ق | س | فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ...

(أ) ق | س | ظا | س | (ب) - ق س ظا س

(جـ) $\frac{س}{|س|}$ ق | س | ظا | س | (د) $\frac{س}{|س|}$ ق س ظا س

⑥ إذا كان : ٠ < س < $\frac{\pi}{٢}$ وكان : د (جا س) = أ جتا س حيث أ ثابت

وكان : دَ $\left(\frac{٣}{٥}\right)$ = -٦ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

⑦ إذا كانت : ص = ظا س حيث س مقاسة بالتقدير الستينى

فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ...

(أ) - قتا^{٢} س (ب) - قتا س ظا س

(جـ) $\frac{-\pi}{١٨٠}$ قتا^{٢} س (د) $\frac{-١٨٠}{\pi}$ قتا^{٢} س

2 الدرس

الاشتقاق الضمنى والبارامترى

الاشتقاق الضمنى

إذا كان لدينا المعادلتان : ص = س^{٢} + ٣ ، ٥ س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢} = ٠

نلاحظ أن المعادلة الأولى تعرف ص كدالة فى س وتسمى هذه المعادلة بالدالة الصريحة وتعرف بالصورة [ص = د (س)]

أما المعادلة الثانية فلا تعبر عن دالة وتسمى بالعلاقة الضمنية وتعرف بالصورة [ع (س ، ص) = ٠]

والاشتقاق فى هذه الحالة يسمى بالاشتقاق الضمنى.

فمثلًا : إذا كانت : س ≠ ١ وكان ص = $\frac{س}{١ - س}$ (١)

فإن : ص هنا دالة فى س وبضرب طرفى (١) فى (١ - س)

∴ ص (١ - س) = س ∴ ص - س ص - س = ٠ (٢)

ونلاحظ أن : (١) ، (٢) هما صورتان لدالة واحدة وتسمى الصورة الأولى بالدالة الصريحة

أما الصورة الثانية فتسمى دالة ضمنية.

ومن العلاقة (١) : ص = $\frac{س}{١ - س}$ نجد أن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{(١ - س) - س \times -١}{(١ - س)^{٢}}$ = $\frac{١}{(١ - س)^{٢}}$

ومن العلاقة (٢) : ص - س ص - س = ٠ باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س (اشتقاق ضمنى)

∴ $\frac{ء}{ء س}$ (ص) - $\frac{ء}{ء س}$ (س ص) - $\frac{ء}{ء س}$ (س) = ٠

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ - $\left(س \frac{ء ص}{ء س} + ص\right)$ - ١ = ٠ ∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ - س $\frac{ء ص}{ء س}$ - ص - ١ = ٠

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ (١ - س) = ص + ١

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{ص + ١}{١ - س}$ = $\frac{١ + \frac{س}{١ - س}}{١ - س}$ = $\frac{س + ١ - س}{(١ - س)^{٢}}$ = $\frac{١}{(١ - س)^{٢}}$

وهى نفس النتيجة التى حصلنا عليها من الصورة الأولى.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

* طبيعى أننا إذا أردنا أن نوجد $\frac{د ص}{د س}$ لعلاقة ضمنية فعلينا أن نحولها أولًا إلى علاقة صريحة ثم نستخدم قواعد الاشتقاق لإيجاد $\frac{د ص}{د س}$

إلا أنه فى بعض الأحيان يكون من المتعذر تحويل العلاقة الضمنية إلى علاقة صريحة مثل العلاقة الضمنية $س^٢ - ٣ س ص - ص^٣ = ٤$ ، إذ لا يمكن فصل المتغير ص فى طرف مستقل ، لذلك نلجأ إلى الاشتقاق الضمنى لطرفى المتساوية بالنسبة إلى أحد المتغيرين س أ، ص لنحصل على $\frac{د ص}{د س}$ أ، $\frac{د س}{د ص}$

ملاحظة

توجد بعض العلاقات لا تمثل بدالة واحدة ولكنها تمثل بدالتين صريحتين.

فمثلًا :

العلاقة $س^٢ + ص^٢ = ٤$ ليست دالة لأن لأى قيمة للمتغير س يناظرها قيمتان للمتغير ص

لأن $ص = \pm \sqrt{٤ - س^٢}$ أى أن هذه العلاقة تمثل دالتين صريحتين

الأولى : $ص = \sqrt{٤ - س^٢}$ ومشتقتها $\frac{د ص}{د س} = \frac{- ٢ س}{٢ \sqrt{٤ - س^٢}} = \frac{- س}{\sqrt{٤ - س^٢}} = \frac{- س}{ص}$

الثانية : $ص = - \sqrt{٤ - س^٢}$ ومشتقتها $\frac{د ص}{د س} = - \left(\frac{- ٢ س}{٢ \sqrt{٤ - س^٢}} \right) = \frac{- س}{- \sqrt{٤ - س^٢}} = \frac{- س}{ص}$

وإذا تناولنا العلاقة : $س^٢ + ص^٢ = ٤$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س

نجد أن : $\frac{د}{د س}(س^٢) + \frac{د}{د س}(ص^٢) = \frac{د}{د س}(٤)$

$\therefore ٢ س + ٢ ص \frac{د ص}{د س} = ٠$ $\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{- س}{ص}$

وهذه هى نفس المشتقة لكل من الدالتين الصريحتين $ص = \sqrt{٤ - س^٢}$ ، $ص = - \sqrt{٤ - س^٢}$

* مما سبق نستنتج أنه لنفس العلاقة سواء كانت فى صورتها الصريحة أو الضمنية يكون لها نفس المشتقة ونحصل عليها بالاشتقاق بالنسبة لأحد المتغيرين س أو ص

مثال ١

أوجد $\frac{د ص}{د س}$ فى كل مما يأتى :

(١) $س^٢ + ص^٢ + ٣ س - ٤ ص = ١$ عند النقطة (١ ، ٣)

(٢) $س^٢ + ٤ س ص - ٣ ص^٢ - ٢ س = ٣$ عند النقطة (٣ ، ٠)

الحل

(١) $س^٢ + ص^٢ + ٣ س - ٤ ص = ١$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٢ س + ٢ ص \frac{د ص}{د س} + ٣ - ٤ \frac{د ص}{د س} = ٠$

$\therefore (٢ ص - ٤) \frac{د ص}{د س} = - ٢ س - ٣$

$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{- ٢ س - ٣}{٢ ص - ٤}$

$\therefore \left(\frac{د ص}{د س} \right)_{(١ ، ٣)} = \frac{- ٥}{٢}$

تذكر أن :

$\frac{د}{د س} ص^ن = ن ص^{ن-١} \frac{د ص}{د س}$

(٢) $س^٢ + ٤ س ص - ٣ ص^٢ - ٢ س = ٣$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٢ س + ٤ \left(س \frac{د ص}{د س} + ص \right) - ٣ \times ٢ ص \frac{د ص}{د س} - ٢ = ٠$

$\therefore ٢ س + ٤ س \frac{د ص}{د س} + ٤ ص - ٦ ص \frac{د ص}{د س} - ٢ = ٠$

$\therefore (٤ س - ٦ ص) \frac{د ص}{د س} = ٢ - ٢ س - ٤ ص$

$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{٢ - ٢ س - ٤ ص}{٤ س - ٦ ص} = \frac{١ - س - ٢ ص}{٢ س - ٣ ص}$

$\therefore \left(\frac{د ص}{د س} \right)_{(٣ ، ٠)} = \frac{- ١}{٣}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ١

أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى : $س^{٢} + ص^{٢} - ٦ س - ٨ ص + ١٧ = ٠$

مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة $(١ ، ٢)$

الحل

$س^{٢} + ص^{٢} - ٦ س - ٨ ص + ١٧ = ٠$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٢ س + ٢ ص \frac{ء ص}{ء س} - ٦ - ٨ \frac{ء ص}{ء س} = ٠$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = \frac{٦ - ٢ س}{٢ ص - ٨} = \frac{٣ - س}{ص - ٤}$

$\therefore$ ظا هـ $= -١$

$\therefore \left(\frac{ء ص}{ء س}\right)_{(١ ، ٢)} = -١$

$\therefore (٢ ص - ٨) \frac{ء ص}{ء س} = ٦ - ٢ س$

$\therefore$ ق $(\angle هـ) = ١٣٥°$

مثال ٣

أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ فى كل مما يأتى :

(١) $س^{٥} ص^{٥} = ١$

(٢) $س^{٧} + ص^{٧} = ٢$

(٣) $ص^{٣} + ٢ س^{٢} ص - ٣ س ص^{٢} = ٠$

(٤) جا ٣ ص $-$ جتا ٢ س $= ٠$

(٥) س جتا ص $+$ ص جا ٢ س $= ١$

(٦) ظا ٢ س $+$ ظتا ص $=$ س ص

الحل

(١) $س^{٥} ص^{٥} = ١$

$\therefore س ص = ١$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore س \frac{ء ص}{ء س} + ص = ٠$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = -\frac{ص}{س}$

(٢) $س^{٧} + ص^{٧} = ٢$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$٧ س^{٦} + ٧ ص^{٦} \frac{ء ص}{ء س} = ٠$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = \frac{-٧ س^{٦}}{٧ ص^{٦}} = -\left(\frac{س}{ص}\right)^{٦}$

(٣) $ص^{٣} + ٢ س^{٢} ص - ٣ س ص^{٢} = ٠$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٣ ص^{٢} \frac{ء ص}{ء س} + ٢ (س^{٢} \frac{ء ص}{ء س} + ص \times ٢ س) - ٣ (س \times ٢ ص \frac{ء ص}{ء س} + ص^{٢}) = ٠$

$\therefore ٣ ص^{٢} \frac{ء ص}{ء س} + ٢ س^{٢} \frac{ء ص}{ء س} + ٤ س ص - ٦ س ص \frac{ء ص}{ء س} - ٣ ص^{٢} = ٠$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} (٣ ص^{٢} + ٢ س^{٢} - ٦ س ص) = ٣ ص^{٢} - ٤ س ص$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = \frac{٣ ص^{٢} - ٤ س ص}{٣ ص^{٢} + ٢ س^{٢} - ٦ س ص}$

(٤) جا ٣ ص $-$ جتا ٢ س $= ٠$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٣$ جتا ٣ ص $\times \frac{ء ص}{ء س} - (-٢$ جا ٢ س$) = ٠$

$\therefore ٣$ جتا ٣ ص $\times \frac{ء ص}{ء س} + ٢$ جا ٢ س $= ٠$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = \frac{-٢ \text{ جا } ٢ س}{٣ \text{ جتا } ٣ ص}$

(٥) س جتا ص $+$ ص جا ٢ س $= ١$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore [س \times (-\text{جا ص} \times \frac{ء ص}{ء س}) + \text{جتا ص}] + [ص \times ٢ \text{ جتا } ٢ س + \text{جا } ٢ س \times \frac{ء ص}{ء س}] = ٠$

$\therefore -س \text{ جا ص} \times \frac{ء ص}{ء س} + \text{جتا ص} + ٢ ص \text{ جتا } ٢ س + \text{جا } ٢ س \times \frac{ء ص}{ء س} = ٠$

$\therefore (\text{جا } ٢ س - س \text{ جا ص}) \frac{ء ص}{ء س} = -٢ ص \text{ جتا } ٢ س - \text{جتا ص}$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = \frac{-٢ ص \text{ جتا } ٢ س - \text{جتا ص}}{\text{جا } ٢ س - س \text{ جا ص}}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تذكر أن :

إذا كانت : ص = (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))

فإن : $\frac{ع ص}{ع س}$ = د (ر (س)) . ر (س)

$\therefore \frac{ع}{ع س}$ [(د ∘ ر) (س)]

= $\frac{ع}{ع س}$ [د (ر (س))]

= د (ر (س)) × ر (س)

، ∵ د (س) = $\frac{-١}{(س - ٢)^{٢}}$ ، ر (س) = ٢ س

، عند س = −١ ∴ ر (−١) = ١ ، ر (−١) = −٢

، عند س = ١ ∴ د (١) = −١

∴ $\frac{ع}{ع س}$ [(د ∘ ر) (س)] = د (ر (−١)) × ر (−١) = د (١) × ر (−١) = −١ × −٢ = ٢

الاشتقاق البارامترى

* إن أمكن التعبير عن كل من الإحداثى السينى والإحداثى الصادى للنقطة (س ، ص) بدالة فى متغير ثالث وليكن ن (يسمى الوسيط أو البارامتر) بالمعادلتين :

س = د (ن) ، ص = ر (ن) حيث المعادلتين معًا تمثلان معادلة لمنحنى واحد لجميع قيم ن التى تنتمى للمجال المشترك للدالتين د ، ر معبرًا عنه بالصورة البارامترية وكل قيمة للمتغير (ن) تحدد نقطة ($س_ن$ ، $ص_ن$) ومجمل هذه النقط هو منحنى الدالة البارامترية.

الاشتقاق البارامترى

إذا كانت : ص = د (ن) ، س = ر (ن) هما معادلتا منحنى على الصورة البارامترية حيث : د ، ر دالتان قابلتان للاشتقاق بالنسبة إلى ن

فإن : $\frac{ع ص}{ع س} = \frac{ع ص}{ع ن} \times \frac{ع ن}{ع س} = \frac{ع ن}{ع س} \div \frac{ع ص}{ع ن}$

ملاحظة

يمكن تحويل معادلة المنحنى من الصورة البارامترية إلى الصورة الكارتيزية (صريحة أو ضمنية) وذلك بحذف المتغير البارامترى (ن) من معادلتى س ، ص

١

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

① ق ٢ س + ق ص = س ص

∴ ٢ ق ٢ س ط ٢ س − ق ٢ ص × $\frac{ع ص}{ع س}$ = س × $\frac{ع ص}{ع س}$ + ص

∴ س × $\frac{ع ص}{ع س}$ + ق ٢ ص × $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٢ ق ٢ س ط ٢ س − ص

∴ $\frac{ع ص}{ع س}$ (س + ق ٢ ص) = ٢ ق ٢ س ط ٢ س − ص

∴ $\frac{ع ص}{ع س} = \frac{٢ ق ٢ س ط ٢ س - ص}{س + ق ٢ ص}$

مثال ٤

إذا كان : س = (ص° − ١)^٨ أثبت أن : $\frac{ع ص}{ع س} = \frac{ص° - ١}{٤٠ س ص^{٤}}$

الحل

∵ س = (ص° − ١)^٨ (بالاشتقاق بالنسبة إلى ص)

∴ $\frac{ع س}{ع ص}$ = ٨ (ص° − ١)^٧ × ٥ ص^٤

∴ $\frac{ع س}{ع ص}$ = ٤٠ ص^٤ (ص° − ١)^٧

∴ $\frac{ع ص}{ع س} = \frac{١}{٤٠ ص^{٤} (ص° - ١)^{٧}} \times \frac{(ص° - ١)}{(ص° - ١)} = \frac{ص° - ١}{٤٠ ص^{٤} (ص° - ١)^{٨}} = \frac{ص° - ١}{٤٠ س ص^{٤}}$

لاحظ أن

$\frac{ع ص}{ع س} = ١ \div \frac{ع س}{ع ص}$

مثال ٥

إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ ، ر (س) = $س^{٢}$

أوجد : $\frac{ع}{ع س}$ [(د ∘ ر) (س)] عند س = −١

الحل

∵ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) = د ($س^{٢}$) = $\frac{١}{س^{٢} - ٢}$

∴ $\frac{ع}{ع س}$ [(د ∘ ر) (س)] = $\frac{-٢ س}{(س^{٢} - ٢)^{٢}}$

عند س = −١ ∴ $\frac{ع}{ع س}$ [(د ∘ ر) (س)] = $\frac{-٢ \times -١}{(١ - ٢)^{٢}}$ = ٢

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

فمثلاً :

(١) إذا كانت المعادلتان البارامتريتان لمنحنى دالة ما هما :

س = ٢ ن ، (١) ص = ن^{٢} (٢)

فإن : من (١) ن = $\frac{س}{٢}$

∴ ص = $\left(\frac{س}{٢}\right)^{٢}$

وبالتعويض فى (٢) :

∴ ص = $\frac{١}{٤}$ س^{٢} «الصورة الكارتيزية»

(٢) إذا كانت المعادلتان البارامتريتان للمنحنى هما :

س = ٣ جتا θ ، ص = ٣ جا θ فإن : س^{٢} = ٩ جتا^{٢} θ ، ص^{٢} = ٩ جا^{٢} θ

أى أن : س^{٢} + ص^{٢} = ٩ (جتا^{٢} θ + جا^{٢} θ) أى : س^{٢} + ص^{٢} = ٩ «الصورة الكارتيزية»

مثال ٦

أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ فى كل مما يأتى عند قيم ن المبينة :

(١) س = ٢ ن^{٢} ، ص = ن^{٤} عند ن = ٤

(٢) س = ٢ جتا^{٣} θ ، ص = ٥ جا^{٣} θ عند θ = $\frac{\pi}{٤}$

الحل

(١) ∵ س = ٢ ن^{٢} ∴ $\frac{ء س}{ء ن}$ = ٤ ن

، ∵ ص = ن^{٤} ∴ $\frac{ء ص}{ء ن}$ = ٤ ن^{٣}

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{ء ص}{ء ن}$ ÷ $\frac{ء س}{ء ن}$ = $\frac{٤ ن^{٣}}{٤ ن}$ = ن^{٢} ∴ $\left[\frac{ء ص}{ء س}\right]_{ن=٤}$ = ١٦

(٢) ∵ س = ٢ جتا^{٣} θ ∴ $\frac{ء س}{ء θ}$ = ٦ جتا^{٢} θ × − جا θ = −٦ جا θ جتا^{٢} θ

، ∵ ص = ٥ جا^{٣} θ ∴ $\frac{ء ص}{ء θ}$ = ١٥ جا^{٢} θ × جتا θ = ١٥ جا^{٢} θ جتا θ

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{ء ص}{ء θ}$ ÷ $\frac{ء س}{ء θ}$ = $\frac{١٥ جا^{٢} θ جتا θ}{−٦ جا θ جتا^{٢} θ}$ = $\frac{−٥ جا θ}{٢ جتا θ}$ = $\frac{−٥}{٢}$ ظا θ

∴ $\left[\frac{ء ص}{ء س}\right]_{θ=\frac{\pi}{٤}}$ = $\frac{−٥}{٢}$ ظا $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{−٥}{٢}$

مثال ٧

أوجد : مشتقة ص = $\sqrt{٥ + س^{٢}}$ بالنسبة إلى $\frac{س}{٢ + س}$ عند س = ٢

الحل

بوضع ص = $\sqrt{٥ + س^{٢}}$ ، ع = $\frac{س}{٢ + س}$

∴ المطلوب إيجاد $\frac{ء ص}{ء ع}$ عند س = ٢

∵ $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{٢ س}{٢\sqrt{٥ + س^{٢}}}$ = $\frac{س}{\sqrt{٥ + س^{٢}}}$ ، $\frac{ء ع}{ء س}$ = $\frac{س + ٢ − س}{(س + ٢)^{٢}}$ = $\frac{٢}{(س + ٢)^{٢}}$

∴ $\frac{ء ص}{ء ع}$ = $\frac{ء ص}{ء س}$ ÷ $\frac{ء ع}{ء س}$

∴ $\frac{ء ص}{ء ع}$ = $\frac{س}{\sqrt{٥ + س^{٢}}}$ ÷ $\frac{٢}{(س + ٢)^{٢}}$ = $\frac{س (س + ٢)^{٢}}{٢\sqrt{٥ + س^{٢}}}$ ∴ $\left(\frac{ء ص}{ء ع}\right)_{س=٢}$ = $\frac{١٦}{٣}$

مثال ٨

أوجد قيمة البارامتر ن التى عندها يكون للمنحنى :

س = ٤ ن^{٣} − ١٥ ن^{٢} − ١٨ ن + ٤ ، ص = ٢ ن^{٢} − ٣ ن + ٧

(١) مماس رأسى. (٢) مماس أفقى.

الحل

∵ س = ٤ ن^{٣} − ١٥ ن^{٢} − ١٨ ن + ٤ ∴ $\frac{ء س}{ء ن}$ = ١٢ ن^{٢} − ٣٠ ن − ١٨

، ص = ٢ ن^{٢} − ٣ ن + ٧ ∴ $\frac{ء ص}{ء ن}$ = ٤ ن − ٣

، ∵ ميل المماس للمنحنى عند النقطة (س ، ص) يساوى $\frac{ء ص}{ء س}$

حيث : $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{ء ص}{ء ن}$ ÷ $\frac{ء س}{ء ن}$ = $\frac{٤ ن − ٣}{١٢ ن^{٢} − ٣٠ ن − ١٨}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

لاحظ أن

- إذا كان المماس أفقيًا : فإن ميل المماس = . أي البسط = .
- إذا كان المماس رأسيًا : فإن ميل المماس غير معرف أي المقام = .

(١) في حالة المماس الرأسي يكون ميل المماس غير معرف

ونضع ١٢ ن^{٢} − ٣٠ ن − ١٨ = .

∴ ٢ ن^{٢} − ٥ ن − ٣ = .

∴ (٢ ن + ١) (ن − ٣) = .

∴ ن = − $\frac{١}{٢}$ أ، ن = ٣

∴ يكون للمنحنى مماس رأسي عندما ن = − $\frac{١}{٢}$ أ، ن = ٣

(٢) في حالة المماس الأفقي يكون ميل المماس = صفر

ونضع ٤ ن − ٣ = . ∴ ن = $\frac{٣}{٤}$

∴ يكون للمنحنى مماس أفقي عندما ن = $\frac{٣}{٤}$

تمارين 2

على الاشتقاق الضمني والبارامتري

اختبار تفاعلي

• فهم • تطبيق • مستويات عليا من أسئلة الكتاب المدرسي

أولًا مسائل على الاشتقاق الضمني

١ أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ لكل من العلاقات الآتية :

(١) س^{٢} − ٤ ص^{٢} + ٧ = .

(٢) س^{٤} + ٣ ص^{٤} − ٢ = .

(٣) (س − ٣)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٢٥

(٤) س^{٣} + ص^{٢} − ٧ س + ٥ ص = ٨

(٥) س^{٣} + ص^{٣} − ٢ س + ٣ ص^{٢} = ٨

(دورتان ٢٠٠٩) س^{٢} + ٩ ص^{٢} = ٦ س ص + ٤

(٧) س^{٣} − ٥ س ص + ص^{٣} = ٤ س

(٨) س ص = ١٠٠ (س + ص)

(٩) س^{٢} ص^{٢} = ١٠

(١٠) س^{٢} ص + ص^{٢} س = ٢٥

(١١) س^{ن} ص^{ن} = أ^{ن} حيث أ ثابت ، ن عدد صحيح موجب.

(١٢) س^{ن} + ص^{ن} = أ^{ن} حيث أ ثابت ، ن عدد صحيح موجب.

٢ أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ لكل من العلاقات الآتية :

(١) $\frac{٢}{س} + \frac{٣}{ص}$ = ٥

(٢) $\frac{س^{٣} + ص^{٣}}{س^{٣} - ص^{٣}}$ = ٧

(٣) $\sqrt{س} + \sqrt{ص}$ = ٤

(٤) ص + $\sqrt{س ص}$ = ٢ س^{٢}

(٥) جا ٣ س = ظا ٢ ص

(٦) س جا ص = ص

(٧) جا ٢ ص = ص جتا ٢ س

(٨) س ص + جا ص = ٥

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ثانيا مسائل على الاشتقاق البارامترى

٥ أوجد $\frac{ص}{س}$ لكل من المنحنيات الآتية عند القيم المعطاة :

(١) س = ٥ ن + ٣ ، ص = ١٦ ن^{٢} + ٩ عند ن = ٥ «٣٢»

(٢) س = أ ن^{٢} ، ص = ٢ أ ن^{٦} عند ن = ١ «٦»

(٣) س = ٤ ن ، ص = $\frac{٤}{ن}$ عند ن = ٣ «$\frac{١}{٩}$»

(٤) س = (ن + ٧) (ن − ٢) ، ص = (ن^{٢} + ١) (ن − ٢) عند ن = ١ «صفر»

(٥) س = $\sqrt{٣ن - ٢}$ ، ص = $\sqrt{٤ن + ١}$ عند ن = ٢ «$\frac{٨}{٩}$»

٦ أوجد $\frac{ص}{س}$ لكل من المنحنيات الآتية عند القيم المعطاة :

(١) س = ٣ جتا^{٢} θ ، ص = ٤ جا ٣ θ عند θ = $\frac{\pi}{٤}$ «$\sqrt{٢}$»

(٢) س = جا ٢ θ ، ص = جتا ٢ π θ عند θ = $\frac{١}{٦}$ «$-\sqrt{٣}$»

(٣) س = ٥ جتا^{٢} θ ، ص = ٤ جا^{٢} θ عند θ = $\frac{\pi}{٦}$ «$\frac{-٤}{٥}$»

(٤) س = أ جتا^{٢} θ ، ص = أ جا^{٢} θ عند θ = $\frac{\pi}{٤}$ «−١»

(٥) س = ٥ + ظا^{٢} ٣ θ ، ص = ١ − ظا ٣ θ عند θ = $\frac{\pi}{٤}$ «$\frac{١}{٢}$»

(٦) س = ظا^{٢} θ − ١ ، ص = ظا θ عند θ = $\frac{-٣\pi}{٤}$ «$\frac{١}{٢}$»

(٧) س = أ ظا θ ، ص = ب ظا θ عند θ = $\frac{٣\pi}{٤}$ «$\frac{٢\sqrt{٢}\,ب}{أ}$»

(٨) س = جتا θ + جتا ٢ θ ، ص = جا θ + جا ٢ θ عند θ = $\frac{\pi}{٣}$ «$\frac{٣\sqrt{٣}}{٩}$»

(٩) س = ٣ جتا θ − ٢ جتا^{٣} θ ، ص = ٣ جا θ − ٢ جا^{٣} θ عند θ = $\frac{\pi}{٢}$ «صفر»

(١٠) س = أ (جتا θ + θ جا θ) ، ص = أ (جا θ − θ جتا θ) عند θ = $\frac{\pi}{٦}$ «$\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$»

(١٠) جا س جتا ص = $\frac{١}{٢}$

(١١) ٢ ص = جا ٢ س جتا ص

(١٢) س جتا ص + ص جتا س = ١

(١٣) س^{٢} جا ص − ص^{٢} جا س = ٩

(١٤) س ظا ص = ص ظا س

(١٥) ظا ٢ س + ظا ص = س ص

(١٦) جا^{٢} س + ٢ جتا ص + س ص = .

(١٧) ص ظا س + ظا س + س^{٢} ص = .

(١٨) أ جتا ب س + ب جا أ ص = حـ حيث أ ، ب ، حـ ثوابت.

٣ أوجد ميل المماس للمنحنيات الآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها :

(١) ٢ س^{٢} + ٣ ص^{٢} = ٥ عند النقطة (−١ ، −١) «$\frac{-١}{٣}$»

(٢) س^{٢} − ٣ س ص + ص^{٢} = ١١ عند النقطة (٢ ، −١) «$\frac{٢}{٨}$»

(٣) س ص^{٢} = ٣ عند النقطة (٣ ، ١) «$\frac{-١}{٣}$»

(٤) س^{٤} − ٢ س^{٣} ص^{٢} + س ص^{٣} = ١ عند النقطة (١ ، ٢) «٢»

(٥) س^{٢} − س ص + ص^{٢} = ٢٧ عند النقطة (٦ ، ٣) «غير معرف»

(٦) س $\sqrt{ص}$ + ص $\sqrt{س}$ = ٦ عند النقطة (١ ، ٤) «$\frac{-١٦}{٥}$»

(٧) جتا $\sqrt{\pi ص}$ = ٣ س + ١ عند النقطة $(-\frac{١}{٣} ، \frac{\pi}{٤})$ «−٢»

(٨) $\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$ حيث أ ، ب ثابتان عند النقطة (أ جتا هـ ، ب جا هـ) «$-\frac{ب}{أ}$ ظا هـ»

٤ أوجد قياس الزاوية التى يصنعها المماس لكل من المنحنيات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة المبينة أمام كل منها :

(١) س^{٢} − ٣ س ص + ص^{٢} = ٥ عند النقطة (١ ، −١) «٤٥°»

(٢) س^{٣} − س^{٢} ص − س − ٣ ص = . عند النقطة (١ ، .) «٢٦° ٣٤'»

(٣) $\frac{س}{ص} - \frac{٤ ص}{س}$ = ٣ عند النقطة (١ ، −١) «١٣٥°»

(٤) جا ٢ س = ظا ص عند النقطة $(\frac{\pi}{٤} ، \frac{٣\pi}{٤})$ «صفر»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٧ باستخدام الاشتقاق البارامترى أوجد :

① مشتقة $(٤ س^{٣} - ٩ س^{٢} + ٥)$ بالنسبة إلى $(٣ س^{٢} + ٧)$

② معدل تغير $(س + ٣)(س - ٢)$ بالنسبة إلى $\frac{س - ٣}{س + ٢}$

③ مشتقة $\frac{س + ١}{س - ١}$ بالنسبة إلى $\sqrt{٢ س + ١}$ عندما $س = ٤$

④ مشتقة $(س - ما س)$ بالنسبة إلى $(١ - مـا س)$ عندما $س = \frac{\pi}{٣}$

ثالثًا مسائل متنوعة

٨ إذا كانت : د ، ر ، ق دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

أكمل ما يأتى باستخدام القيم المعطاه فى الجدول المقابل :

س	١	٢
د (س)	١-	٤
ر (س)	٢	١
دَ (س)	١	٥
رَ (س)	٢	٣-

① ق (س) = ٣ د (س) - ٢ ر (س)

فإن : قَ (١) = ...

② ق (س) = د (س) [٥ + ر (س)]

فإن : قَ (٢) = ...

③ ق (س) = د (س) ÷ [ر (س) + ٢]

فإن : قَ (١) = ...

④ ق (س) = د [ر (س)] فإن : قَ (١) = ...

⑤ ق (س) = ر [٣ س - د (س)] فإن : قَ (٢) = ...

⑥ ق (س) = [س^{٢} + ر (س)]$^{-٢}$ فإن : قَ (١) = ...

٩ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : د (س) = ٢ أ^{٦} + ٥ ب^{٤} حيث أ ، ب ثوابت

فإن : دَ (س) = ...

(أ) ١٢ أ^{٥} + ٢٠ ب^{٣} (ب) ٦ أ^{٥} + ٤ ب^{٣}

(جـ) ١ (د) صفر

② إذا كان : ق (س) = | س | فإن : قَ (-٥) = ...

(أ) ٥ (ب) -٥ (جـ) ١ (د) -١

③ إذا كانت : ص = $\sqrt{ر (س)}$ وكان رَ (٢) = ٤ ، ر (٢) = ٩

فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ عندما س = ٢ تساوى

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٩}$ (جـ) $\frac{١}{٦}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

④ إذا كان : س^{٣} ص^{٢} = ١ فإن : $\left[\frac{ء ص}{ء س}\right]_{ص = ١}$ = ...

(أ) $\frac{-٢}{٣}$ (ب) $\frac{-٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

⑤ إذا كان : د (٥ س) = س^{٢} + س فإن : دَ (٢) = ...

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) $\frac{٣}{٢٥}$ (د) $\frac{٩}{٢٥}$

⑥ إذا كان : د (س) = ٣ س + ر (س) وكان رَ (٢) = -٥

فإن ميل المماس لمنحنى الدالة د عند س = ٢ يساوى

(أ) -٢ (ب) ٣ (جـ) -١٥ (د) $\frac{١}{٢}$

⑦ إذا كان : س ص = ١ فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ يساوى كلًا مما يأتى ما عدا

(أ) س$^{-٢}$ (ب) $\frac{-١}{س^{٢}}$ (جـ) $\frac{- ص}{س}$ (د) - ص^{٢}

⑧ إذا كانت : $\frac{س}{ص} + \frac{ص}{س} = ٢$ حيث ٢ ثابت فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ...

(أ) $\frac{س}{ص}$ (ب) $\frac{ص}{س}$ (جـ) $\frac{٢ س}{ص}$ (د) $\frac{٢ ص}{س}$

⑨ إذا كان : ص = $\frac{ع + ١}{ع - ١}$ ، س = $\frac{ع - ١}{ع + ١}$

فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ... عند س = ٢

(أ) $\frac{١}{٨}$- (ب) $\frac{١}{٤}$- (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) ٤-

⑩ إذا كانت : ص = ٣ $\sqrt{ن}$ + ١ ، ع = ٢ ن - ٥ فإن : $\frac{ء ص}{ء ع}$ = ...

(أ) $\frac{ن}{٣}$ (ب) ٣ ن (جـ) ٣ (د) $\frac{٣}{ن}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(١١) إذا كان : ص = ٢ ن^{٢} + ٧ ، ع = ن^{٢} − ٤

فإن معدل تغير ص بالنسبة إلى ع يساوى

(أ) ٦ ن^{٢} (ب) ٦ ن (جـ) ٣ ن (د) ٢ ن

(١٢) إذا كان : س = ٢ ن^{٢} + ٣ ، ص = $\sqrt{\text{ن}^{٣}}$

فإن : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عند ن = ١ تساوى

(أ) $\frac{١}{٨}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{٣}{٨}$ (د) $\frac{٨}{٣}$

(١٣) معدل تغير ط س^{٣} بالنسبة إلى ط س^{٣} يساوى

(أ) − ط س^{٣} (ب) ط س^{٣} (جـ) ط س^{٣} (د) − ط س^{٣}

(١٤) تتحرك نقطة (س ، ص) على منحنى بحيث كان $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ = ن^{٢} ، $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ = ٢ ن

فإن ميل المماس للمنحنى عند ن = ١ يساوى

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) $\frac{١}{٤}$

(١٥) ميل المماس للمنحنى : ص = ن^{٢} + ٢ ن ، س = ن^{٢} − ٢ ن

يساوى عند ن = ٢

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $-\frac{١}{٢}$ (جـ) ٢ (د) ٣

(١٦) المماس للمنحنى س = ن^{٢} − ١ ، ص = ن^{٢} − ن يوازى محور السينات

عند ن = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٣\sqrt{٣}}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $-\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$

(١٧) إذا كان : س = أ $\left(\text{ن} - \frac{١}{\text{ن}}\right)$ ، ص = أ $\left(\text{ن} + \frac{١}{\text{ن}}\right)$ فإن : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ...

(أ) $-\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ (ب) $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ (جـ) $-\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ (د) $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

(١٨) إذا كانت : س = أ (θ − جا θ) ، ص = أ (١ − جتا θ) فإن كل مما يلى صحيح ما عدا

(أ) $\frac{\text{د س}}{\text{د θ}}$ = ص (ب) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ظا $\frac{\theta}{٢}$

(جـ) $\frac{\text{د ص}}{\text{د θ}} + \frac{\text{د س}}{\text{د θ}}$ = ١ (د) ص $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = أ جا θ

(١٩) إذا كانت ص = د (س^{٢}) وكانت : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٢ س^{٣} − ٤ س

فإن : دَ (٤) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٦ (د) ١٤

(٢٠) إذا كانت : د دالة فردية قابلة للاشتقاق فى]− ∞ ، ∞[، دَ (٣) = ٢

فإن : دَ (−٣) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

(٢١) إذا كانت : د (س) = $\frac{٢}{\text{س} + ١}$ ، ر (س) = ٣ س

فإن : $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ [(د ∘ ر) (س)] = ... عند س = −٢

(أ) $\frac{-٢}{٢٥}$ (ب) ٦ (جـ) $\frac{١}{٢٥}$ (د) $\frac{-٦}{٢٥}$

(٢٢) إذا كانت : د (س) = ٢ س^{٣} + ١ ، هـ (س) = س^{٢} فإن : دَ (هـ (٣)) = ...

(أ) صفر (ب) ٩ (جـ) ٤٨٦ (د) ٢٩١٦

(٢٣) إذا كان : د (س) = ٣ س^{٢} − ٢ فإن : (د ∘ د)َ (−١) = ...

(أ) −٣٦ (ب) −١٨ (جـ) صفر (د) ١٨

(٢٤) أى من المنحنيات الآتية يكون عندها ميل المماس ثابت ؟

(أ) س = جا ن ، ص = جتا ن (ب) س = ن^{٢} ، ص = ٣ ن^{٢}

(جـ) س = ٢ ن − ١ ، ص = ن^{٢} − ٤ (د) س ص = ٧

(٢٥) إذا كان : د (س) + دَ (س) = س^{٣} + ٥ س^{٢} + س + ٢ حيث د (س) كثيرة حدود

فإن : د (س) = ...

(أ) س^{٣} + ٢ س^{٢} − ٣ س (ب) ٣ س^{٢} − ٤ س − ٣

(جـ) س^{٣} + ٢ س^{٢} + ٥ (د) س^{٣} + ٢ س^{٢} − ٣ س + ٥

(٢٦) إذا كانت د (٢ س + ١) = س . هـ (٢ س − ٥) وكان هـ (١) = ٢ ، هـَ (١) = ٤

فإن دَ (٧) = ...

(أ) ٤ (ب) ٧ (جـ) ١١ (د) ١٣

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٢٧) إذا كانت : د (س) = $\frac{1}{1+س^2}$ ، ر (س) = ظا س

فإن : (د ∘ ر)أ (س) = ...

(أ) قا^2 س (ب) قا^2 س ظا^2 س

(جـ) ظا^2 س (د) ١

(٢٨) إذا كانت : س = ظا ص فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ...

(أ) قتا ص ظا ص (ب) قتا ص − ظا ص

(جـ) قتا ص − ظا ص (د) ظا ص + قا ص

(٢٩) إذا كانت : س = ظا ص فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ...

(أ) $س^2 - ١$ (ب) $\frac{١}{س^2 - ١}$ (جـ) $\frac{١}{س^2 + ١}$ (د) $\frac{-١}{س^2 + ١}$

(٣٠) إذا كانت : $ص^2 = ٢ + س ص$ فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ... عند س = ١

(أ) لها قيمة وحيدة. (ب) لها قيمتان.

(جـ) لها عدد لا نهائى من القيم. (د) غير معرفة.

(٣١) إذا كان : س = ظا ص فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ عند س = ١

(أ) لها قيمة وحيدة (ب) لها قيمتان

(جـ) لها عدد لا نهائى من القيم (د) غير معرفة

(٣٢) عدد حلول المعادلتين $س^2 + ص^2 = ٢٥$ ، $\frac{ء ص}{ء س} = ٢$ أنيًا هو

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى.

(٣٣) معدل تغير حجم الكرة بالنسبة لمساحة سطحها عندما يكون طول نصف قطرها ٢ سم يساوى

(أ) $\frac{١}{٢}$ سم^2 (ب) ١ سم (جـ) $\frac{١}{٢}$ سم (د) ١ سم^2

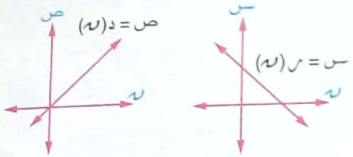
(٣٤) (دور أول ٢٠٢١) إذا كانت : ص = $\frac{١}{(س + ١)^2}$ ، فإن معدل تغير $\frac{١}{ص}$ بالنسبة إلى $س^2$ عند س = ١ يساوى

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) $\frac{١}{٤}$

(٣٥) إذا كان الشكلان المقابلان يوضحان العلاقتين

ص = د (هـ) ، س = ر (هـ)

فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ يمكن أن يساوى

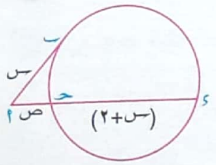


(أ) صفر. (ب) عدد موجب. (جـ) عدد سالب. (د) عدد غير سالب.

(٣٦) فى الشكل المقابل :

إذا كانت $\overline{أ ب}$ قطعة مماسة للدائرة

فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ... عندما س = ٤

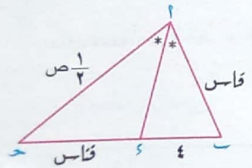


(أ) ٠,٤ (ب) ٠,٦ (جـ) ٠,٨ (د) ٠,٩

(٣٧) فى الشكل المقابل :

إذا كان $\overleftarrow{أ ء}$ ينصف ∠ ب أ حـ

فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ...



(أ) − قتا ٢ س ظا ٢ س (ب) −٢ قتا س ظا س

(جـ) −٢ قتا ٢ س (د) −٢ قتا ٢ س ظا ٢ س

١٠ إذا كانت : ص = $(س^3 + ٢)^7$ أثبت أن : $\frac{ء س}{ء ص} = \frac{س^3 + ٢}{٢١ س^2 ص}$

١١ (دور ثان ٢٠٠٣) إذا كانت : س = $(ص^3 - ١)^5$ أثبت أن : $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{ص^3 - ١}{١٥ س ص^2}$

١٢ إذا كان : $\frac{٢}{\sqrt{س} + \sqrt{ص}} = ٥$ أثبت أن : $\left(\frac{ء ص}{ء س}\right)^2 = \frac{ص}{س}$

١٣ إذا كان : $(ص - أ)^2 - (س - أ)^2 = أ^2$ حيث أ ثابت أثبت أن : $\frac{ء ص}{ء س} = \left(\frac{ص - أ}{س - أ}\right)^2$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

١٤ إذا كانت : ص = ٢ س + ٢ س − ٢ ، حيث ٢ ثابت أثبت أن : $\left(\frac{د ص}{د س}\right)^{٢} + \frac{٢ - س}{ص} \times \frac{د ص}{د س} = ١$

١٥ إذا كان : ص = س + $\sqrt{١ + س^{٢}}$ أثبت أن : ٢ $\sqrt{١ + س^{٢}}$ $\frac{د ص}{د س}$ = ص

١٦ إذا كانت : ص = $\left(\frac{س^{٢} - ٢}{س^{٢} + ٢}\right)^{ن}$ أثبت أن : $\frac{د س}{د ص} = \frac{س^{١} - ٤}{٨ ن س ص}$

١٧ أوجد قيمة البارامتر ع التى يكون عندها للمنحنى :

س = ٢ ع^{٣} − ٥ ع^{٢} − ٤ ع + ١٢ ، ص = ٢ ع^{٢} + ع − ٤

(١) مماس أفقى. (٢) مماس رأسى. " $-\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٣}$ أ، ٢

١٨ أوجد قيمة البارامتر ن التى عندها يكون للمنحنى :

س = ن^{٣} − ٧ ن^{٢} + ١٦ ن + ١ ، ص = ٢ ن^{٣} − ٣ ن^{٢} + ٥

(١) مماس رأسى. (٢) مماس أفقى. " $\frac{٨}{٣}$ أ، ٢ ، صفر أ، ١

١٩ إذا كانت : س = $\left(١ - \sqrt[٣]{ص}\right)\left(١ + \sqrt[٣]{ص} + \sqrt[٣]{ص^{٢}}\right)\left(١ + ص + ص^{٢}\right)$

أثبت أن : $\frac{د ص}{د س} = \frac{-١}{٣ ص^{٢}}$

٢٠ إذا كان : ما س جتا ص − ما ص جتا س = ١

أوجد : $\frac{د ص}{د س}$ حيث س ، ص ∈]٠ ، ٢ π[١٠

٢١ إذا كان : ما^{٢} س + جتا^{٢} ص = $\frac{١}{٤}$ أثبت أن : $\frac{د س}{د ص}$ = ما ٢ ص ظتا ٢ س

٢٢ إذا كانت : س = جتا (س ص) أثبت أن : $\frac{د ص}{د س} + \frac{١ + ص ما (س ص)}{س ما (س ص)} = ٠$

٢٣ أثبت أن : مشتقة الدالة الزوجية تكون فردية ومشتقة الدالة الفردية تكون زوجية.

مسائل تقيس مهارات التفكير

٢٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : د (س) = ن (س^{٢}) فإن : $\frac{د' (٢)}{ن' (٤)}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢) إذا كانت الدالة ن هى الدالة العكسية للدالة د حيث كل من د ، ن دوال قابلة للاشتقاق على ح وكان : د' (٢) = ٢ ، د (٢) = ب فإن : ن' (ب) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) ١

(٣) إذا كانت : ص = د (ظا س) ، ع = ن (ظا س) حيث د' (١) = ٢ ، ن' $\left(\sqrt{٢}\right)$ = ٤

فإن معدل تغير ص بالنسبة لـ ع عندما س = $\frac{\pi}{٤}$ يساوى

(أ) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) ١ (د) صفر

(٤) إذا كانت : ص = $\sqrt{س + \sqrt{س + \sqrt{س + \sqrt{س + ...}}}}$ فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{س ص}$ (جـ) $\frac{١}{٢ ص + ١}$ (د) $\frac{١}{٢ ص - ١}$

(٥) إذا كانت : س = $\sqrt{ظا ص + \sqrt{ظا ص + \sqrt{ظا ص + ...}}}$

فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = ...

(أ) (٢ س − ١) جتا^{٢} ص (ب) جتا^{٢} ص

(جـ) (٢ س − ١) قا^{٢} ص (د) (س^{٢} − س) قا^{٢} ص

(٦) إذا كانت : د (س) = س^{٢} فإن : (د ○ د)' (١) = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ٩

(٧) إذا كانت : ص = س^{٢} + ٥ س + ٣ فإن : $\frac{د ص}{د (س^{٢})}$ = ... عند س = ١

(أ) $\frac{٧}{٢}$ (ب) $\frac{٥}{٧}$ (جـ) ٧ (د) $\frac{٧}{٥}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مستويات عليا

تدريب

1

(أ) إذا كان س = ق ص حيث ص ∈] $\frac{\pi}{2}$ ، π [فإن : $\frac{ء س}{ء ص}$ = ...

(ب) $-\sqrt{س^{٢}-١}$

(ج) $-س\sqrt{س^{٢}-١}$

(د) $س\sqrt{س^{٢}-١}$

(هـ) $س\sqrt{س^{٢}+١}$

(و) إذا كان ص = د (د (س)) وكان : د (١) = ١ ، دَ (١) = ٣

فإن : [صَ]س=١ = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (ج) ٢٧ (د) ٨١

٢٥ إذا كان : س = ق ص ، ص زاوية حادة أثبت أن : $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{١}{١-س^{٢}\sqrt{}}$

٢٦ إذا كانت : ص = د (ر (س)) ، دَ (س) = $\frac{س}{١+س^{٢}\sqrt{}}$ ، ر (س) = $\frac{١}{س}$

أثبت أن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\begin{cases} \frac{-١}{(١+س^{٢})\sqrt{١+س^{٢}}} & \text{عندما } س > ٠ \\ \frac{١}{(١+س^{٢})\sqrt{١+س^{٢}}} & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$

٢٧ أ ب حـ مثلث مساحته م ، النقطة حـ تتحرك على المستقيم : ص = ٢ س فإذا كان :

أ (ل ، ٠) ، ب (٠ ، ك) حيث ل ، ك ثابتان موجبان.

أثبت أن : $\frac{ء م}{ء س}$ = $\begin{cases} -ل - \frac{ك}{٢} & ، س < \frac{ك ل}{ك + ٢ ل} \\ ل + \frac{ك}{٢} & ، س > \frac{ك ل}{ك + ٢ ل} \end{cases}$

الدرس 3

المشتقات العليا للدالة

إذا كانت : ص = د (س) قابلة للاشتقاق عدة مرات بالنسبة للمتغير س فيمكننا الحصول على المشتقة الأولى ثم المشتقة الثانية ثم المشتقة الثالثة وهكذا ... كما يلى :

* المشتقة الأولى للدالة هى $\frac{ء ص}{ء س}$ أ ، صَ أ ، دَ (س)

* المشتقة الثانية للدالة هى «مشتقة المشتقة الأولى»

أى : $\frac{ء}{ء س}\left(\frac{ء ص}{ء س}\right)$

ويرمز لها بأحد الرموز $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ أ ، صً أ ، دً (س)

* المشتقة الثالثة للدالة هى «مشتقة المشتقة الثانية»

أى : $\frac{ء}{ء س}\left(\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}\right)$

ويرمز لها بأحد الرموز $\frac{ء^{٣} ص}{ء س^{٣}}$ أ ، صٌ أ ، دٌ (س) وهكذا ...

فمثلًا : إذا كان : ص = س^٤ − ٣ س^٣ + ٥ س^٢ − ٤ س + ٧

فإن : صَ = ٤ س^٣ − ٩ س^٢ + ١٠ س − ٤

، صً = ١٢ س^٢ − ١٨ س + ١٠

، صٌ = ٢٤ س − ١٨

، $\frac{ء^{٤} ص}{ء س^{٤}}$ = ٢٤ ، $\frac{ء^{٥} ص}{ء س^{٥}}$ = صفر

، أى مشتقة تالية للمشتقة الخامسة = صفر

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٢

أوجد المشتقة الثالثة والرابعة لكل مما يأتي :

(١) ص = س^{٣} − ما ٢ س　　(٢) ص = $\frac{\text{س}}{\text{س} - ١}$　حيث : س ≠ ١

الحـــل

(١) ∵ ص = س^{٣} − ما ٢ س

∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٣ س^{٢} − ٢ ما ٢ س　　∴ $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}^{٢}}$ = ٦ س + ٤ ما ٢ س

∴ $\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ء س}^{٣}}$ = ٦ + ٨ ما ٢ س　، $\frac{\text{ء}^{٤}\text{ص}}{\text{ء س}^{٤}}$ = −١٦ ما ٢ س

(٢) ∵ ص = $\frac{\text{س}}{\text{س} - ١}$

∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = $\frac{(\text{س} - ١) - \text{س}}{(\text{س} - ١)^{٢}}$ = $\frac{-١}{(\text{س} - ١)^{٢}}$ = − (س − ١)$^{-٢}$

∴ $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}^{٢}}$ = ٢ (س − ١)$^{-٣}$　　∴ $\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ء س}^{٣}}$ = −٦ (س − ١)$^{-٤}$ = $\frac{-٦}{(\text{س} - ١)^{٤}}$

∴ $\frac{\text{ء}^{٤}\text{ص}}{\text{ء س}^{٤}}$ = ٢٤ (س − ١)$^{-٥}$ = $\frac{٢٤}{(\text{س} - ١)^{٥}}$

مثال ٣

إذا كانت : ص^{٢} = س^{٢} (٤ − س)　**أثبت أن :** ص $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}^{٢}}$ + $\left(\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right)^{٢}$ + ٣ س = ٤

الحـــل

∵ ص^{٢} = ٤ س^{٢} − س^{٣}　(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ ص $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٨ س − ٣ س^{٢}　(بالقسمة على ٢)

∴ ص $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٤ س − $\frac{٣}{٢}$ س^{٢}　(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ص $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}^{٢}}$ + $\left(\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right)^{٢}$ = ٤ − ٣ س　∴ ص $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}^{٢}}$ + $\left(\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right)^{٢}$ + ٣ س = ٤

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٦

إذا كانت : $ص = س^{٢} + ٧س - ١$ ، $ع = س^{٢} - ٣س + ١٥$

أوجد : $\frac{ء^{٢}ص}{ء ع^{٢}}$ عندما $س = ٢$

الحل

$\because ص = س^{٢} + ٧س - ١$ $\therefore \frac{ء ص}{ء س} = ٢س + ٧$

، $\because ع = س^{٢} - ٣س + ١٥$ $\therefore \frac{ء ع}{ء س} = ٢س - ٣$

$\therefore \frac{ء ص}{ء ع} = \frac{ء ص}{ء س} \div \frac{ء ع}{ء س}$ $\therefore \frac{ء ص}{ء ع} = \frac{٢س + ٧}{٢س - ٣}$ (باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى ع)

$\therefore \frac{ء}{ء ع}\left(\frac{ء ص}{ء ع}\right) = \frac{ء}{ء ع}\left(\frac{٢س + ٧}{٢س - ٣}\right)$

$\therefore \frac{ء^{٢}ص}{ء ع^{٢}} = \frac{ء}{ء س}\left(\frac{٢س + ٧}{٢س - ٣}\right) \times \frac{ء س}{ء ع} = \frac{٢(٢س - ٣) - ٢(٢س + ٧)}{(٢س - ٣)^{٢}} \times \frac{١}{٢س - ٢}$

$= \frac{-٢٠}{(٢س - ٣)^{٣}}$

$\therefore \left(\frac{ء^{٢}ص}{ء ع^{٢}}\right)_{س=٢} = \frac{-٢٠}{(٢ \times ٢ - ٣)^{٣}} = -٢٠$

مثال ٥

إذا كانت : $ص = ا س + ب س$ أثبت أن : $\frac{ء^{٤}ص}{ء س^{٤}} = ص$

الحل

$\because ص = ا س + ب س$ $\therefore ص' = ب س - ا س$

، $ص'' = -ا س - ب س$

، $\frac{ء^{٣}ص}{ء س^{٣}} = -ب س + ا س$ ، $\frac{ء^{٤}ص}{ء س^{٤}} = ا س + ب س = ص$

مثال ٦

إذا كان : $س^{١} + ص^{١} = ١$ أثبت أن : $ص^{٣}\frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}} + ١ = ٠$

الحل

$\because س^{١} + ص^{١} = ١$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٢س + ٢ص \frac{ء ص}{ء س} = ٠$ (بالقسمة على ٢)

$\therefore س + ص \frac{ء ص}{ء س} = ٠$ (١) $\therefore \boxed{\frac{ء ص}{ء س} = \frac{-س}{ص}}$

باشتقاق (١) بالنسبة إلى س

$\therefore ١ + ص \frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}} + \frac{ء ص}{ء س} \times \frac{ء ص}{ء س} = ٠$

$\therefore ١ + ص \frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}} + \left(\frac{ء ص}{ء س}\right)^{٢} = ٠$ وبالتعويض عن $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{-س}{ص}$

$\therefore ١ + ص \frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}} + \left(\frac{-س}{ص}\right)^{٢} = ٠$ $١ + ص \frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}} + \frac{س^{٢}}{ص^{٢}} = ٠$

بالضرب × $(ص^{٢})$: $\therefore ص^{٢} + ص^{٣}\frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}} + س^{٢} = ٠$

، $\because س^{٢} + ص^{٢} = ١$ $\therefore ص^{٣}\frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}} + ١ = ٠$

مثال ٧

إذا كان : $س ص = ٥ جا ٢س + ٣ جتا ٢س$

أثبت أن : $\frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}} + \frac{٢}{س}\frac{ء ص}{ء س} + ٤ص = ٠$

الحل

$\because س ص = ٥ جا ٢س + ٣ جتا ٢س$ (١) (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore س \frac{ء ص}{ء س} + ص = ١٠ جتا ٢س - ٦ جا ٢س$ (وبالاشتقاق مرة ثانية بالنسبة إلى س)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$\therefore$ س $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ + $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{د ص}{د س}$ = −٥ $ا^٢$ ما ا س − ٣ $ا^٢$ حتا ا س

$\therefore$ س $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ + ٢ $\frac{د ص}{د س}$ = − $ا^٢$ (٥ ما ا س + ٣ حتا ا س) (وبالتعويض من (١))

$\therefore$ س $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ + ٢ $\frac{د ص}{د س}$ = − $ا^٢$ س ص

$\therefore$ س $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ + ٢ $\frac{د ص}{د س}$ + $ا^٢$ س ص = ٠ (بالقسمة على س)

$\therefore$ $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ + $\frac{٢}{س}$ $\frac{د ص}{د س}$ + $ا^٢$ ص = ٠

مثال ٨

إذا كان : س ص = ٢ أثبت أن : س^٢ $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ + ٣ س $\frac{د ص}{د س}$ + ص = ٠

الحل

$\because$ س ص = ٢

$\therefore$ ص = $\frac{٢}{س}$ = ٢ س$^{-١}$

$\therefore$ $\frac{د ص}{د س}$ = −٢ س$^{-٢}$

$\therefore$ $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ = ٤ س$^{-٣}$

$\therefore$ س^٢ $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ + ٣ س $\frac{د ص}{د س}$ + ص = س^٢ × ٤ س$^{-٣}$ + ٣ س × −٢ س$^{-٢}$ + ٢ س$^{-١}$

= ٤ س$^{-١}$ − ٦ س$^{-١}$ + ٢ س$^{-١}$ = صفر

حل آخر

$\because$ س ص = ٢

$\therefore$ س صَ + ص = ٠ (بالضرب × س)

$\therefore$ س^٢ صَ + س ص = ٠

$\therefore$ س^٢ صً + ٢ س صَ + س صَ + ص = ٠

$\therefore$ س^٢ صً + ٣ س صَ + ص = ٠

مثال ٩

إذا كانت : ص = $ا^س$ حتا ا س استكشف نمط الأشتقاق المتتالى ثم أوجد : ص$^{(٣٧)}$ ، ص$^{(٢٠٢٤)}$

الحل

$\because$ ص = $ا^س$ حتا ا س $\therefore$ صَ = ا $ا^س$ حتا ا س = ا $ا^س$ ما $\left(ا س + \frac{\pi}{٢}\right)$

صَ = − $ا^٢$ ما ا س = $ا^٢$ ما (ا س + π)

ص$^{(٢)}$ = − $ا^٢$ حتا ا س = $ا^٢$ ما $\left(ا س + \frac{٢\pi}{٢}\right)$

ص$^{(٤)}$ = $ا^٤$ ما ا س = $ا^٤$ ما (ا س + ٢ π)

$\therefore$ ص$^{(ن)}$ = $ا^ن$ ما $\left(ا س + \frac{ن \pi}{٢}\right)$

$\therefore$ ص$^{(٣٧)}$ = $ا^{٣٧}$ ما $\left(ا س + \frac{٣٧ \pi}{٢}\right)$ = $ا^{٣٧}$ ما $\left(ا س + \frac{\pi}{٢}\right)$ = $ا^{٣٧}$ حتا ا س

، ص$^{(٢٠٢٤)}$ = $ا^{٢٠٢٤}$ ما $\left(ا س + \frac{٢٠٢٤ \pi}{٢}\right)$ = $ا^{٢٠٢٤}$ ما (ا س)

ومن المثال السابق نلاحظ أن :

① إذا كان : ص = ما ا س فإن : ص$^{(ن)}$ = $ا^ن$ ما $\left(ا س + \frac{ن \pi}{٢}\right)$

② إذا كان : ص = حتا ا س فإن : ص$^{(ن)}$ = $ا^ن$ حتا $\left(ا س + \frac{ن \pi}{٢}\right)$

③ إذا كان : ص = ما ا س أ، ص = حتا ا س

فإن : ص$^{(ن)}$ = $ا^ن$ ص حيث ن عدد يقبل القسمة على ٤

ملاحظة

إذا كانت ص = س^ن فإن :

① $\frac{د^م ص}{د س^م}$ = ن$_م$ س$^{ن-م}$ لكل ن ، م ∈ ص$^+$ ، ن ≥ م

② $\frac{د^م ص}{د س^م}$ = صفر لكل ن ، م ∈ ص$^+$ ، ن < م

فمثلًا : إذا كانت ص = س^٦ فإن :

* $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ = ٦ل$_٢$ س$^{٦-٢}$ = ٣٠ س^٤

* $\frac{د^٦ ص}{د س^٦}$ = ٦ل$_٦$ س$^{٦-٦}$ = ٦! س^{صفر} = ٦!

* $\frac{د^٨ ص}{د س^٨}$ = صفر

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمارين 3

على المشتقات العليا للدالة

اختبار تفاعلي

• فهم • تطبيق • مستويات عليا — من أسئلة الكتاب المدرسي

١ أوجد ص لكل من الدوال الآتية :

(١) ص = س^{٣} − ٥ س^{٢} + ٦ س − ٤

(٢) ص = (٣ س^{٢} − ٤) (س + ٣)

(٣) ص = س^{٢} (س + ٢)^{٢}

(٤) ص = $\frac{س + ٢}{س - ٢}$

(٥) ص = س + $\sqrt{س + ٥}$

(٦) ص = $\sqrt[٣]{(س - ٢)^{٢}}$

(٧) ص = ما (٥ س + ١)

(٨) ص = ٢ س^{٢} + ما ٣ س

(٩) ص = س مـا ٢ س

(١٠) ص = ٩ ظا $\frac{س}{٣}$

(١١) ص = ٢ ما^{٢} س − ٥ مـا^{٢} س

(١٢) ص = س ما^{٢} س

٢ أوجد $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ لكل من الدوال الآتية عند قيم س المبينة أمام كل منها :

(١) ص = ٢ ما ٢ س — عند س = $\frac{\pi}{٤}$

(٢) ص = ما س − مـا س — عند س = $\frac{\pi}{٤}$

(٣) ص = ٢ س ما س مـا س — عند س = π

(٤) ص = س مـا س − ما س — عند س = $\frac{\pi}{٢}$

(٥) ص = $\frac{٢ س - ١}{س + ٣}$ — عند س = −٢

٣ أوجد المشتقة الثالثة لكل مما يأتي :

(١) ص = س^{٥} − ٤ س^{٣} + ٣

(٢) ص = ما س

(٣) ص = مـا (π − ٣ س)

(٤) ص = (٢ س + ٧)^{٤} + ما ٢ س

(٥) د (س) = $\frac{٢ س}{س + ١}$

(٦) ص = $\frac{س + ١}{س - ١}$

(٧) ص = ٢ س + $\frac{٣}{س}$

(٨) ص = $\sqrt{٢ س - ٥}$

(٩) ص = ما س مـا س

(١٠) ص = ٢ س^{٣} + س مـا ٢ س

٤ إذا كانت ص = س^{٥} − ١٠ س^{٤} + ٦٠ س^{٢} + ١٢٠

أوجد قيمة : $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ عندما $\frac{ء^{٤} ص}{ء س^{٤}}$ = ٠ .

٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : د (س) = س^{٣} − ٥ س^{٢} + ٩ س − ٣ فإن : د$'$ (٠) = ...

(أ) −٢٠ (ب) −١٠ (جـ) ٥ (د) ١٠

(٢) (دورتان ٢٠١٤) إذا كان : د (س) = ما ٢ س فإن : د$'$ $\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ = ...

(أ) صفر (ب) −٢ (جـ) −٤ (د) −٦

(٣) إذا كان : د (س) = أ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٤ س + ١ وكان د$'$ (١) = ٦

فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٦

(٤) إذا كان : ص = س^{٩} − ١٤ س^{٧} − س^{٢} + ٣ فإن : $\frac{ء^{١٠} ص}{ء س^{١٠}}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٩ (جـ) ١٨ (د) ٧٢

(٥) إذا كان : ص = (٥ س − ٤) (س + ٣) ، ع = ٣ س^{٢} − ٤ س + ١٧

فإن : $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} + \frac{ء^{٢} ع}{ء س^{٢}}$ = ...

(أ) ١٢ (ب) ١٤ (جـ) ١٦ (د) ١٨

(٦) $\frac{ء^{٢}}{ء س^{٢}}$ (مـا^{٢} $\frac{س}{٢}$ − ما^{٢} $\frac{س}{٢}$) = ...

(أ) − مـا س (ب) مـا س

(جـ) − ما س (د) مـا س − ما س

(٧) (السودان ٢٠١٤) إذا كانت : ص = − ما س فإن : $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ + ص = ...

(أ) −٤ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) صفر

(٨) إذا كان : (س + ص)^{٥} = ٣ فإن : $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} + \frac{ء ص}{ء س}$ = ...

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢٠ (س + ص)^{٤}

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٩) إذا كان : د (س) = $\frac{\text{س}}{\text{س} - ٢}$ فإن : د$'$ (٣) = ...

(أ) ١٢ (ب) −٨ (جـ) −١٢ (د) −١٦

(١٠) $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ [ص $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$] = ص $\frac{\text{ء}^٢ \text{ص}}{\text{ء س}^٢}$ + ...

(أ) $\frac{\text{ء}^٢ \text{ص}}{\text{ء س}^٢}$ (ب) $\left(\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right)^٢$ (جـ) $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ (د) ص

(١١) إذا كانت : د دالة كثيرة حدود من الدرجة الخامسة فإن المشتقة الخامسة للدالة د تساوى

(أ) صفر (ب) ثابت غير صفرى

(جـ) س (د) ٥ س

(١٢) المشتقة الثالثة لدالة تربيعية هى دالة

(أ) خطية. (ب) تربيعية. (جـ) ثابتة. (د) صفرية.

(١٣) المشتقة الثانية لدالة تكعيبية هى دالة

(أ) خطية. (ب) تربيعية. (جـ) ثابتة. (د) صفرية.

(١٤) إذا كانت : ف = ١ حـا (ل ن + م) هى معادلة حركة لجسم ما حيث ١ ، ل ، م ثوابت

فإن : $\frac{\text{ء}^٢ \text{ف}}{\text{ء ن}^٢}$ = ...

(أ) ل ف (ب) ل^٢ ف (جـ) − ل ف (د) − ل^٢ ف

٦ إذا كانت : ص = ١ س^٣ + ب س^٢ + حـ س + ء وكانت ارتباطات س ، ص ، صَ ، صً موضحة بالجدول التالى أوجد قيم ١ ، ب ، حـ ، ء الحقيقية ثم أكمل الجدول

س	ص	صَ	صً
١	٨		٢٨
٢		٧٥	٣٤

٧ (دور أول ٢٠٠١) إذا كان : س^٢ + ص^٢ = ١٦ فأثبت أن : ص $\frac{\text{ء}^٢ \text{ص}}{\text{ء س}^٢}$ + $\left(\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right)^٢$ + ١ = .

٨ (دور ثان ٢٠٠٦) إذا كانت : ص^٢ + ١ س^٣ − ب س = حـ حيث : ١ ، ب ، حـ ثوابت.

أثبت أن : ص $\frac{\text{ء}^٢ \text{ص}}{\text{ء س}^٢}$ + $\left(\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right)^٢$ + ٣ ١ س = صفر

٩ إذا كانت : ص^٢ = س^٢ (١ − س)

فأثبت أن : ص $\frac{\text{ء}^٢ \text{ص}}{\text{ء س}^٢}$ + $\left(\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right)^٢$ + ٣ س = ١

١٠ إذا كانت : ٤ ص^٣ = ٣ س^٢ أثبت أن : ٢ ص^٢ $\frac{\text{ء}^٢ \text{ص}}{\text{ء س}^٢}$ + ٤ ص $\left(\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right)^٢$ = ١

١١ (دور ثان ٢٠٠٢) إذا كانت : س^٣ + ص^٣ = ١ فأثبت أن : ص^٢ صً + ٢ ص ص$'^٢$ + ٢ س = .

١٢ (دور ثان ٢٠١٢) إذا كان : س^٣ ص^٣ = ١ فأثبت أن : س^٢ $\frac{\text{ء}^٢ \text{ص}}{\text{ء س}^٢}$ = ٢ ص

١٣ (دور ثان ٢٠١٤) إذا كان : س^٢ ص = ٢ س + ٥

فأثبت أن : س^٢ $\frac{\text{ء}^٢ \text{ص}}{\text{ء س}^٢}$ + ٤ س $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ + ٢ ص = صفر

١٤ (دور ثان ٢٠١٠) إذا كان : ص^٢ = س فأثبت أن : س $\frac{\text{ء}^٢ \text{ص}}{\text{ء س}^٢}$ + ص $\left(\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right)^٢$ = .

١٥ (دور أول ٢٠٠٣) إذا كان : ٢ س ص + ٣ = ٥ س^٢

فأثبت أن : س $\left(\frac{\text{ء}^٢ \text{ص}}{\text{ء س}^٢}\right)$ + ٢ $\left(\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right)$ = ٥

١٦ (دور أول ٢٠٠٥) إذا كان : ص^٢ = ١ − $\frac{١}{\text{س}^٢}$

فأثبت أن : ص $\frac{\text{ء}^٢ \text{ص}}{\text{ء س}^٢}$ + $\left(\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right)^٢$ + $\frac{٣}{\text{س}^٤}$ = .

١٧ إذا كان : ٣ ص^٤ = ٤ س^٣ فأثبت أن : ص $\frac{\text{ء}^٢ \text{ص}}{\text{ء س}^٢}$ + ٣ $\left(\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right)^٢$ = $\frac{٢ \text{ س}}{\text{ص}^٢}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

١٨ إذا كانت : $ص = \frac{١}{س}$ ، $س \neq ٠$

اثبت أن : $س^{٢} \frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} + ٣ س \frac{ء ص}{ء س} + ص =$ صفر

١٩ إذا كان $(١ + س) ص = س^{٢}$ فأثبت أن : $(١ + س) \frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} + ٢ \frac{ء ص}{ء س} = ٢$

٢٠ إذا كانت : $ص^{٢} + س^{٢} ص^{٢} = ٨$

أثبت أن : $(س^{٢} + ١) \frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} + ٣ س \frac{ء ص}{ء س} + ص = ٠$

٢١ (دورثان ٢٠٠٨) إذا كان : $٤ س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$ فأثبت أن : $ص^{٣} \times \frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} + ١٠٠ = ٠$

٢٢ (دورأول ٢٠١٢) إذا كانت : $س + ص = س ص$ فأثبت أن : $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} = ٢ \left(\frac{ص}{س}\right)^{٣}$

٢٣ إذا كانت : $ص = \sqrt{٢ س + ٥}$ أثبت أن : $(٢ س + ٥) \frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} + ٣ \frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} = ٠$

٢٤ إذا كان : $ص = \frac{س}{\sqrt{س^{٢} + ١}}$ أثبت أن : $(س^{٢} + ١) ص'' + ٣ س ص' = ٠$

٢٥ إذا كانت : $ص \sqrt{١ + س^{٢}} = ١$

فأثبت أن : $(١ + س^{٢}) \frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} + ٣ س \frac{ء ص}{ء س} + ص = ٠$

٢٦ إذا كانت : $ص^{٢} = \sqrt{٤ س + ١}$ ، $س > -\frac{١}{٤}$

أثبت أن : $٣ \left(\frac{ء ص}{ء س}\right)^{٢} + ص \frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} = ٠$

٢٧ إذا كان : $ص^{٣} = ٣ س^{٤} - ٣ س^{٢} + ٥$

أثبت أن : $ص^{٢} \frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} + ٢ ص \left(\frac{ء ص}{ء س}\right)^{٢} + ٢ = ١٢ س^{٢}$

٢٨ (دورثان ٢٠٠٥) إذا كان : $ص =$ جتا $س$ فأثبت أن : $\left(\frac{ء ص}{ء س}\right)^{٢} - ص \frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} = ١$

٢٩ (دورأول ٢٠١٠) إذا كانت : $ص = ٢$ جتا $(٣ س + ١)$ فأثبت أن : $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} + ٩ ص = ٠$

٣٠ إذا كان : $ص =$ ظا $س$ أثبت أن : $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} = ٢ ص (١ + ص^{٢})$

٣١ (دورأول ٢٠١٩) إذا كانت : $ص = \frac{١٠ -$ جتا $س}{س}$

أثبت أن : $س \frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} + ٢ \frac{ء ص}{ء س} =$ جتا $س$

٣٢ (دورثان ٢٠١٩) إذا كان : $ص =$ ﻫا $س$

أثبت أن : $ص \frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} + \left(\frac{ء ص}{ء س}\right)^{٢} = ص^{٢} (٣ ص^{٢} - ٢)$

٣٣ إذا كان : $ص =$ ﻫا ٢ $س$ أثبت أن :

① $٤ \left(\frac{ء ص}{ء س}\right)^{٢} + \left(\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}\right)^{٢} = ١٦$ ② $\frac{ء^{٣} ص}{ء س^{٣}} + ٤ \frac{ء ص}{ء س} = ٠$

٣٤ إذا كان : $ص =$ ﻫا ٣ $س +$ جتا ٣ $س$ أثبت أن :

① $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} + ٩ ص = ٠$ ② $\frac{ء^{٤} ص}{ء س^{٤}} = ٨١ ص$

٣٥ (دورثان ٢٠٠٨) إذا كان : $ص = س$ جا $س$ أثبت أن :

① $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} + ص = ٢$ جتا $س$ ② $س \frac{ء^{٣} ص}{ء س^{٣}} + س \frac{ء ص}{ء س} + ٢ ص = ٠$

③ $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ دالة زوجية.

٣٦ إذا كان : $ص = \frac{ع - ١}{ع}$ ، $ع = س^{٢} - ١$ أوجد : $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ عند $س = ٠$ ٠,٢٥

٣٧ إذا كانت : $ص = \sqrt{ع + ١}$ ، $ع = س^{٢} - ١٠$ أوجد : $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ عند $س = ٥$ $\frac{٩}{٦٤}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٣٨ إذا كانت : ص = ط ع ، ع = ١٠ س + ٥ أوجد : $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$

٣٩ إذا كانت : ص = س^٢ + ٢ ، ع = س^٢ + ٣ فأوجد : $\frac{د^٢ ع}{د ص^٢}$ عند س = $\frac{١}{٣}$ ، ١٨٠

٤٠ إذا كانت : س = ٣ ن^٢ − ١ ، ص = ن^٣ + ٢ أوجد : $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ عند ن = ٤ ، $\frac{١}{٢٤}$

٤١ إذا كانت : س = ٢ ن^٢ + ٣ ، ص = ن^٤ أوجد : $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ عند ن = ١ ، $\frac{١}{٢}$

٤٢ إذا كانت : س = ع^٢ − ٢ ع ، ص = ع^٢

أوجد : $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ ، $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ عند ع = ٢ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{٤}$

٤٣ إذا كان : $\frac{د ع}{د س}$ = ١ + ٢ س ، $\frac{د ص}{د س}$ = س^٢ + ٣

فأوجد : $\frac{د^٢ ع}{د ص^٢}$ عند س = ١ ، $\frac{١}{٢٢}$

٤٤ إذا كانت : ص = $\frac{٢ س}{\sqrt{١ + س^٢}}$ ، ع = $\frac{\sqrt{١ + س^٢}}{س}$

أثبت أن : $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{-٢}{ع^٢} \cdot \frac{د ع}{د س}$

٤٥ إذا كانت : ص ، ع ، ل دوال قابلة للاشتقاق

حيث ص = $\sqrt{ع}$ ، ع = ٣ − ٢ ل^٢ ، ل = ٤ س

فأثبت أن : ص . $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ + $\left(\frac{د ص}{د س}\right)^٢$ + ٣٢ = ٠

٤٦ إذا كان : س = وَا ع ، $\sqrt{ص}$ = ط ع أثبت أن : $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ = ٢

٤٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : د (ن) = س^٤ حيث س ثابت فإن : دً (ن) = ...

(أ) ١٢ س^٢ (ب) ٤ س^٣ (جـ) صفر (د) ١٢ ن^٢

(٢) إذا كان : ص = س^٢ + ٢ س وكان : $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ − ص − ٣ = صفر

فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) −١ (د) −٢

(٣) إذا كان : د (س) = (س − ٣)$^{-١}$ فإن : دً (٣) = ...

(أ) صفر (ب) −٦ (جـ) غير معرفة. (د) ٢

(٤) إذا كان : ص = س^٧ فإن : $\frac{د^٧ ص}{د س^٧}$ = ...

(أ) ٧ س^٦ (ب) ٤٢ س^٥ (جـ) ٤٩ (د) $\sqrt{٧}$

(٥) إذا كانت : د (س) = ظا س فإن : دً $\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ تساوى

(أ) $-\frac{٤}{٩}$ (ب) $\frac{٤}{٩}$ (جـ) ٤ (د) $\frac{٩}{٢}$

(٦) إذا كان : د (س) = ما ٢ س مَا ٢ س فإن : دً $\left(\frac{\pi}{٣}\right)$ يساوى

(أ) −٤ (ب) صفر (جـ) ٤ $\sqrt{٣}$ (د) ٨

(٧) $\frac{د}{د س}\left(\frac{د ص}{د ع}\right)$ = $\frac{د^٢ ص}{د ع^٢}$ ×

(أ) $\frac{د ع}{د س}$ (ب) $\frac{د ص}{د س}$ (جـ) $\frac{د س}{د ع}$ (د) $\frac{د ص}{د ع}$

(٨) إذا كان : س = (١ − ص) (١ + ص) (١ + ص^٢) (١ + ص^٤)

فإن : $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ = ...

(أ) $-\frac{١}{٨}$ ص$^{-٧}$ (ب) −٥٦ ص^٦ (جـ) $\frac{-٧}{٦٤}$ ص$^{-١٥}$ (د) $\frac{٧}{٨}$ ص^٦

(٩) إذا كانت : س = ما^٣ θ ، ص = مَا^٣ θ

فإن : $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ = ... عند θ = $\frac{\pi}{٤}$

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٨}{٣}$ (جـ) $\frac{٤\sqrt{٣}}{٣}$ (د) $\frac{٤\sqrt{٣}}{٣}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(١٠) إذا كان : د (س) = (س − ٣) (س − ٤) (س − ك) وكان : دَ (٣) = ٢
حيث ك ∈ ح فإن : ك = ...
(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(١١) $\frac{ء^{٢}}{ء س^{٢}}$ (ما^٤ س + ما^٤ س) = ...
(أ) صفر (ب) −٢ ما ٢ س
(جـ) −٤ ما ٤ س (د) ١

(١٢) $\frac{ء^{٢}}{ء س^{٢}}$ (ما^٢ س) = ...
(أ) −٤ ما س (ب) −٤ ما ٢ س
(جـ) ٢ ما ٢ س (د) − ما ٢ س

(١٣) إذا كان : س = $\frac{ن}{ن+١}$ ، ص = $\frac{ن+١}{ن}$ فإن : $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ = $\frac{.....}{س^{٢}}$
(أ) ٢ س (ب) ٢ ص (جـ) ٢ س^-٣ (د) − س^-٢

(١٤) إذا كانت الدالة د : د (س) = { أ س^٢ + ب س + حـ ، س < ٠ ؛ ٢ س + ٥ ، س ≤ ٠ }
قابلة للاشتقاق مرتين عند س = ٠ فإن : أ + ب − حـ = ...
(أ) ٧ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) −٣

(١٥) إذا كانت : د (س) هى قاعدة دالة كثيرة حدود
فإن : نهـــا_{هـ → ٠} $\frac{دَ (س + هـ) - دَ (س)}{هـ}$ = ...
(أ) دَ (س) (ب) دً (س) (جـ) دَ (هـ) (د) دً (هـ)

(١٦) إذا كانت : د (س) = ما ٣ س ما^٣ س − ما ٣ س ما^٣ س
فإن : دً ($\frac{\pi}{٤}$) = ...
(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

(١٧) إذا كان : ص = س^ن حيث : س ≠ ٠ ، ن > صفر
فإن : أقل قيمة لـ ن تجعل $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ ≠ صفر هى
(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٨) إذا كانت ص = د (س) تحقق العلاقة : $\frac{ء^{٤} ص}{ء س^{٤}}$ = ص فإن : ص = ...
(أ) (س + ١)^٤ (ب) ما س (جـ) طا س (د) مقدار ثابت.

(١٩) إذا كانت : د (س + ١) = س^٢ + ٢ س + ١ فإن : دً (٣) = ...
(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢٠) إذا كانت : ٠ < س < $\frac{\pi}{٢}$ وكان : د (ما س) = ما^٢ س
فإن : دً ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$) = ...
(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) π (د) $\frac{\pi}{٢}$

(٢١) إذا كانت : $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\sqrt{أ ص}$ ، $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ = ٣ فإن : قيمة الثابت أ = ...
(أ) ٦ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢٢) إذا كان ص = $\frac{س - ٣}{س + ٤}$ وكان : (ص − ١) صً = لـ (ص)^٢
فإن : لـ = ...
(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢٣) إذا كان : ٣ د (س) + د (٤ − س) = ٦ س^٢ + ١ فإن : دَ (٢) + دً (٢) = ...
(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ١٥

(٢٤) إذا كان : ص = طا س ، ع = طا^٣ س فإن : $\frac{ء^{٢} ص}{ء ع^{٢}}$ = ...
(أ) ٢ طا^٢ س (ب) −٢ طا^٣ س (جـ) ٢ طا^٣ س (د) −٢ طا^٣ س

(٢٥) إذا كانت د ، ر دالتين كثيرتى حدود وكان : دً (س) = − د (س)
، دَ (س) = ر (س) فإن : $\frac{ء}{ء س}$ [(د (س))^٢ + (ر (س))^٢] = ...
(أ) دَ (س) + رَ (س) (ب) ١
(جـ) − دً (س) (د) صفر

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٢٦) إذا كانت : د (س) = ٣ س^{٤} − ٢ س^{٢} + ١ فإن :

(أ) د$''$ (س) = ٣٦ س^{٢} − ٤ (ب) د$^{(١)}$ (س) = صفر

(د) د$^{(ن)}$ (س) = صفر لكل ن ≥ ٥ (جـ) د$''$ (صفر) = −٤

(٢٧) إذا كان : د (س) = س$^{\frac{٤}{٣}}$ فإن :

(أ) د$^{(٢)}$ (صفر) غير معرفة لكل ن ≥ ٢

(ب) د$'$ (صفر) = $\frac{٤}{٣}$

(جـ) د$''$ (صفر) = $\frac{٤}{٩}$

(د) د$^{(٣)}$ (١) = $\frac{٨}{٢٧}$

(٢٨) إذا كانت : د (س) = ٢ ما $\frac{س}{٢}$ مـا $\frac{س}{٢}$ فإن المشتقة رقم ١٠٠٠ لهذه الدالة تساوى

(أ) ما س (ب) − ما س (جـ) − مـا س (د) ما^{١٠٠} س

(٢٩) إذا كانت : د (س) = $\frac{س^{٢٥}}{|٢٥}$ فإن : د$^{(٢٥)}$ (س) = ...

(أ) $\frac{|٢٥}{|٢٥}$ (ب) ٢٥ (جـ) ١ (د) صفر

(٣٠) إذا كان : ص = س$^{ن+١}$ + ن س$^{ن-١}$ + ١ فإن : $\frac{ء^{ن}ص}{ء س^{ن}}$ = ...

(أ) $\frac{|ن+١}{|ن+١}$ (ب) س $\frac{|ن+١}{|ن}$ (جـ) س $\frac{|ن}{|ن}$ (د) س$^{-١}$ $\frac{|ن}{|ن}$

(٣١) إذا كان : ص = س^{ن} حيث ن عدد طبيعى وكان $\frac{ء^{٤}ص}{ء س^{٤}}$ = ٣٦٠ س$^{ن-٤}$

فإن : قيمة ن = ...

(أ) ٧ (ب) ١٣ (جـ) ٥ (د) ٦

(٣٢) إذا كانت : د (س) = ٢٠ س$^{ن-١}$ وكانت د$''$ (س) = حـ حيث حـ ∈ ح ، ن ∈ ص$^{+}$

فإن : ن + حـ = ...

(أ) ١٠٤ (ب) ١٢٣ (جـ) ١٢٤ (د) ١٢٥

(٣٣) إذا كان : ص = ما ٥ س وكان : $\frac{ء^{٢٠}ص}{ء س^{٢٠}}$ = أ ما ٥ س فإن : أ = ...

(أ) ٢٠ (ب) ٥^{٢٠} (جـ) −٥^{٢٠} (د) $\frac{|٢٠}{|٢٠}$

(٣٤) إذا كانت (س ، ص) أى نقطة على دائرة الوحدة فإن :

(أ) ص صـ − ٢ (ص)^{٢} + ١ = ٠ (ب) ص صـ + (ص)^{٢} + ١ = ٠

(جـ) ص صـ + (ص)^{٢} − ١ = ٠ (د) ص صـ + ٢ (ص)^{٢} + ١ = ٠

(٣٥) (دور أول ٢٠١٨) إذا كانت : د$'$ (س) = س د (س) ، د (٣) = −٥

فإن : د$''$ (٣) = ...

(أ) −٥٠ (ب) −٤٠ (جـ) ١٥ (د) ٢٧

(٣٦) إذا كان : $\frac{ء ع}{ء θ}$ = مـا ٢ θ ، $\frac{ء ص}{ء θ}$ = ما ٢ θ

فإن : $\frac{ء^{٢} ص}{ء ع^{٢}}$ = ... عند س = $\frac{π}{٨}$

(أ) ٤ $\sqrt{٢}$ (ب) ٤ (جـ) ٢ $\sqrt{٢}$ (د) ٢

(٣٧) إذا كانت : د ($\frac{١}{٢}$ س) = | س |^{٣} فإن : د$''$ (−١) = ...

(أ) −٤٨ (ب) ٤٨ (جـ) ١٤ (د) ١

(٣٨) إذا كانت : ص دالة فى س فإن : $\frac{ء}{ء س}$ [ص$^{(٤)}$] = ...

(أ) ٤ ص$^{(٣)}$ (ب) ٤ ص$^{(٣)}$ $\frac{ء ص}{ء س}$

(جـ) ص$^{(٥)}$ (د) $\frac{١}{٥}$ ص$^{(٥)}$

(٣٩) إذا كانت : ص = س^{٢٠٢١} فإن : = صفر

(أ) ص$^{(٢٠١٩)}$ (ب) ص$^{(٢٠٢٠)}$ (جـ) ص$^{(٢٠٢١)}$ (د) ص$^{(٢٠٢٢)}$

(٤٠) إذا كانت : ص = س^{٢٠٢١} فإن : = $\frac{|٢٠٢١}{|٢٠٢١}$

(أ) ص$^{(٢٠١٩)}$ (ب) ص$^{(٢٠٢٠)}$ (جـ) ص$^{(٢٠٢١)}$ (د) ص$^{(٢٠٢٢)}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٤١ إذا كانت : د (س) ، ر (س) دالتين قابلتين للاشتقاق عند س = ٢

وكان ق (س) = د (س) . ر (س) حيث : د (٢) = ٢ دَ (٢) = ٣ دَ (٢) = ١٢

، ر (٢) = ٣ رَ (٢) = ٤ رَ (٢) = ٦ فإن : قَ (٢) = ...

(أ) ٦٦ (ب) ١٤٤ (جـ) صفر (د) ٦٠

٤٢ إذا كان : س^{٢} + ص^{٢} = ن + $\frac{١}{ن}$ ، س^{٤} + ص^{٤} = ن^{٢} + $\frac{١}{ن^{٢}}$

حيث س ص > ٠ فإن : $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{س^{٣}}$ (ب) $\frac{٢}{س^{٣}}$ (جـ) $\frac{٢\sqrt{٢}}{س^{٣}}$ (د) $\frac{٢\sqrt{٢}}{س^{٤}}$

٤٣ مكعب طول حرفه = ل وحدة طول وحجمه = ح وحدة مكعبه

ومساحته الكلية = م وحدة مربعة فإن : $\frac{ء^{٢} ح}{ء م^{٢}}$ = ... عندما ل = $\frac{١}{٤}$

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{١٢}$ (جـ) $\frac{١}{١٦}$ (د) $\frac{١}{٤٨}$

٤٨ (دورأول ٢٠٠٨) إذا كان : س ص = ما س مَا س

فأثبت أن : س $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ + ٢ $\frac{ء ص}{ء س}$ + ٤ س ص = صفر

٤٩ (دورأول ٢٠١٣) ، (دورثان ٢٠١٨) إذا كان : ما س = س ص

فأثبت أن : س^{٢} (ص + صَ) + ٢ مَا س = ٢ ص

٥٠ إذا كان : ص = س ظا س فأثبت أن : $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ = ٢ (١ + ص) ظا^{٢} س

٥١ إذا كانت : س ص = ما ٢ س أثبت أن : س $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ + ٢ $\frac{ء ص}{ء س}$ + ٢^{٢} س ص = .

٥٢ إذا كانت : ص = ٢ مَا س^{٢} + ب ما س^{٢}

أثبت أن : س $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ − $\frac{ء ص}{ء س}$ + ٤ س^{٣} ص = .

٥٣ (دورأول ٢٠٠٩) إذا كان : س ص = ٢ (حيث ٢ عدد حقيقى موجب)

، $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ × $\frac{ء^{٢} س}{ء ص^{٢}}$ < $\frac{ء ص}{ء س}$ × $\frac{ء س}{ء ص}$ فأوجد الفترة التى ينتمى إليها ٢ «٢ ∈]٠ ، ٤[»

٥٤ إذا كان : ص = ٢ س^{٣} + ب س^{٢} وكان : $\frac{ء^{٣} ص}{ء س^{٣}}$ = ١٢ ، ($\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$)$_{س = ١}$ = ٦

فأوجد : ٢ ، ب «٢ ، -٣»

٥٥ إذا كان : د (س) كثيرة حدود وكان :

د (س) + دَ (س) + دً (س) = س^{٣} + ٧ س^{٢} + ٩ س − ٢ أوجد : د (س)

٥٦ إذا كان : ص = ٢ س^{ن} + $\frac{ب}{س^{ن-١}}$ أثبت أن : س^{٢} $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ = ن (ن − ١) ص

٥٧ إذا كان : ص = ٢ ما س + ب مَا س فأثبت أن : $\frac{ء ص}{ء س}$ + $\frac{ء^{٣} ص}{ء س^{٣}}$ = $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ + $\frac{ء^{٤} ص}{ء س^{٤}}$

٥٨ إذا كانت : ص = د (ع) ، ع = ر (س)

أثبت أن : $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ = دً (ع) [رَ (س)]^{٢} + رً (س) دَ (ع)

٥٩ إذا كان : ص = $\frac{س - ١}{س + ١}$ أوجد : $\frac{ء^{٣} ص}{ء س^{٣}}$ ، $\frac{ء^{٤} ص}{ء س^{٤}}$ ثم استنتج : $\frac{ء^{ن} ص}{ء س^{ن}}$

٦٠ إذا كانت : ص = مَا ٢ س استكشف نمط الاشتقاق المتتالى ثم أوجد :

(١) ص$^{(١٥)}$ (٢) ص$^{(٢٠٢٠)}$

٦١ إذا كانت : ص = ما ٢ س استكشف نمط الاشتقاق المتتالى ثم أوجد :

(١) ص$^{(٢٥)}$ (٢) ص$^{(٢٠١٦)}$

٦٢ (دورأول ٢٠١٨) إذا كان : ما ص + مَا ٢ س = .

أثبت أن : $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ − ($\frac{ء ص}{ء س}$)^{٢} ظا ص = ٤ مَا ٢ س ظا ص

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٦٣ إذا كان : ما ٢ س − ما ٣ ص = ٠

أثبت أن : ٣ ظا ٣ ص $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ + ٩ $\left(\frac{د ص}{د س}\right)^{٢}$ − ٤ = ٠

٦٤ إذا كانت : ص = ظا^{٢} س فأثبت أن : $\frac{١}{٢}$ $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ = (١ + ص) (١ + ٣ ص)

مسائل تقيس مهارات التفكير

٦٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : ص = ١ + $\frac{س}{|١}$ + $\frac{س^{٢}}{|٢}$ + $\frac{س^{٣}}{|٣}$ + ... إلى ∞

فإن : ٥ ص$''$ − ٢ ص$'$ − ٣ ص = ...

(أ) صفر (ب) ٢ ص (جـ) ٦ ص + ٣ (د) ٢ ص − ١

(٢) إذا كانت : ص = د (س) وكان د (س + هـ) − د (س) = ٥ س^{٢} هـ + هـ^{٢}

فإن : $\frac{د^{٣} ص}{د س^{٣}}$ = ...

(أ) ١٦ (ب) ١٠ (جـ) ١٤ (د) ١٨

(٣) إذا كانت : د ، ر دالتين حيث : د (س) = س^{٢} ، ر (٢) = ٣

، ر$'$ (٢) = −٢ ، ر$''$ (٢) = ٥ فإن : (د ٥ ر)$''$ (٢) = ...

(أ) ١٦ (ب) ٢٤ (جـ) ٣٢ (د) ٣٨

(٤) إذا كانت : نهـا$_{هـ \to ٠}$ $\frac{د' (١) − د' (١ + هـ)}{٢ هـ}$ = ٢١ حيث د (س) = ٢ س^{٤} − أ س^{٢}

فإن : أ = ...

(أ) ١١ (ب) ١٢ (جـ) ١٣ (د) ١٤

(٥) إذا كان : ظا^{٢} $\sqrt{ص + س}$ + ظتا^{٢} $\sqrt{ص − س}$ = ك فإن : $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ = ...

(أ) ك^{٢} (ب) $\frac{١}{٢}$ ك^{٢} (جـ) $\frac{٢}{ك^{٢}}$ (د) $\frac{١}{ك^{٢}}$

٦ إذا كان : ص = ما ٢ س وكان : $\frac{د^{ن} ص}{د س^{ن}}$ = ٢^{ن} ما ٢ س فإن :

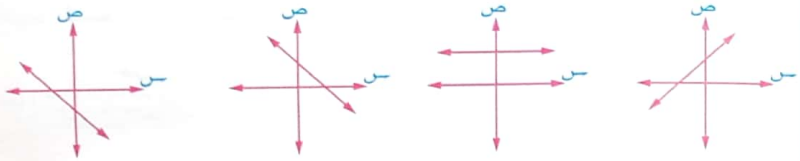
(أ) ن عدد زوجي. (ب) ن عدد فردي.

(جـ) ن تقبل القسمة على ٣ (د) ن تقبل القسمة على ٤

٧ إذا كانت : ص = أ س^{ن} − ب س$^{ن−١}$ + ٥ كثيرة حدود ، أ ، ب ∈ ح$^{+}$

فإن : $\frac{د^{ن} ص}{د س^{ن}}$ يمكن أن يمثلها الشكل

(أ) (ب) (جـ) (د)



٦٦ إذا كانت : ص = (س + $\sqrt{١ + س^{٢}}$)^{٥}

أثبت أن : (١ + س^{٢}) $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ + س $\frac{د ص}{د س}$ − ٢٥ ص = ٠

٦٧ إذا كانت : س = ما ص حيث ص زاوية حادة أثبت أن : $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ = $\frac{س}{(١ − س^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}$

٦٨ (دور أول ٢٠١٦) إذا كانت : ص = $\frac{أ س + ب}{حـ س + ء}$ حيث أ ، ب ، حـ ، ء ثوابت

أثبت أن : ٢ $\left(\frac{د ص}{د س}\right)\left(\frac{د^{٣} ص}{د س^{٣}}\right)$ = ٣ $\left(\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}\right)^{٢}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الدرس 4 معادلتا المماس والعمودى لمنحنى

ميل الخط المستقيم

① ميل الخط المستقيم الذى معادلته : أ س + ب ص + حـ = ٠ هو $\frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-أ}{ب}$

فمثلًا : ميل الخط المستقيم الذى معادلته : ٥ س + ٢ ص + ٧ = ٠ هو $\frac{-٥}{٢}$

② ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين : (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢)

يساوى $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

فمثلًا : ميل المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، -٣) ، (٤ ، ١) هو $\frac{١ + ٣}{٤ - ٢} = ٢$

③ ميل المستقيم = ظا هـ

حيث (هـ) قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

فمثلًا : ميل المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

هو ظا ١٣٥° = -١

④ إذا كان : $\overrightarrow{ى}$ = (أ ، ب) متجه اتجاه لمستقيم فإن ميل هذا المستقيم = $\frac{ب}{أ}$

فمثلًا : إذا كان (٢ ، -٣) متجه اتجاه لمستقيم فإن ميل هذا المستقيم = $\frac{-٣}{٢}$

⑤ ميل المستقيم يكون موجبًا إذا كان يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

⑥ ميل المستقيم يكون سالبًا إذا كان يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

⑦ ميل محور السينات = ميل أى مستقيم أفقى (موازى لمحور السينات) = صفر

⑧ ميل محور الصادات = ميل أى مستقيم رأسى (موازى لمحور الصادات) = $\frac{١}{\text{صفر}}$ ، غير معرف

العلاقة بين المستقيمين المتوازيين والمتعامدين

إذا كان : ل١ ، ل٢ مستقيمين ميلاهما م١ ، م٢ على الترتيب فإن :

① ل١ // ل٢ ⟺ م١ = م٢

② ل١ ⊥ ل٢ ⟺ م١ م٢ = -١ (مالم يوازى أحدهما أحد المحورين)

فمثلًا : إذا كان ميل مستقيم = $\frac{٣}{٢}$ فإن : ميل المستقيم الذى يوازيه = $\frac{٣}{٢}$

وميل المستقيم العمودى عليه = $\frac{-٢}{٣}$

معادلة الخط المستقيم

① المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بالنقطة ف = (س١ ، ص١) والمتجه $\overrightarrow{ى}$ = (أ ، ب)

متجه اتجاه له هى $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ف} + ك \overrightarrow{ى}$ حيث ك ∋ ح

② المعادلة الكارتيزية :

* بدلالة نقطة عليه (س١ ، ص١) والميل (م) هى (ص - ص١) = م (س - س١)

* بدلالة الميل (م) وطول الجزء المقطوع من محور الصادات (حـ) هى ص = م س + حـ

* بدلالة الجزءين المقطوعين من محورى الإحداثيات هى $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$

ملاحظات

① معادلة المستقيم الذى يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (ل ، ك) هى ص = ك

② معادلة المستقيم الذى يوازى محور الصادات ويمر بالنقطة (ل ، ك) هى س = ل

③ معادلة محور السينات هى ص = ٠

④ معادلة محور الصادات هى س = ٠

⑤ معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة الأصل هى ص = م س

⑥ لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات نضع ص = ٠ ونوجد قيم س

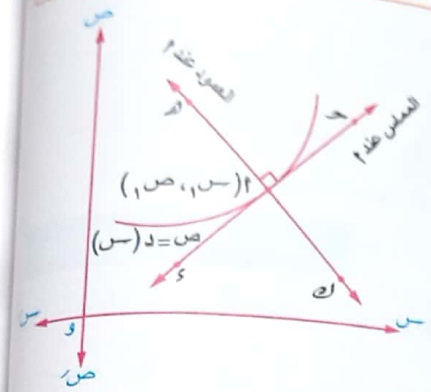
⑦ لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات نضع س = ٠ ونوجد قيم ص

⑧ لإيجاد نقط تقاطع منحنيين نحل معادلتيهما آنيًا.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تعاريف

* ميل منحنى عند نقطة عليه هو ميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة.
* العمودى على المنحنى هو العمودى على المماس للمنحنى عند نقطة التماس.



فى الشكل المقابل :

ميل المنحنى ص = د (س) عند النقطة

أ (س١ ، ص١) الواقعة عليه هو ميل المستقيم $\overleftrightarrow{ح ء}$ الذى يمس المنحنى عند أ بينما العمودى على نفس المنحنى عند نفس النقطة أ هو المستقيم $\overleftrightarrow{ك ء}$ العمودى على $\overleftrightarrow{ح ء}$

* زاوية التقاطع بين مستقيم ومنحنى هى الزاوية المحصورة بين المستقيم والمماس للمنحنى عند نقطة التقاطع.
* زاوية التقاطع بين منحنيين هى الزاوية بين المماسين للمنحنيين عند نقط تقاطع المنحنيين.
* نقول أن المنحنيين يتقاطعان على التعامد إذا كان المماسان المرسومان لهما من نقطة تقاطعهما متعامدين.

استخدام المشتقة الأولى لإيجاد ميل المماس والعمودى على منحنى

* ميل المماس لمنحنى الدالة [ص = د (س)] عند النقطة أ (س١ ، ص١)

الواقعة عليه = $\left[\frac{ء ص}{ء س}\right]_{(س_١ ، ص_١)}$

* ميل العمودى على منحنى الدالة [ص = د (س)] عند النقطة أ (س١ ، ص١)

الواقعة عليه = $\frac{-١}{\left[\frac{ء ص}{ء س}\right]_{(س_١ ، ص_١)}}$

معادلتا المماس والعمودى لمنحنى

إذا كانت (س١ ، ص١) نقطة تقع على منحنى الدالة د حيث : ص = د (س)

، م ميل المماس عند هذه النقطة أى : م = $\left[\frac{ء ص}{ء س}\right]_{(س_١ ، ص_١)}$ فإن :

* معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (س١ ، ص١) هى : ص − ص١ = م (س − س١)
* معادلة العمودى للمنحنى عند النقطة (س١ ، ص١) هى : ص − ص١ = $\frac{-١}{م}$ (س − س١)

مثال ١

أوجد النقط التى تقع على المنحنى : ص = س^{٢} − ٤ س + ٣ والتى عندها يكون المماس للمنحنى

(١) يوازى محور السينات.
(٢) يوازى المستقيم : ص − ٢ س + ٣ = ٠
(٣) عمودى على المستقيم : ٦ ص − ٣ س − ٥ = ٠

الحل

∵ ص = س^{٢} − ٤ س + ٣ ∴ ميل المماس = $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٢ س − ٤

(١) ∵ المماس يوازى محور السينات ∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٠ ∴ ٢ س − ٤ = ٠

∴ س = ٢ ومنها ص = −١ ∴ النقطة هى (٢ ، −١)

(٢) ∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{-(-٢)}{١}$ = ٢ ∴ ميل المماس = ٢ ∴ ٢ س − ٤ = ٢

∴ س = ٣ ومنها ص = ٠ ∴ النقطة هى (٣ ، ٠)

(٣) ∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{-(-٣)}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$ ∴ ميل المستقيم العمودى عليه = −٢

∴ ميل المماس = −٢ ∴ ٢ س − ٤ = −٢

∴ س = ١ ومنها ص = ٠ ∴ النقطة هى (١ ، ٠)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٢

أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى : $س^{٢} + ص^{٢} - ٤س + ٢ص = ٢٠$

عند النقطة $(-١ ، ٣)$ الواقعة عليه.

الحل

$\because س^{٢} + ص^{٢} - ٤س + ٢ص = ٢٠$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٢س + ٢ص \frac{ء ص}{ء س} - ٤ + ٢\frac{ء ص}{ء س} = ٠$

$\therefore (٢ص + ٢)\frac{ء ص}{ء س} = ٤ - ٢س$ $\therefore \frac{ء ص}{ء س} = \frac{٤ - ٢س}{٢ص + ٢}$

$\therefore$ ميل المماس عند النقطة $(-١ ، ٣) = \left(\frac{ء ص}{ء س}\right)_{(-١ ، ٣)} = \frac{٣}{٤}$

$\therefore$ معادلة المماس للمنحنى عند هذه النقطة هى :

$ص - ٣ = \frac{٣}{٤}(س + ١)$ أى $٤ص - ٣س - ١٥ = ٠$

، معادلة العمودى على المنحنى عند نفس النقطة هى :

$ص - ٣ = \frac{-٤}{٣}(س + ١)$ أى $٣ص + ٤س - ٥ = ٠$

مثال ٣

أوجد معادلة العمودى لمنحنى الدالة : $ص = س^{٢} + ٢س - ٣$ عند كل نقطة من نقط تقاطعه مع

(١) محور الصادات. (٢) المستقيم : $ص = -٤$

(٣) المستقيم : $ص - س + ١ = ٠$

الحل

ميل المماس للمنحنى عند أى نقطة $(س ، ص)$ عليه $= \frac{ء ص}{ء س} = ٢س + ٢$

(١) نوجد نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات بوضع $س = ٠$

$\therefore ص = -٣$ $\therefore$ نقطة التقاطع هى $(٠ ، -٣)$

$\therefore$ ميل المماس $= ٢$ وميل العمودى $= \frac{-١}{٢}$

$\therefore$ معادلة العمودى هى $(ص + ٣) = \frac{-١}{٢}(س - ٠)$ أى $س + ٢ص + ٦ = ٠$

(٢) نوجد نقط تقاطع المنحنى مع المستقيم بوضع $ص = -٤$

$\therefore -٤ = س^{٢} + ٢س - ٣$ $\therefore س^{٢} + ٢س + ١ = ٠$

$\therefore (س + ١)^{٢} = ٠$ $\therefore س = -١$

$\therefore$ نقطة التقاطع هى $(-١ ، -٤)$ $\therefore$ ميل المماس عندها $= ٠$

$\therefore$ ميل العمودى غير معرف

أى أن المستقيم العمودى يكون رأسيًا (موازيًا لمحور الصادات) ويمر بالنقطة $(-١ ، -٤)$

$\therefore$ معادلة العمودى هى $س = -١$

(٣) نوجد نقط تقاطع المنحنى مع المستقيم بحل معادلتيهما آنيًا

$\because ص = س^{٢} + ٢س - ٣$ (١)

، $ص = س - ١$ (٢)

وبالتعويض من (٢) فى (١) : $\therefore س - ١ = س^{٢} + ٢س - ٣$

$\therefore س^{٢} + س - ٢ = ٠$ $\therefore (س - ١)(س + ٢) = ٠$

$\therefore س = ١$ ومنها $ص = ٠$ أ، $س = -٢$ ومنها $ص = -٣$

$\therefore$ نقط التقاطع هى $(١ ، ٠) ، (-٢ ، -٣)$

$\therefore$ عند النقطة $(١ ، ٠)$

$\because$ ميل المماس $= ٤$ $\therefore$ ميل العمودى $= -\frac{١}{٤}$

$\therefore$ معادلة العمودى هى $(ص - ٠) = \frac{-١}{٤}(س - ١)$ أى $٤ص + س - ١ = ٠$

، عند النقطة $(-٢ ، -٣)$

$\therefore$ ميل المماس $= -٢$ $\therefore$ ميل العمودى $= \frac{١}{٢}$

$\therefore$ معادلة العمودى هى $(ص + ٣) = \frac{١}{٢}(س + ٢)$ أى $٢ص - س + ٤ = ٠$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

، عند $ن = ١$: $\frac{ع ص}{ع س} = ٢ (١)^{٢} + ٣ = ٥$

∴ ميل المماس = ٥ ، ميل العمودى = $\frac{-١}{٥}$

، $س = (١)^{٢} - ٢ = -١$ ، $ص = (١)^{٤} + ٣ (١)^{٢} + ١ = ٥$

أى أن النقطة $(-١ ، ٥)$ تقع على المنحنى وعندها يكون :

معادلة المماس هى $(ص - ٥) = ٥ (س + ١)$ أى $ص - ٥ س - ١٠ = ٠$

، معادلة العمودى هى $(ص - ٥) = -\frac{١}{٥} (س + ١)$ أى $س + ٥ ص - ٢٤ = ٠$

مثال ٦

أوجد معادلتى كل من المماس والعمودى عليه للمنحنى :

$س = ٥ + ط\theta$ ، $ص = ٢\sqrt{٢} \, جتا^{٢} \theta + ٢\sqrt{٢} \, جا \theta$ عند $\theta = \frac{\pi}{٤}$

الحل

∵ $س = ٥ + ط\theta$ ∴ $\frac{ع س}{ع \theta} = -قتا^{٢} \theta$

، $ص = ٢\sqrt{٢} \, جتا^{٢} \theta + ٢\sqrt{٢} \, جا \theta$ ∴ $\frac{ع ص}{ع \theta} = -٢ \sqrt{٢} \, جتا \theta \, ظا \theta + ٢\sqrt{٢} \, جا \theta$

∵ $\frac{ع ص}{ع س} = \frac{ع ص}{ع \theta} \div \frac{ع س}{ع \theta}$ ∴ $\frac{ع ص}{ع س} = \frac{-٢ \sqrt{٢} \, جتا \theta \, ظا \theta + ٢\sqrt{٢} \, جا \theta}{-قتا^{٢} \theta}$

، عند $\theta = \frac{\pi}{٤}$: $\frac{ع ص}{ع س} = \frac{-٢ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times ١ + \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \sqrt{٢} \times \sqrt{٢}}{-(\sqrt{٢})^{٢}} = \frac{-١}{٢}$

∴ ميل المماس = $\frac{-١}{٢}$ ، ميل العمودى = ٢

، $س = ٥ + ط\frac{\pi}{٤} = ٦$ ، $ص = جتا^{٢} \frac{\pi}{٤} + ٢\sqrt{٢} \, جا \frac{\pi}{٤} = \frac{٥}{٢}$

أى أن النقطة $(٦ ، \frac{٥}{٢})$ تقع على المنحنى وعندها يكون :

معادلة المماس هى : $(ص - \frac{٥}{٢}) = \frac{-١}{٢} (س - ٦)$ أى : $٢ ص + س - ١١ = ٠$

، معادلة العمودى هى : $(ص - \frac{٥}{٢}) = ٢ (س - ٦)$ أى : $٢ ص - ٤ س + ١٩ = ٠$

١

مثال ٤

أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى : $ص = ٣ + ط\theta س - قا^{٢} س$ عند النقطة التى تقع على المنحنى وإحداثيها السينى يساوى $\frac{\pi}{٤}$

الحل

عندما $س = \frac{\pi}{٤}$ ∴ $ص = ٣ + ط\frac{\pi}{٤} - قا^{٢} \frac{\pi}{٤} = ٢$

∴ النقطة $(\frac{\pi}{٤} ، ٢)$ تقع على المنحنى

، ∵ $\frac{ع ص}{ع س} = -قا^{٢} س - ٢ قا س \times قا س ظا س = -قا^{٢} س - ٢ ظا س قا^{٢} س$

∴ $(\frac{ع ص}{ع س})_{س = \frac{\pi}{٤}} = -قا^{٢} \frac{\pi}{٤} - ٢ ظا \frac{\pi}{٤} قا^{٢} \frac{\pi}{٤} = -٦$

∴ ميل المماس = -٦ ، ميل العمودى = $\frac{١}{٦}$

∴ معادلة المماس هى $(ص - ٢) = -٦ (س - \frac{\pi}{٤})$ أى : $٢ ص + ١٢ س = ٤ + ٣ \pi$

، معادلة العمودى هى $(ص - ٢) = \frac{١}{٦} (س - \frac{\pi}{٤})$ أى : $٢٤ ص - ٤ س = ٤٨ - \pi$

مثال ٥

أوجد معادلتى كل من المماس والعمودى عليه للمنحنى :

$س = ن^{٢} - ٢$ ، $ص = ن^{٤} + ٣ ن^{٢} + ١$ عند $ن = ١$

الحل

∵ $س = ن^{٢} - ٢$ ∴ $\frac{ع س}{ع ن} = ٢ ن$

، $ص = ن^{٤} + ٣ ن^{٢} + ١$ ∴ $\frac{ع ص}{ع ن} = ٤ ن^{٣} + ٦ ن$

، ∵ $\frac{ع ص}{ع س} = \frac{ع ص}{ع ن} \div \frac{ع س}{ع ن}$ ∴ $\frac{ع ص}{ع س} = \frac{٤ ن^{٣} + ٦ ن}{٢ ن} = ٢ ن^{٢} + ٣$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٧

أوجد معادلتى المماسين للمنحنى : $س^{٢} + ص^{٢} = ٤٠$ الموازيين للمستقيم $ص + ٣ س = ٥$

الحل

$\because س^{٢} + ص^{٢} = ٤٠$

$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{- س}{ص}$

، $\because$ المماس // المستقيم $ص + ٣ س = ٥$ $\therefore$ ميل المماس = ميل المستقيم $= -٣$

$\therefore \frac{- س}{ص} = -٣$ $\therefore س = ٣ ص$

وبالتعويض فى معادلة المنحنى : $\therefore (٣ ص)^{٢} + ص^{٢} = ٤٠$

$\therefore ١٠ ص^{٢} = ٤٠$

$\therefore ٩ ص^{٢} + ص^{٢} = ٤٠$ $\therefore ص = \pm ٢$ ومنها $س = \pm ٦$

$\therefore ص^{٢} = ٤$

$\therefore$ نقط التماس هى $(٦ ، ٢)$ ، $(-٦ ، -٢)$

$\therefore$ معادلة أحد المماسين هى $(ص - ٢) = -٣ (س - ٦)$ أى : $ص + ٣ س - ٢٠ = .$

ومعادلة المماس الآخر هى $(ص + ٢) = -٣ (س + ٦)$ أى : $ص + ٣ س + ٢٠ = .$

مثال ٨

أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة : $ص = \frac{ط س}{١ - ط^{٢} س}$ عند النقطة $س = \frac{\pi}{٣}$

الحل

$\because ط ٢ س = \frac{٢ ط س}{١ - ط^{٢} س}$ $\therefore ص = \frac{١}{٢} ط ٢ س$

$\therefore ص' = ق^{٢} ٢ س$

، عند $س = \frac{\pi}{٣}$ $\therefore ص = \frac{-\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore$ نقطة التماس هى $(\frac{\pi}{٣} ، \frac{-\sqrt{٣}}{٢})$ $\therefore (ص')_{(\frac{\pi}{٣} ، \frac{-\sqrt{٣}}{٢})} = ق^{٢} \frac{\pi ٢}{٣} = ٤$

$\therefore$ معادلة المماس هى : $ص + \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ٤ (س - \frac{\pi}{٣})$

أى : $٦ ص - ٢٤ س + ٣ \sqrt{٣} + ٨ \pi = .$

مثال ٩

أثبت أنه يمكن رسم مماسين من النقطة $(٠ ، -٤)$ للمنحنى $ص = س^{٢}$ وأوجد معادلة كل منهما .

الحل

$\because ص = س^{٢}$ $\therefore$ ميل المماس $= \frac{د ص}{د س} = ٢ س$

ويفرض أن المماس المرسوم للمنحنى من النقطة $(٠ ، -٤)$ يمس المنحنى عند النقطة $(أ ، ب)$

$\therefore \frac{د ص}{د س}_{أ} = ٢ أ$ (١)

، $\because (أ ، ب) \ni$ للمنحنى $\therefore ب = أ^{٢}$ $\therefore (أ ، أ^{٢})$ هى نقطة التماس

$\therefore$ المماس يمر بالنقطتين $(٠ ، -٤)$ ، $(أ ، أ^{٢})$ $\therefore$ ميل المماس $= \frac{أ^{٢} + ٤}{أ - ٠}$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\therefore ٢ أ = \frac{أ^{٢} + ٤}{أ}$ $\therefore ٢ أ^{٢} = أ^{٢} + ٤$

$\therefore أ^{٢} = ٤$ $\therefore أ = \pm ٢$

$\therefore$ نقط التماس هى $(٢ ، ٤)$ ، $(-٢ ، ٤)$

$\therefore$ يمكن رسم مماسين لهذا المنحنى من النقطة $(٠ ، -٤)$ يمسان المنحنى

(١) عند النقطة $(٢ ، ٤)$: $\therefore \frac{د ص}{د س} = ٢ \times ٢ = ٤$

$\therefore$ معادلة أحد المماسين هى $(ص + ٤) = ٤ (س - ٠)$ أى : $ص - ٤ س + ٤ = .$

(٢) عند النقطة $(-٢ ، ٤)$: $\therefore \frac{د ص}{د س} = ٢ \times -٢ = -٤$

$\therefore$ معادلة المماس الآخر هى $(ص + ٤) = -٤ (س - ٠)$ أى : $ص + ٤ س + ٤ = .$

مثال ١٠

أثبت أن المنحنيين : $ص = ٢ س^{٢} - ٣ س + ٨$ ، $ص = س^{٢} - ٣ س + ٩$

يتقاطعان على التعامد عند النقطة التى إحداثيها السينى $= ١$

الحل

بالتعويض عن $س = ١$ فى معادلة المنحنى الأول $\therefore ص = ٧$

$\therefore (١ ، ٧)$ تقع على المنحنى الأول

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

وبالتعويض في معادلة المنحنى الثاني:

∴ (١ ، ٧) تقع على المنحنى الثاني.

أي أن : (١ ، ٧) هي إحدى نقط تقاطع المنحنيين.

• بالنسبة للمنحنى الأول : $\frac{ص}{س} = ٤ س - ٣$ ∴ $\left(\frac{ص}{س}\right)_{س=١} = ١$

• بالنسبة للمنحنى الثاني : $\frac{ص}{س} = ٢ س - ٣$ ∴ $\left(\frac{ص}{س}\right)_{س=١} = -١$

∴ حاصل ضرب ميلى المماسين للمنحنيين = ١ × −١ = −١

∴ المماسان للمنحنيين عند النقطة (١ ، ٧) متعامدان.

∴ المنحنيان يتقاطعان على التعامد عند النقطة (١ ، ٧)

مثال ١١

أثبت أن المنحنيين : ص = ٢ س^{٢} + س + ١ ، ص = س^{٢} − س متماسان

وأوجد معادلة المماس المشترك لهما عند نقطة التماس.

الحل

∵ ص = ٢ س^{٢} + س + ١ (١) ، ص = س^{٢} − س (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) معًا :

∴ ٢ س^{٢} + س + ١ = س^{٢} − س ∴ س^{٢} + ٢ س + ١ = ٠

∴ (س + ١)^{٢} = ٠ ∴ س = −١

وبالتعويض فى (٢) : ∴ ص = ٢ ∴ المنحنيان يتقاطعان فى النقطة (−١ ، ٢)

، م$_{١}$ (ميل المماس للمنحنى الأول عند (−١ ، ٢)) = $\left(\frac{ص}{س}\right)_{(-١ ، ٢)}$

= (٤ س + ١)$_{س=-١}$ = −٣

، م$_{٢}$ (ميل المماس للمنحنى الثانى عند (−١ ، ٢)) = $\left(\frac{ص}{س}\right)_{(-١ ، ٢)}$

= (٢ س − ١)$_{س=-١}$ = −٣

∵ م$_{١}$ = م$_{٢}$ عند نفس النقطة (−١ ، ٢) ∴ المنحنيان متماسان عند النقطة (−١ ، ٢)

، معادلة المماس المشترك هى (ص − ٢) = −٣ (س + ١) أى ص + ٣ س + ١ = ٠ .

معلومة إثرائية

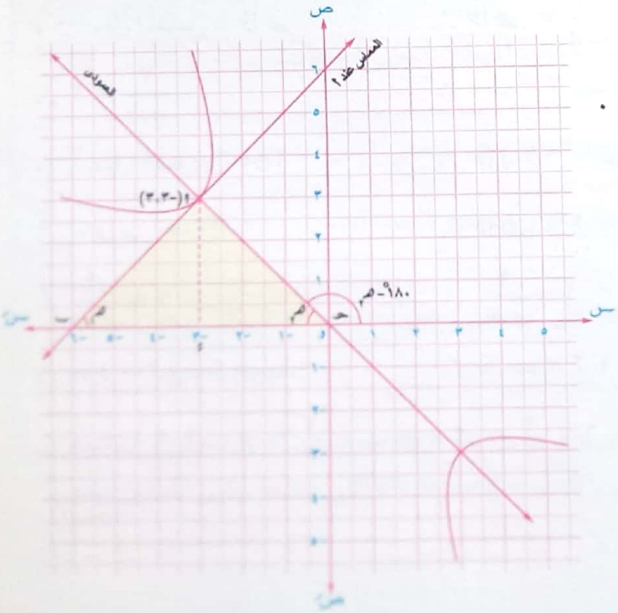
عند إيجاد نقط تقاطع منحنيين وكان أحد نقاط التقاطع جذر مكرر مرتين فهذه النقطة هى نقطة تماس مباشرة دون إثبات أن ميلى المماسين للمنحنيين عند هذه النقطة متساويين ففى المثال السابق نجد أن حل المعادلتين معًا يعطى س^{٢} + ٢ س + ١ = ٠ وهو مقدار مربع كامل فيه الجذرين متساويين.

أى أن : س = −١ جذر مكرر مرتين. ∴ المنحنيان متماسان عند النقطة (−١ ، ٢)

مثال ١٢

أوجد مساحة المثلث المحدد بمحور السينات والمماس والعمودى للمنحنى :

س^{٢} + ٣ س ص + ص^{٢} + ٩ = ٠ عند النقطة أ (−٣ ، ٣) الواقعة عليه.



الحل

∵ س^{٢} + ٣ س ص + ص^{٢} + ٩ = ٠

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ س + ٣ س $\frac{ص}{س}$ + ٣ ص + ٢ ص $\frac{ص}{س}$ = ٠

∴ $\frac{ص}{س} = \frac{-(٢ س + ٣ ص)}{(٣ س + ٢ ص)}$

∴ $\left(\frac{ص}{س}\right)_{(-٣ ، ٣)}$ = ١

∴ ميل المماس = ١

∴ معادلة المماس هى : (ص − ٣) = ١ (س + ٣) أى ص =

لإيجاد ب نقطة تقاطع المماس مع محور السينات نضع ص = ٠

∴ ب = (−٦ ، ٠)

∴ س = −٦

∵ ميل العمودى = −١

∴ معادلة العمودى هى : (ص − ٣) = −١ (س + ٣) أى : ص = − س

لإيجاد حـ نقطة تقاطع العمودى مع محور السينات نضع ص = ٠

∴ حـ = (٠ ، ٠)

∴ س = ٠

∴ طول $\overline{ب حـ}$ = ٠ − (−٦) = ٦ وحدة طولية.

∴ مساحة Δ ا ب حـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ × اء = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٣ = ٩ وحدة مربعة.

حل آخر :

∵ $\left(\frac{ء ص}{ء س}\right)_{(-٢ ، ٣)}$ = ١

∴ ميل المماس = ١

، ∵ ميل المماس = ظا هـ١

∴ ظا هـ١ = $\frac{اء}{ء ب}$

∴ $\frac{٣}{ء ب}$ = ١

∴ ء ب = ٣ وحدة طولية.

، ∵ ميل العمودى = −١

∴ ظا (١٨٠° − هـ٢) = −١

∴ − ظا هـ٢ = −١

∴ ظا هـ٢ = ١

∴ $\frac{اء}{حـ ء}$ = ١

∴ $\frac{٣}{حـ ء}$ = ١

∴ حـ ء = ٣ وحدة طولية.

∴ حـ ب = ٣ + ٣ = ٦ وحدة طولية.

∴ مساحة Δ ا ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ب حـ × اء = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٣ = ٩ وحدة مربعة.

على معادلتى المماس والعمودى لمنحنى

اختبار تفاعلى

• مفهم • تطبيقى **مستويات عليا** من أسئلة الكتاب المدرسى

١ أوجد ميل المماس للمنحنى : س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س + ٤ ص − ٨ = ٠

عند نقطة تقاطعه مع محور السينات. «$-\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$»

٢ أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى : س^{٢} + ٣ س ص + ص^{٢} = ٥

مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وذلك عند النقطة (١ ، ١) «١٣٥°»

٣ أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها مماس المنحنى : ص^{٣} = س^{٢} مع الاتجاه

الموجب لمحور السينات عند س = ٨ لأقرب دقيقة. «١٨° ٢٦'»

٤ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ٣ ص^{٢} − ٦ ص + س^{٢} = ٠ والتى عندها المماس لهذا المنحنى

① موازيًا لمحور السينات. ② موازيًا لمحور الصادات.

③ يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٥ (دورثان ٢٠١١) ، (دورأول ٢٠٠٤) **أوجد النقط على المنحنى :** س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٣

والتى يكون عندها المماس للمنحنى موازيًا لمحور الصادات. «(٢ ، −١) ، (−٢ ، ١)»

٦ (دورأول ٢٠٠٢) **أوجد النقط الواقعة على المنحنى :** س^{٢} + ص^{٢} = ٨ والتى يكون عندها

المماس للمنحنى عموديًا على المستقيم ص = ٤ − س «(٢ ، −٢) ، (−٢ ، ٢)»

٧ **أوجد النقط الواقعة على المنحنى :** $\sqrt{س}$ + $\sqrt{ص}$ = ٦ والتى عندها يكون المماس عموديًا

على المستقيم ٣ س − ٦ ص = ٧ «(١٦ ، ٤)»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أولًا التركيب الكيميائى للمعادن

* القليل من المعادن ذات تركيب كيميائى ثابت ومحدد، مثل : الكوارتز (المرو) الذى يتكون من ثانى أكسيد السيليكون.
* الغالبية العظمى من المعادن يتغير تركيبها الكيميائى بإحلال عنصر محل آخر لكن فى نطاق ضيق بحيث لا يغير من الترتيب الذرى للهيكل البنائى للمعدن.

أنواع وتكوين المعادن (أنواع المعادن من حيث التركيب الكيميائى)

* المعادن مواد طبيعية تتكون من عناصر، وتنقسم إلى :

(١) **معادن عنصرية** : تتكون من عنصر واحد فقط وهى تمثل بعض المعادن،

أمثلة : – الجرافيت. – الماس. } يتكونا من عنصر الكربون.

– الذهب. – الكبريت. – النحاس.

(٢) **معادن مركبة** : تتكون من اتحاد عنصرين أو أكثر لتكوين مركب ثابت حسب القوانين الكيميائية الخاصة بالروابط وهى تمثل غالبية المعادن،

أمثلة : – الكوارتز (المرو) يتكون من ← ثانى أكسيد السيليكون (سيليكون – أكسچين).

– الكالسيت يتكون من ← كربونات الكالسيوم (كالسيوم – كربون – أكسچين).

* يبلغ عدد العناصر التى تعرف عليها الإنسان بالقشرة الأرضية أكثر من ١٠٠ عنصر، حيث وُجد أن ٨ عناصر فقط منها تكون حوالى ٩٨,٥ ٪ من وزن صخور القشرة الأرضية، وهى مرتبة تنازليًا كالتالى :

العناصر الشائعة فى القشرة الأرضية

العنصر	الأكسچين	السيليكون	الألومنيوم	الحديد	الكالسيوم	الصوديوم	البوتاسيوم	الماغنيسيوم
النسبة المئوية للوزن	٤٦,٦	٢٧,٧	٨,١	٥,٠	٣,٦	٢,٨	٢,٦	٢,١

* باقى العناصر المعروفة، مثل : (النحاس – الذهب – الكربون – الرصاص – البلاتين) لا تتعدى أكثر من ١,٥ ٪ من وزن صخور القشرة الأرضية.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

- عـدة معادن، كمـا فى الغالبية العظمى من الصخور التى تتكون من حبيبات متماسـكة من المعادن، مع احتفاظ كل معدن منها بخصائصه،

مثال :

صخر الجرانيت يتكون من معادن (الكوارتز والفلسبار والميكا).

* تشترك المعادن المكونة للصخر الواحد عادةً فى بعض الصفات أو الخواص، **فنجد أن :**

- **الصخور النارية التى تكونت من تبلور صهير** تتكون من مجموعة من المعادن تبلورت بحدوث انخفاض صغير نسبيًا فى درجات الحرارة والضغط.
- **الصخور الرسـوبية التى نقلت وترسـبت** تشـترك فى خواص متقاربة، مثل (حجم الحبيبات ووزنها النوعى)،

مثال :

رواسـب السـهل الفيضى لنهر النيل المتكونة من الغرين والصلصال المتواجدان فى التربة الزراعية فى مصر.

تعريف المعـدن

* المعدن : هو الوحدة الأساسية التى يتكون منها الصخر.
* المعدن بالنسبة لچيولوچى متخصص فى علم المعادن هو مادة تتوافر فيها الشروط التالية :
 - صلبة.
 - غير عضوية.
 - تتكون فى الطبيعة.
 - لها تركيب كيميائى محدد (يمكن التعبير عنه).
 - لها شكل بلورى مميز.

ولابد من توافر هذه الشروط فى أى معدن.

* الشق الأساسى فى تعريف المعدن : هو كونه مادة متبلرة يتحكم النظام البلورى لها فى شكل المعدن وخصائصه الطبيعية (اللون والصلابة والانفصام والمكسر) وخصائصه الكيميائية.
* من الأركان الأساسية فى تعريف المعدن أن له :
 - تركيب كيميائى محدد.
 - بناء ذرى ثابت (تركيب بلورى).
* فيما يلى سنتناول كل منهما بشىء من التفصيل.

ملاحظات

* **الفحم ليس معـدن ...** لأنه من أصـل عضوى وليس له شـكل بلورى مميز.
* **البترول ليس معدن ...** لأنه مادة سـائلة من أصل عضوى وليس له شـكل بلورى مميز ولا تركيب كيميائى محدد.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

* يعيش الإنسان فوق القشرة الأرضية لذلك ينبغى على الإنسان أن يتعرف على مكوناتها حتى :

- **يستفيد** من خيراتها على أفضل وجه حيث يأكل من زراعة تربتها ويسكن فى منازل يبنيها من مواد يستخرجها من صخورها ومعادنها.
- **يتقى** شرورها من الزلازل والبراكين والسيول التى تؤثر على سطحها.

استخدام الإنسان للمعادن قديمًا

* استخدم إنسان العصر الحجرى :

(١) صخر الصوان فى عمل أسلحة (سكاكين ، حراب) للصيد والدفاع عن النفس.
(٢) الأصباغ المعدنية الحمراء (الهيماتيت) والصفراء (الليمونيت) للرسم على جدران الكهوف.
(٣) معادن الطين فى صناعة الفخار وذلك بعد اكتشاف النار.

* استخدم الإنسان المصرى القديم :

الأحجار زاهية الألوان للزينة، مثل : الزمرد والجمشت والفيروز والمالاكيت.

استخدام الإنسان للمعادن حاليًا

* يستخدم الإنسان المعادن فى الكثير من الصناعات واستخدامات الحياة المتعددة حيث يستخدم :

(١) الكالسيت فى صناعة الأسمنت.
(٢) الكوارتز (الرمل) فى المصنوعات الزجاجية.
(٣) أكاسيد الحديد (الماجنيتيت ، الهيماتيت) فى صناعة الحديد والصلب اللازم فى البناء وصناعة السيارات وسكك الحديد.
(٤) الفلسبار فى صناعة الخزف.
(٥) الفلزات كالنحاس والذهب بعد تشكيلها لتناسب استخدامات الحياة المتعددة.

علاقة تركيب صخور القشرة الأرضية بالمعادن

* تتركب القشرة الأرضية من ثلاثة أنواع من الصخور هى النارية والرسوبية والمتحولة.
* قد يتكون الصخر الواحد من :

- **معدن واحد فقط**، وذلك فى أحيان قليلة،

مثال :

صخر الحجر الجيرى وصخر الرخام يتكون كل منهما من معدن الكالسيت فقط.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المجموعات المكونة للمعادن

* لقد تمكن العلماء من التعرف على أكثر من ٢٠٠٠ معدن أغلبها يوجد بكميات قليلة فى الطبيعة، وقد وُجد أن المعادن الشائعة والمعادن ذات القيمة الاقتصادية لا تتجاوز ٢٠٠ معدن أما المعادن المكونة لصخور القشرة الأرضية تُعد بالعشرات.
* تنقسم المعادن المكونة لصخور القشرة الأرضية إلى عدة مجموعات معدنية أكثرها شيوعًا هى مجموعة السيليكات تليها من حيث الوفرة مجموعة الكربونات ثم المعادن الاقتصادية من أكاسيد وكبريتيدات وكبريتات ومعادن عنصرية منفردة وغيرها.
* الجدول التالى يوضح أكثر المجموعات المعدنية شيوعًا :

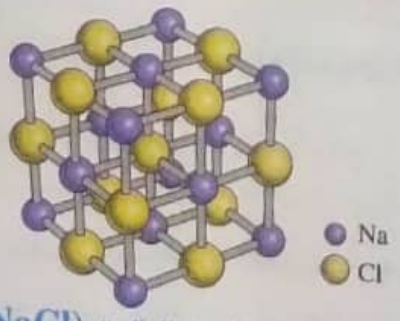
من حيث الوفرة		المجموعات المعدنية	أمثلة
الأكثر شيوعًا ↓ الأقل شيوعًا		السيليكات	الكوارتز – الأرثوكليز – البلاچيوكليز – الميكا – الأمفيبول – البيروكسين – الأوليفين – الصوان.
		الكربونات	الكالسيت – الدولوميت – المالاكيت.
	المعادن الاقتصادية	الأكاسيد	الهيماتيت – الماجنيتيت.
		الكبريتيدات	البيريت – الجالينا – السفاليريت.
		الكبريتات	الجبس – الأنهيدريت – الباريت.
		معادن عنصرية منفردة	الذهب – النحاس – الكبريت – الجرافيت – الماس.

ثانيًا التركيب البلورى للمعادن (كيفية تكوين الهيكل البنائى للمعدن)

* الشكل البلورى للمعدن :
هو ترتيب ذرات العناصر داخل المعدن الواحد ترتيبًا منتظمًا متناسقًا.

البلورة
جسم هندسى مصمت له أسطح خارجية مستوية تعرف بالأوجه البلورية.

* مثال : الهيكل البنائى لمعدن الهاليت :
النظام البلورى لمعدن الهاليت (الملح الصخرى أو كلوريد الصوديوم) يتكون من اتحاد أيونات الصوديوم الموجبة مع أيونات الكلور السالبة فى نظام تكرارى ينتج عنه نظام بلورى مميز لمعدن الهاليت على شكل مكعب.



النظام البلورى لمعدن الهاليت (NaCl)

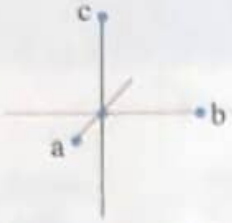
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

العناصر الأساسية عند دراسة بلورات المعادن

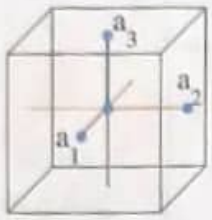
(١) أطوال المحاور البلورية :

* فى حالة اختلاف أطوالها يرمز لها بـ (a, b, c).
* فى حالة تساوى أطوالها يرمز لها بـ (a_1, a_2, a_3).
* من أمثلتها :

محور التماثل الرأسى : هو الخط الذى يمر بمركز البلورة وتدور حوله فيتكرر ظهور أوجه أو حروف أو زوايا البلورة مرتين أو أكثر.



المحاور البلورية مختلفة الأطوال



المحاور البلورية لفصيلة المكعب

(٢) الزوايا بين المحاور :

* يرمز لها بـ (γ, β, α).

(٣) مستوى التماثل البلورى :

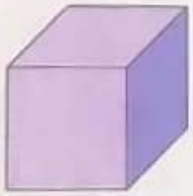
* هو المستوى الذى يقسم البلورة إلى نصفين متشابهين تمامًا.

ملحوظة

تتوقف درجة التماثل البلورى على أطوال المحاور والزوايا بينهم.

الفصائل (الأنظمة) البلورية للمعادن

* يمكن تقسيم بلورات المعادن إلى ٧ فصائل (أنظمة) بلورية ويعتمد التقسيم على أطوال المحاور البلورية والزوايا بين هذه المحاور، كما يلى :

فصائل تشمل ٣ محاور بلورية	
١ النظام المكعبى	* محاوره متساوية فى الطول $a_3 = a_2 = a_1$ * محاوره متعامدة الزوايا $\gamma = \beta = \alpha = 90^\circ$ يتميز بأكبر قدر من التماثل البلورى. 
٢ النظام الرباعى	* له محوران متساويان والثالث يختلف عنهما فى الطول $c \neq a_2 = a_1$ * محاوره متعامدة الزوايا $\gamma = \beta = \alpha = 90^\circ$ 

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٣ النظام المعينى القائم



* محاوره مختلفة فى الطول $c \neq b \neq a$
* محاوره متعامدة الزوايا $\gamma = \beta = \alpha = 90°$

٤ النظام أحادى الميل



* محاوره مختلفة فى الطول $c \neq b \neq a$
* محوران متعامدان والثالث مائل عليهما $\alpha = \gamma \neq \beta$
* معظم المعادن تنتمى إلى هذه الفصيلة.

٥ النظام ثلاثى الميل



* محاوره مختلفة فى الطول $c \neq b \neq a$
* محاوره غير متعامدة الزوايا $\alpha \neq \gamma \neq \beta$

فصائل تشمل ٤ محاور بلورية

٦ النظام السداسى



* ٣ محاور أفقية متساوية فى الطول وتتقاطع مع بعضها فى زوايا متساوية.
* المحور الرابع رأسى **سداسى التماثل** يتعامد عليهم ويختلف عنهم فى الطول.
* **يوجد مستوى تماثل** أفقى $c \neq a_3 = a_2 = a_1$

٧ النظام الثلاثى



* ٣ محاور أفقية متساوية فى الطول وتتقاطع مع بعضها فى زوايا متساوية.
* المحور الرابع رأسى **ثلاثى التماثل** يتعامد على مستواهم الأفقى ويختلف عنهم فى الطول.
* **لا يوجد مستوى تماثل** أفقى $c \neq a_3 = a_2 = a_1$



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٨ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص^{٢} − س^{٢} = ٧ والتى عندها المماس يصنع زاوية جيب تمامها $\frac{٤}{٥}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٩ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = ظا س حيث س ∈]٠ ، π[− $\{\frac{\pi}{٢}\}$ والتى عندها يكون المماس

① موازيًا للمستقيم : ٢ س − ص = ٣ ② له متجه اتجاه $\overleftarrow{ى}$ = (١ ، ٤)

١٠ إذا كانت : ص = − ظا س حيث س ∈]٠ ، ٢π[− {π}

فأوجد النقط الواقعة على منحنى هذه الدالة والتى عندها يكون المماس موازيًا للمستقيم :

٢ ص − ٨ س + ٧ = ٠ « $(\frac{\pi}{٦} ، -\sqrt{٣})$ ، $(\frac{٥\pi}{٦} ، \sqrt{٣})$ ، $(\frac{٧\pi}{٦} ، -\sqrt{٣})$ ، $(\frac{١١\pi}{٦} ، \sqrt{٣})$ »

١١ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = ما س مَا س والتى عندها يكون المماس عموديًا على المستقيم : ص = س حيث س ∈]٠ ، π[« $(\frac{\pi}{٢} ، ٠)$ »

١٢ أوجد الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى : ص = $\frac{٢ س - ١}{٣ س - ٢}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (١ ، ١) ثم أوجد النقطة الواقعة على المنحنى ويكون المماس عندها موازيًا للمستقيم : س + ٤ ص − ١ = ٠ « ١٣٥° ، $(\frac{٤}{٣} ، \frac{٥}{٦})$ ، $(٠ ، \frac{١}{٢})$ »

١٣ أوجد معادلة المماس لكل من المنحنيات الآتية عند النقط المبينة أمام كل منها :

① س^{٢} − ٣ س ص − ص^{٢} + ٣ = ٠ عند النقطة (−١ ، ٤)

② (دورثانى ٢٠٠٢) س^{٣} + س ص^{٢} − ٢ ص^{٢} = ٠ عند النقطة (١ ، ١)

③ (دورثانى ٢٠٠٥) س^{٢} + ٢ $\sqrt{٢}$ س ص + ص^{٢} − ٢١ = ٠ عند النقطة (١ ، ٤)

④ ص = ظا س + ما ٢ س عند س = $\frac{\pi}{٤}$

⑤ ص = $\frac{٦ ظا س}{١ - ظا^{٢} س}$ عند س = $\frac{\pi}{٦}$

⑥ ما س = مَا ٣ ص عند النقطة $(\frac{\pi}{٦} ، ٠)$

⑦ د (س) = ٢ ظا^{٢} س عند س = $\frac{\pi}{٤}$

١٤ أوجد معادلة العمودى على كل من المنحنيات الآتية عند النقط المبينة أمام كل منها :

① ص = س^{٢} − ٢ س + ٣ عند س = ١

② (السودان ٢٠١٤) س ص = ٦ عند النقطة (٢ ، ٣)

③ (دورثانى ٢٠٠١) س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س = ٩ عند النقطة (٢ ، ١)

④ (دورثانى ٢٠١٢) س^{٣} + ص^{٣} = ٦ س ص عند النقطة (٣ ، ٣)

⑤ ص = ٤ + ظا س − قا^{٢} س عند س = $\frac{\pi}{٤}$

⑥ ص = س | س | عند النقطة (−٢ ، −٤)

١٥ (دورأول ٢٠٠١) إذا كان ميل المماس للمنحنى : ص^{٢} = س − ١ يساوى $-\frac{١}{٢}$ فأوجد معادلة هذا المماس. « ص = $-\frac{١}{٢}$ س »

١٦ إذا كانت النقطة (٤ ، −٢) تنتمى إلى المنحنى : س^{٢} + ص^{٢} − ٢ ل س + ١٢ = ٠

أوجد قيمة : ل ، ثم أوجد معادلة المماس للمنحنى عند هذه النقطة. « ٤ ، ص + ٢ = ٠ »

١٧ إذا كانت س ∈ [٠ ، π] فأوجد نقطة على المنحنى : ص = ما ٢ س − مَا س يكون المماس عندها مائلاً بزاوية قياسها $\frac{٣\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وأوجد معادلة هذا المماس. « $(\frac{\pi}{٢} ، ٠)$ ، ٢ س + ٢ ص − π = ٠ »

١٨ أوجد معادلة كل من المماس والعمودى عليه لكل من المنحنيات الآتية عند النقط المبينة أمام كل منها :

① س^{٢} + ص^{٢} = ٥٢ عند النقطة (٤ ، −٦)

② س ص^{٢} = ١٨ عند ص = ٣

معلومات علينا

(١) $س = ر^2 + ٤ ر$ ، $ص = ٢ ر^2$ عند $ر = ١$

(٢) $س = ر^2 + ٢ ر + ٣$ ، $ص = ٢ ر^3 - ٦ ر + ١$ عند $ر = ٠$

(٣) $س = ر^2 - ٦ ر$ ، $ص = ٨ \sqrt{ر - ٢}$ عند $ر = ٦$

(٤) $س = ر^3 - ٦$ ، $ص = \sqrt[3]{٣ ر^2 - ٥}$ عند $ر = ٢$

(٥) $س = جتا \theta$ ، $ص = \sqrt{٢} + جا \theta$ عند $\theta = \frac{\pi}{٤}$

(٦) (دورأول ٢٠١٨) $س = ظا \theta$ ، $ص = ظا \theta$ عند $\theta = \frac{\pi}{٦}$

(٧) $س = ظا \theta$ ، $ص = ظا \theta + ظتا \theta$ عند $\theta = \frac{\pi}{٣}$

(٨) $س = ٧ + ظا \theta$ ، $ص = جا^2 \theta + \sqrt{٢}$ ظا θ عند $\theta = \frac{\pi}{٤}$

(٩) $س = ظا^2 \theta - ١$ ، $ص = ظا \theta$ عند $\theta = \frac{-\pi}{٤}$

(١٠) أوجد معادلة كل من المماس والعمودى عند النقطة : (س ، ص) حيث س < ٠ ، ص < ٠ .
والتى تقع على المنحنى : $س^2 + ص^2 + ٤ س + ٦ ص + ٥ = ٠$ والتى يصنع عندها المماس للمنحنى زاوية قياسها $\frac{\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

«س - ص + ٣ = ٠ ، س + ص + ٥ = ٠»

(١١) أوجد الصور المختلفة لمعادلتى المماس والعمودى عليه للمنحنى : $ص = س^2 + س$ عند نقط تقاطعه مع المستقيم ص - ٢ س = ٠ .

(١٢) (دورثان ٢٠٠٠) أوجد معادلة العمودى على المنحنى الذى معادلته : $ص = \sqrt{٦ - س}$ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم ص = س

«ص - ٤ س + ٦ = ٠»

(١٣) (دورأول ٢٠١٢) أوجد بدلالة النسبة التقريبية π معادلة المماس للمنحنى : ص = جتا (س + ص) والذى ميله = $-\frac{١}{٢}$ حيث صفر ≤ س ≤ π

«٢ س + ٤ ص - π = ٠»

(١٤) إذا كانت : د ، ر ، و دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س أوجد معادلتى المماس والعمودى لمنحنى الدالة و فى كل مما يأتى مستعينًا بالقيم المعطاة فى الجدول التالى :

س	د (س)	ر (س)	د' (س)	ر' (س)
٣	١	٧	-١	٦
٧	-٢	١	٢	٥

(١) و (س) = د (س) × ر (س) ، س = ٣

(٢) و (س) = د (س) ÷ ر (س) ، س = ٧

(٣) و (س) = د [ر (س)] ، س = ٣

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان المستقيم : ص + س − ١ = ٠ يمس منحنى الدالة د : د (س) = س^{٢} − ٣ س + أ
فإن : أ = ...
(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢) المماس لمنحنى الدالة ص = $\sqrt{س}$ عند س = ٠ يوازى
(أ) محور السينات. (ب) محور الصادات.
(جـ) المستقيم ص = س (د) المستقيم س + ص = ٠

(٣) إذا كانت معادلة العمودى للمنحنى ص = د (س) عند النقطة (١ ، ١) هى
س + ٤ ص = ٥ فإن : د' (١) = ...
(أ) −٣ (ب) $-\frac{١}{٤}$ (جـ) ٤ (د) −٤

(٤) المماس للمنحنى : ص = ٣ س^{٢} − ٥ عند النقطة (١ ، −٢) يمر بالنقطة
(أ) (٥ ، −٢) (ب) (٣ ، ١) (جـ) (٢ ، −٤) (د) (٠ ، −٨)

(٥) ميل العمودى لمنحنى الدالة ص = | س^{٣} | عند النقطة (−٢ ، ٨) هو
(أ) −١٢ (ب) ١٢ (جـ) $\frac{١}{١٢}$ (د) $-\frac{١}{١٢}$

(٦) ميل المماس لمنحنى الدائرة : س^{٢} + ص^{٢} = ١ عند س = $\frac{٣}{٥}$ يساوى
(أ) $\pm\frac{٤}{٣}$ (ب) $\pm\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\pm\frac{٤}{٥}$

(٧) المماس للمنحنى : س^{٢} − س ص + ص^{٢} = ٢٧ المرسوم عند النقطة (٦ ، ٣)
يصنع زاوية قياسها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.
(أ) ٩٠° (ب) صفر° (جـ) ٤٥° (د) ١٨٠°

(٨) معادلة العمودى على المنحنى ص = ما س عند النقطة (٠ ، ٠) هى
(أ) س = ٠ (ب) ص = ٠
(جـ) س + ص = ٠ (د) س − ص = ٠

(٩) إذا كان محور السينات مماسًا للمنحنى : ص = س^{٢} − ٢ س + ٢ − ١
فإن نقطة التماس هى
(أ) (٠ ، ٠) (ب) (١ ، ٠) (جـ) (٢ ، ٠) (د) (−١ ، ٠)

(١٠) العمودى للدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ١٢ عند أى نقطة عليها يمر بالنقطة
(أ) (٢ ، ٢) (ب) (١ ، ١) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (−٢ ، −٢)

(١١) إذا كان المماس للمنحنى : ص^{٢} = ٤ أ س عمودى على محور السينات
فإن :
(أ) $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٠ (ب) $\frac{ء ص}{ء س}$ = ١ (جـ) $\frac{ء س}{ء ص}$ = ١ (د) $\frac{ء س}{ء ص}$ = ٠

(١٢) معادلة المماس للمنحنى : س = ص^{٢} عند نقطة الأصل هى
(أ) ص = ٠ (ب) س = ٠ (جـ) س = ص (د) س + ص = ٠

(١٣) إذا كان منحنيا الدالتين : د (س) ، ر (س) متماسين عند النقطة (٢ ، ٤)
وكانت : د' (٢) = ٣ فإن : ر' (٢) = ...
(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(١٤) معدل تغير ميل المماس للدالة : د (س) = ٢ س^{٣} عند س = ٣ يساوى
(أ) ٣٦ (ب) ٥٤ (جـ) ٦ (د) ١٢

(١٥) إذا كان المماس لمنحنى الدالة : ص = س^{٢} + أ عند النقطة (١ ، ب) يقطع محور
السينات عندما س = −١ فإن : أ × ب = ...
(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ١٢ (د) −١٢

(١٦) المماس للمنحنى الذى معادلتيه البارامتريتين : س = ٣ جتا θ ، ص = ٣ جا θ
حيث (٠ ≤ θ ≤ π) يوازى محور السينات إذا كانت θ = ...
(أ) صفر (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) π

(١٧) قياس الزاوية التى يصنعها المماس للمنحنى ما ٢ س = ظا ص مع الاتجاه الموجب
لمحور السينات عند النقطة $\left(\frac{٣\pi}{٤} ، \frac{٣\pi}{٤}\right)$ تساوى
(أ) صفر (ب) ١٣٥° (جـ) ٤٥° (د) ٣٤′ ٢٦°

(١٨) المستقيم : أ س + ب ص + حـ = ٠ يكون عمودى على المنحنى س ص = ١
فإن :
(أ) أ > ٠ ، ب > ٠ (ب) أ < ٠ ، ب < ٠
(جـ) أ + ب > ٠ (د) أ ب < ٠

(١٩) طول الجزء المقطوع من محور الصادات بواسطة مماس المنحنى ص = س ما س عندما س = π يساوى وحدة طول.

(أ) − π (ب) π (جـ) − π^{٢} (د) π^{٢}

(٢٠) إذا كانت معادلة العمودى على المماس المشترك لمنحنى الدالتين د ، ر عند س = ١ هو ص = $\frac{١}{٣}$ س + $\frac{٣}{٢}$ فإن : (د × ر)$'$ (١) = ...

(أ) ٤ (ب) ٧ (جـ) ٢ (د) ١٠

(٢١) إذا كان المماس لمنحنى الدالة د : د (س) = أ س^{٣} عند س = $\frac{\pi}{٤}$ عمودى على المماس لمنحنى الدالة ق : ق (س) = ب ما^{٢} س عند س = $\frac{\pi}{٤}$ فإن : أ × ب = ...

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{-١}{٣}$

(٢٢) إذا كان : س = أ (١ + جتا θ) ، ص = أ ما θ فإن العمودى على المنحنى يمر دائمًا بنقطة ثابتة هى

(أ) (أ ، ٠) (ب) (٠ ، أ) (جـ) (١ ، ٠) (د) (أ ، أ)

(٢٣) إذا كانت : د (س) = $\frac{س + ١}{ق (س)}$ ، ق (س) ≠ ٠ وأن لمنحنى ق (س) مماسًا أفقيًا عند النقطة (١ ، ٢) فإن : د$'$ (١) = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) −٢ (د) $\frac{١}{٢}$

(٢٤) إذا كانت ص^{٢} = ٨ س حيث ص > ٠ فإن النقطة الواقعة على هذا المنحنى والتى يكون عندها $\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{ع س}{ع ص}$ هى

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (١ ، ٢ $\sqrt{٢}$)

(جـ) ($\frac{١}{٢}$ ، ٢) (د) (٢ ، ٤)

(٢٥) إذا كانت ص = د (س) حيث ص = $\sqrt[٣]{ر^{٢} + ٧}$ ، ٦ ر^{٢} س + ر = ١ فإن العمودى لمنحنى الدالة عند نقطة واقعة عليه وإحداثيها السينى يساوى صفر يوازى

(أ) محور السينات. (ب) محور الصادات.

(جـ) المستقيم ص = س (د) المستقيم ص = − س

(٢٦) فى الشكل المقابل :

إذا كانت : د (س) = ر (س) − ٣ ق (س)

فإن : د$'$ (٥) = ...

(أ) صفر (ب) ٢

(جـ) ٣ (د) ٤

(٢٧) فى الشكل المقابل :

إذا كان المستقيم ل مماسًا للدالة د عند النقطة حـ يقطع محور السينات فى النقطة أ (−٤ ، ٠)

وكانت ب (٤ ، ٠)

وكان د (٤) + د$'$ (٤) = ٩

فإن مساحة Δ أ ب حـ = ... وحدة مربعة.

(أ) ٢٤ (ب) ٢٨ (جـ) ٣٢ (د) ٣٦

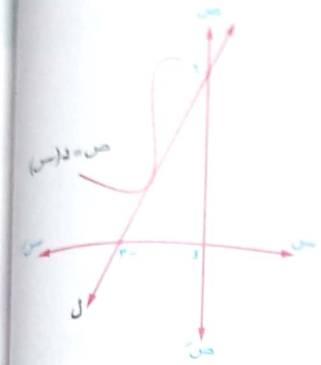
(٢٨) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د :

والمستقيم ل يمس منحنى الدالة عند النقطة أ (٣ ، ٥) وكان هـ (س) = س . د (س)

فإن : هـ$'$ (٣) = ...

(أ) ٣ (ب) ١

(جـ) ٥ (د) ٨



٢٩ المستقيم ل مماس لمنحنى الدالة ص = د (س) عند (-٢ ، أ) وكان : م (س) = د (٢ س)
فإن : م (-١) = ...
(أ) ٣ (ب) ٤
(جـ) ٦ (د) ٩

٣٣ (دور ثان ٢٠١٤) أثبت أن المماس للمنحنى : ص = س٢ + ٣ س - ٢ عند أى نقطة عليه يميل بزاوية حادة على محور السينات ثم أوجد معادلة العمودى للمنحنى عند النقطة (١ ، ٢)
« س + ٦ ص - ١٣ = ٠ »

٣٤ إذا كان : ٢ ص = ما ٢ س فأوجد :
(١) قيم س من الفترة : ٠ ≤ س < π والتى عندها المماس يكون موازيًا لمحور السينات.
(٢) معادلة كل من المماس والعمودى عند هذه النقط.

٣٥ (دور أول ٢٠١٥) إذا كان العمودى للمنحنى : ص = ٤ - س٢ عند النقطة (١ ، ٣) يقطع المنحنى مرة أخرى عند حـ أوجد معادلة المماس للمنحنى عند النقطة حـ « ١٢ س - ٤ ص + ٢٥ = ٠ »

٣٦ (دور ثان ٢٠٠٩) إذا كان المماس للمنحنى : ص = س٤ - ٢ س٢ - س عند النقطة أ = (-١ ، ٠) يمس المنحنى عند نقطة أخرى ب فأوجد معادلة العمودى على المنحنى عند ب « س - ص - ٢ = ٠ »

٣٧ أوجد معادلة كل من المماس والعمودى عليه للمنحنى :
ص٢ (٢ أ - س) = س٣ عند النقطة (أ ، أ) بالصورة المتجهة.

٣٨ (دور أول ٢٠٠٣) أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = س٣ والتى يمر المماس للمنحنى عندها بالنقطة (٤ ، ٠) « (٠ ، ٠) ، (٦ ، ٢١٦) »

٣٩ (دور أول ٢٠١٣) إذا كان المماس للمنحنى : ص = س٢ يمر بالنقطة (٣ ، ٥) فأوجد معادلة هذا المماس. « ص - ٢ س + ١ = ٠ ، ص - ١٠ س + ٢٥ = ٠ »

٤٠ إذا كان المماس للمنحنى : س٢ - ص٢ = ١٦ يمر بالنقطة (٢ ، -٢) فأوجد معادلة هذا المماس. « ٥ س - ٣ ص - ١٦ = ٠ »

٤١ إذا كان المستقيم : ١٣ س - ص - ٧ = ٠ يمس المنحنى ص = أ س٣ + ب س٢ عند النقطة (١ ، ٦) فما قيمة كل من : أ ، ب « ١ ، ٥ »

٤٢ إذا كان المنحنى : ص = ٣ س٢ - ٧ س + ٤ يقطع محور السينات فى النقطتين أ ، ب أثبت أن المماسين عند أ ، ب متعامدان.

٤٣ أثبت أن المنحنيين : ص = س٢ + ٦ س + ٥ ، ص = س٣ - س٢ - س + ١ متماسان عند النقطة (-١ ، ٠) وأوجد معادلة المماس المشترك لهما. « ٤ س - ص + ٤ = ٠ »

٤٤ (دور ثان ٢٠٠٦) أوجد قيم : أ ، ب ، حـ حتى يكون لمنحنيى الدالتين :
ص = أ س٣ + ب س ، ص = حـ س٢ - س مماسًا مشتركًا عند النقطة (-١ ، ٢) وأوجد معادلة المماس المشترك. « -١/٢ ، -٣/٢ ، ١ ، ٣ س + ص + ١ = ٠ »

٤٥ إذا قطع أى مستقيم أفقى المنحنى : ص = س٢ فى نقطتين حـ ، ء أثبت أن المماسين المرسومين للمنحنى عند حـ ، ء يتقاطعان دائمًا عند محور الصادات.

٤٦ أوجد قيم : أ ، ب ، حـ الحقيقية حتى يكون المنحنيان ص = أ س٢ ، ص = ب - حـ س٢ متقاطعين على التعامد عند النقطة (√٣/٢ ، ٣/٤) « ١ ، ١ ، ١/٣ »

٤٧ إذا كانت د دالة حيث د (س) = { س٢ + أ عندما س ≥ ٣ ; ب س عندما س < ٣ }
وكان المماس للدالة د عند س = ٣ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية ظلها ٦
فما قيمة : أ ، ب « ٩ ، ٦ »

٤٨ أوجد معادلتى المماسين للدائرة : س٢ + ص٢ = ٥ والذى كل منهما يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية ظلها يساوى ٢ « ص = ٢ س + ٥ ، ص = ٢ س - ٥ »

٤٢ (دور أول ٢٠١٠) أوجد معادلتى المماسين للمنحنى : ص = س² + ٨ اللذان يوازيان المستقيم ص + ٢ س = ٩
«ص + ٢ س – ٨ = ٠ ، ص + ٢ س + ٨ = ٠»

٤٣ إذا كان للمنحنى : ص = ٢ س² + ٣ س² + ٤ س + ٥ مماسان متوازيان أحدهما يمس المنحنى عند النقطة (–١ ، ٢) أوجد معادلة المماس الآخر.
«٤٠ س – ص + ٥ = ٠»

٤٤ (دور أول ٢٠٠٧) أوجد معادلتى المماسين للمنحنى : ص = س³ – ٣ س + ٥ والعمودين على المستقيم : س + ٩ ص = ١
«ص – ٩ س + ١١ = ٠ ، ص – ٩ س – ٢١ = ٠»

٤٥ أوجد معادلتى المماسين لمنحنى الدالة : ص = س + $\frac{١}{س}$ اللذين يوازيان المستقيم ل = (٥ ، ٠) + ك (١ ، –٣)
«٣ س + ص – ٤ = ٠ ، ٣ س + ص + ٤ = ٠»

٤٦ (دور أول ٢٠٠٩) أوجد معادلتى العمودين على المنحنى : س² + ص² – س + ٢ ص – ٢ = صفر عند نقطتى تقاطعه مع محور السينات.
«٣ ص = ٢ س – ٤ ، ٣ ص = –٢ س – ٢»

٤٧ أوجد معادلة المماس للمنحنى : د (س) = س² عند نقط تقاطعه مع المنحنى ق (س) = $\frac{١}{س}$
«٢ س – ص – ١ = ٠»

٤٨ (دور أول ٢٠٠٦) إذا كان المماس للمنحنى : س² + ص² = ٥٠ يصنع مثلثاً متساوى الساقين مع محورى الإحداثيات فى الربع الأول فأوجد معادلة هذا المماس
«ص + س – ١٠ = ٠»

٤٩ أوجد النقطة الواقعة على محور الصادات بحيث يصنع المماسان المرسومان منها للمنحنى ص + س² = ٠ والمستقيم المار بنقطتى التماس مثلث متساوى الأضلاع.
«(٠ ، $\frac{٣}{٤}$)»

٥٠ نقطة تتحرك على المنحنى : ص = س (س – ٥) أوجد موقع النقطة فى اللحظة التى يصنع فيها المماس والعمودى عليه مع محور السينات مثلث متساوى الساقين.
«(٣ ، –٦) ، (٢ ، –٦)»

٥١ أوجد النقط الواقعة على منحنى الدالة : ص = $\frac{١}{٣}$ س³ – $\frac{٣}{٢}$ س² + س + ١ والتى يصنع كل من المماس والعمودى على المماس عندها مع محور السينات مثلث متساوى الساقين
«(٠ ، ١) ، (٣ ، $\frac{١}{٢}$) ، (٢ ، $\frac{١}{٣}$) ، (١ ، $\frac{٥}{٦}$)»

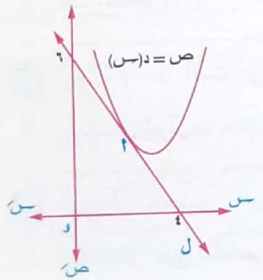
٥٢ إذا كان المنحنى : ص = أ س³ + ب س² + حـ س + ٤ يمر بالنقط (١ ، ٠) ، (٣ ، –٤) ، (٤ ، ٠) والمماس عند النقطة الأولى يوازى محور السينات.
فأوجد قيم : أ ، ب ، حـ ، ٤
«١ ، –٦ ، ٩ ، –٤»

٥٣ إذا كان المنحنيان : (س – أ)² + ص² = ١٨ ، (س + أ)² + ص² = ١٨ متقاطعين على التعامد. فأوجد قيمة : أ
«± ٣»

٥٤ أوجد معادلة العمودى للمنحنى : ص = س² – ٣ س + ٥ عند كل من نقطتى تقاطعه مع الدائرة : س² – ٣ س + ص² = ٢٥
«س – ٣ ص + ١٥ = ٠ ، س + ٣ ص – ١٨ = ٠»

٥٥ أثبت أن المماس لمنحنى الدالة : ص = س³ عند أى نقطة عليه يقطع المنحنى مرة أخرى فى نقطة يكون ميل المماس عندها أربعة أمثال ميله عند النقطة الأولى.

٥٦ فى الشكل المقابل :
المستقيم ل يمس منحنى الدالة
ص = د (س) عند النقطة أ (٢ ، ٣)
وكان : هـ (س) = س² . د (٤ س – ٦)
أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة
هـ عند س = ٢



٥٧ أوجد مساحة المثلث المحدود بمحور الصادات والمماس العمودى عليه للمنحنى :
٤ س² + ص² = ٢٠ عند النقطة (١ ، –٤)
«١٠ وحدة مربعة»

٥٨ أوجد مساحة المثلث المحدود بمحور السينات والمماس والعمودى عليه للمنحنى :
س² + ٤ ص² = ٢٠ عند النقطة (٢ ، ٢)
«٨,٥ وحدة مربعة»

٥٩ أوجد مساحة المثلث المكون من محور السينات والمماس والعمودى عند النقطة (–١ ، ٢) للمنحنى ٤ ص = ٩ – س²
«٥٠ وحدة مربعة»

٦٠ (المنصورة ٢٠١٢) أثبت أن مساحة المثلث المحصور بين المماس للمنحنى : ص = $\frac{١}{س}$ حيث س > صفر عند أى نقطة عليه ومحورى الإحداثيات تساوى ٢ وحدة مربعة.

٦١ أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى : س^{٢} + ٣ س ص + ص^{٢} + ١ = ٠ عند النقطة أ (-١ ، ١) ، وإذا قطعا محور السينات فى النقطتين ب ، حـ احسب مساحة المثلث أ ب حـ بالوحدات المربعة. « ١٠ وحدة مربعة.

٦٢ أوجد مساحة المثلث المكون من محور السينات والمماسين للمنحنى : س^{٢} + ص^{٢} - ٢ س + ٤ ص - ٢٤ = ٠ عند نقطتى تقاطعه مع محور السينات. « ٦٢,٥ وحدة مربعة.

٦٣ أوجد مساحة المثلث المحدد بمحور السينات والمماس والعمودى لمنحنى الدالة د (س) = س^{٢} عند النقطة (٢ ، ٤) الواقعة عليه. « ٣٤ وحدة مربعة.

٦٤ (دور أول ٢٠٠٨) أثبت أن المنحنين : ص = س^{٢} - س ، ٢ ص = - س^{٣} - ٣ س يتماسان ثم أوجد معادلة العمودى على المنحنيين عند نقطة التماس. « س - ٣ ص + ٧ = ٠

٦٥ أثبت أن المنحنين : ص = ٣ س^{٢} - ٥ س - ٢ ، ص = س^{٢} - ٣ س - ٢ يتقاطعان على التعامد عند النقطة (١ ، -٤)

٦٦ أثبت أن المنحنين : (س - ١)^{٢} + ص^{٢} = ٢ ، (س + ١)^{٢} + ص^{٢} = ٢ يتقاطعان على التعامد ، ثم أوجد معادلات المماسات لهما عند نقط التقاطع.

٦٧ أثبت أن المنحنى : ($\frac{س}{أ}$)^{ن} + ($\frac{ص}{ب}$)^{ن} = ٢ يمس المستقيم $\frac{س}{أ}$ + $\frac{ص}{ب}$ = ٢ عند النقطة (أ ، ب) مهما تكن قيمة ن

٦٨ أثبت أن مجموع الجزءين المقطوعين من محورى الإحداثيات بأى مماس للمنحنى : $\sqrt{س}$ + $\sqrt{ص}$ = $\sqrt{أ}$ دائمًا مقدار ثابت.

٦٩ أوجد معادلتى المماسين للمنحنى : ص^{٢} = س^{٣} عند النقطتين الواقعتين عليه ويقعان على مستقيم يوازى المحور الصادى وعلى بعد منه يساوى وحدة طولية فى الاتجاه الموجب لمحور السينات. ثم استنتج معادلتى العمودين عليهما عند هاتين النقطتين.

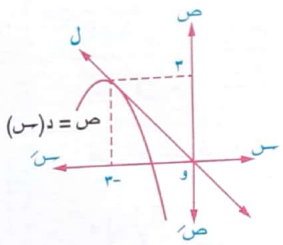
مسائل تقيس مهارات التفكير

٧٠ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان المماس للمنحنى : ص = س^{٣} - ٣ س^{٢} يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن : س ∈

(أ)]٠ ، ٢[(ب)]٠ ، ٢[(جـ) ح -]٠ ، ٢[(د) ح -]٠ ، ٢[

(٢) فى الشكل المقابل :



إذا كان المستقيم ل يمس المنحنى ص = د (س) عند (-٣ ، ٣)

وكان هـ (س) = $\frac{د (٢ - س)}{س - ٢}$

فإن : هـ' (٥) = ...

(أ) صفر (ب) -٢ (جـ) ٢ (د) ٣

(٣) مساحة المثلث المكون من محورى الإحداثيات والمماس للمنحنى س ص = ٤^{٢} عند النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) الواقعة عليه تساوى

(أ) $\frac{٤^{٢} س_{١}}{ص_{١}}$ (ب) $\frac{٤^{٢} ص_{١}}{س_{١}}$ (جـ) ٢ ٤^{٢} (د) ٤ ٤^{٢}

(٤) إذا كان : ص = س + حـ مماس للمنحنى : ٩ س^{٢} + ١٦ ص^{٢} = ١٤٤ فإن : حـ = ...

(أ) ± ٢ (ب) ± ٣ (جـ) ± ٥ (د) ± ٦

(٥) إذا كان العمودى للمنحنى : ٩ ص^{٢} = س^{٣} عند النقطة (أ ، ب) الواقعة على المنحنى يقطع من محورى الإحداثيات أجزاء متساوية فى الطول فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) -٤ (جـ) ٤ (د) -٢

٦ إذا كان المماس للمنحنى : ٢ ص^{٢} = أ س^{٢} + س^{٣} عند النقطة (أ ، ٢) الواقعة على المنحنى يقطع من محورى الإحداثيات الجزئين ل ، م حيث : ل^{٢} + م^{٢} = ٦١

فإن : أ = ...

(أ) ± ٢٠ (ب) ± ٣٠ (جـ) ± ٤٠ (د) ± ٥٠

٧ طول القطعة المماسة المرسومة من النقطة (-٤ ، ٠) للمنحنى ص^{٢} = ٤ س يساوى وحدة طول.

(أ) ٤ $\sqrt{٣}$ (ب) ٤ $\sqrt{٥}$ (جـ) ٤ $\sqrt{٦}$ (د) ٨

٨ فى الشكل المقابل :

إذا كان : ص$_{١}$ = ق$_{١}$ س ، ص$_{٢}$ = ق$_{٢}$ س

وكان ل$_{١}$ ، ل$_{٢}$ يمسان المنحنيان ص$_{١}$ ، ص$_{٢}$ على الترتيب فى النقطتين $\left(\frac{١١\pi}{٦} ، \frac{٢}{٣\sqrt{}}\right)$ ، $\left(\frac{-٢\pi}{٣} ، \frac{-٢}{٣\sqrt{}}\right)$

فإن : ظا θ = ...

(أ) $-\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{-١٢}{٥}$ (د) $\frac{١٢}{٥}$

٧١ أوجد معادلتى المماس والعمودى عليه للمنحنى : ص^{٢} = ٤ س عند النقطة أ (س$_{١}$ ، ٢) الواقعة عليه وإذا كان المماس والعمودى عليه للمنحنى عند أ يقابلان المحور السينى فى ب ، حـ يقابلان المحور الصادى فى ء ، هـ فأوجد النسبة بين طولى $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{ء هـ}$ ثم احسب مساحة الشكل الرباعى ب حـ هـ ء

«٢ : ١ ، ٥ وحدة مربعة»

٧٢ أوجد معادلة المماس المشترك للمنحنين :

ص = س^{٢} - ٦ س + ١٠ ، ص = ٤ س - س^{٢} - ٧

«٤ س + ص - ٩ = ٠ ، ٢ س - ص - ٦ = ٠»

المعدلات الزمنية المرتبطة

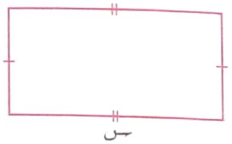
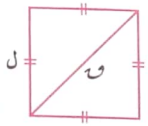
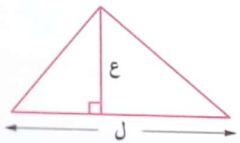
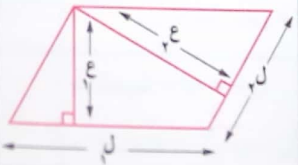
عندما تتعرض صفيحة دائرية لمصدر حرارى فإنها تتمدد أى يزداد طول نصف قطر دائرتها ، وكذلك تزداد مساحة سطحها تبعًا لذلك وهذه الزيادة سواء فى طول نصف القطر أو فى مساحة السطح تتغير بتغير زمن تعرض الصفيحة لهذا المصدر الحرارى.

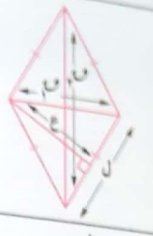
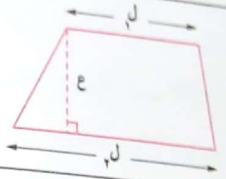
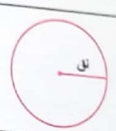
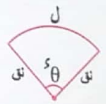
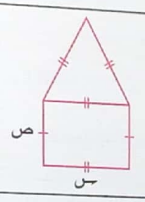
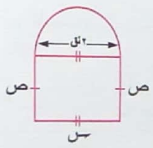
فإذا رمزنا لطول نصف قطر الصفيحة بالرمز (نق) ولمساحة سطحها بالرمز (م) فإن :

$\frac{ء نق}{ء ن}$ ، $\frac{ء م}{ء ن}$ (حيث ن الزمن) تسمى معدلات زمنية مرتبطة ومن العلاقة بين نق ، م نستطيع أن نوجد علاقة بين المعدلين الزمنيين $\frac{ء نق}{ء ن}$ ، $\frac{ء م}{ء ن}$ بحيث إذا علم أحد هذين المعدلين أمكن إيجاد المعدل الآخر.

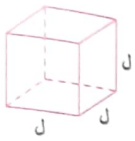
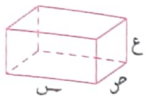
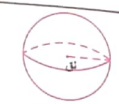
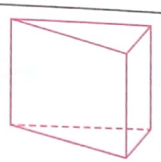
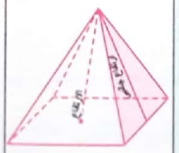
وعلى العموم إذا كانت لدينا علاقة بين عدة متغيرات س ، ص ، ع وباشتقاق هذه العلاقة بالنسبة للزمن ن فإننا نحصل على علاقة بين المعدلات الزمنية : $\frac{ء س}{ء ن}$ ، $\frac{ء ص}{ء ن}$ ، $\frac{ء ع}{ء ن}$

* تذكر مساحات ومحيطات بعض الأشكال الهندسية :

المستطيل		• المحيط = ٢ (س + ص) • المساحة = س × ص
المربع		• المحيط = ٤ ل • المساحة = ل^{٢} = $\frac{١}{٢}$ ق^{٢}
المثلث		• المحيط = مجموع أطوال أضلاعه الثلاثة • المساحة = $\frac{١}{٢}$ × ل × ع = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى أى ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما
متوازى الأضلاع		• المحيط = ٢ (ل$_{١}$ + ل$_{٢}$) • المساحة = ل$_{١}$ × ع$_{١}$ = ل$_{٢}$ × ع$_{٢}$

المعين		• المحيط = ٤ ل • المساحة = ل × ع = $\frac{1}{2}$ ق$_1$ × ق$_2$
شبه المنحرف		• المحيط = مجموع أطوال أضلاعه الأربعة • المساحة = $\frac{1}{2}$ (ل$_1$ + ل$_2$) × ع
الدائرة		• المحيط = ٢ π نق • المساحة = π نق^2
القطاع الدائرى		• المحيط = ٢ نق + ل • المساحة = $\frac{1}{2}$ ل نق = $\frac{1}{2}$ θ^c نق^2 حيث θ^c = $\frac{ل}{نق}$ ، $\frac{س°}{١٨٠°}$ = $\frac{θ^c}{π}$
شباك على شكل مستطيل عليه مثلث متساوى الأضلاع		• المحيط = ٣ س + ٢ ص • المساحة = س ص + $\frac{1}{2}$ س^2 جا ٦٠° = س ص + $\frac{\sqrt{3}}{4}$ س^2
شباك على شكل مستطيل عليه نصف دائرة		نق = $\frac{1}{2}$ س سم • المحيط = س + ٢ ص + π نق = س + ٢ ص + $\frac{1}{2}$ π س • المساحة = س ص + $\frac{1}{2}$ π نق^2 = س ص + $\frac{1}{8}$ π س^2
المضلع المنتظم	حيث ن عدد الأضلاع ، س طول الضلع	• المحيط = ن × س • المساحة = $\frac{1}{4}$ ن س^2 ظا $\frac{π}{ن}$

تذكر الحجوم والمساحات الكلية والجانبية لبعض المجسمات :

المجسم		المساحة الجانبية	المساحة الكلية	الحجم
المكعب		٤ ل^2	٦ ل^2	ل^3
متوازى المستطيلات		٢ (س + ص) × ع	٢ (س ص + ص ع + ع س)	س × ص × ع
الأسطوانة الدائرية القائمة		٢ π نق ع	٢ π نق ع + ٢ π نق^2 = ٢ π نق (ع + نق)	π نق^2 ع
الكرة		———	٤ π نق^2	$\frac{4}{3}$ π نق^3
المخروط القائم		π نق ل	π نق ل + π نق^2	$\frac{1}{3}$ π نق^2 ع
المنشور		محيط القاعدة × الارتفاع	المساحة الجانبية + مجموع مساحتى القاعدتين	مساحة القاعدة × الارتفاع
الهرم المنتظم		$\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى	المساحة الجانبية + مساحة القاعدة	$\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

1

ملاحظات

① إذا كان المتغير س
- يتزايد / يبتعد / يتمدد / يُصب / يتراكم
- يتناقص / يقترب / ينكمش / يتسرب / ينصهر

بتزايد الزمن فإن $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ يكون
- موجبًا
- سالبًا

② المسافة بين أى نقطتين $(س_١ ، ص_١)$ ، $(س_٢ ، ص_٢)$ هى $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

③ حجم الجزء المحصور بين كرتين متحدتى المركز طولا نصفى قطريهما $نق_١$ ، $نق_٢$ يساوى $\frac{٤}{٣} \pi (نق_٢^٣ - نق_١^٣)$



④ إذا كانت : ك = س × ص × ع (ثلاث متغيرات)
فإن : $\frac{\text{د ك}}{\text{د ن}} = \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} \times ص ع + \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} \times س ع + \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} \times س ص$

⑤ بُعد النقطة $(س_١ ، ص_١)$ عن المستقيم $أ س + ب ص + حـ = ٠$ هو : $\frac{|أ س_١ + ب ص_١ + حـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$

مثال ١

تتحرك نقطة على المنحنى : $س^٢ + ص^٢ - ٥ س + ٤ ص + ٩ = ٠$

فإذا كان معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن عند النقطة $(٢ ، -١)$ يساوى ٣

فأوجد معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن عند نفس النقطة.

الحل

$\because س^٢ + ص^٢ - ٥ س + ٤ ص + ٩ = ٠$ (بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن)

$\therefore ٢ س \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + ٢ ص \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} - ٥ \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + ٤ \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٠$

$\therefore (٢ س - ٥) \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + (٢ ص + ٤) \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٠$

، $\because \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٣$ عند النقطة $(٢ ، -١)$ $\therefore (٤ - ٥) \times ٣ + (-٢ + ٤) \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٠$

$\therefore -٣ + ٢ \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٠$ $\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ١,٥$

مثال ٢

تتحرك نقطة على المنحنى : $س ص = س^٢ + ص - ٥$ أوجد موقع النقطة فى اللحظة التى يكون فيها معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن يساوى معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن.

الحل

$\because س ص = س^٢ + ص - ٥$ (بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن)

$\therefore س \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} + ص \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$

، $\because \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ $\therefore (س + ص) \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٢ \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ وبالقسمة على $\left(\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right)$

$\therefore س + ص = ٢$ $\therefore ص = ٢ - س$

وبالتعويض فى معادلة المنحنى : $\therefore س (٢ - س) = س + ٢ - س - ٥$

$\therefore ٢ س - س^٢ + ٣ = ٠$ $\therefore س^٢ - ٢ س - ٣ = ٠$

$\therefore (س - ٣) (س + ١) = ٠$ $\therefore س = ٣$ ومنها ص = -١

أ، س = -١ ومنها ص = ٣ $\therefore$ النقط هى : $(٣ ، -١)$ ، $(-١ ، ٣)$

مثال ٣

يتسرب غاز من بالون كروى بمعدل ١٠ π سم^٣ / ث

أوجد فى اللحظة التى يكون فيها طول نصف قطره = ١٠ سم

① معدل تغير طول نصف قطر البالون. ② معدل تغير مساحة سطح البالون.

الحل

نفرض أن طول نصف قطر البالون = نق سم

، مساحة سطح البالون = م سم^٢ ، حجم البالون = ح سم^٣

① $\because ح = \frac{٤}{٣} \pi نق^٣$ $\therefore \frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = ٤ \pi نق^٢ \frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$

$\therefore -١٠ \pi \times ٤ \pi \times (١٠)^٢ \times \frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$ $\therefore \frac{\text{د نق}}{\text{د ن}} = \frac{-١}{٤٠}$ سم/ث

$\therefore \frac{ع م}{ع ن} = 8\pi$ نق $\frac{ع$ نق$}{ع ن}$

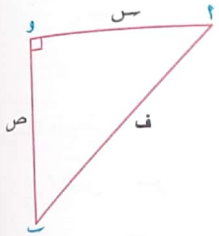
② $\because م = \frac{4}{3}\pi$ نق^3

$\therefore \frac{ع م}{ع ن} = \pi 8 \times 10 \times \frac{1}{60} = -2\pi$ سم^3 / ث

مثال 4

يسير قطار بادئًا حركته فى العاشرة صباحًا فى اتجاه الشرق بسرعة ٢٠ كم/س بينما بدأ قطار آخر حركته الساعة ١٢ ظهرًا من نفس النقطة متجهًا إلى الجنوب بسرعة ٣٠ كم/س أوجد معدل زيادة المسافة بينهما عند الساعة الثانية ظهرًا.

الحل



نفرض أن القطار الأول على بعد (س) كم من (و)

والقطار الثانى على بعد (ص) كم من (و) والمسافة

بين القطارين (ف) كم

$\because$ ف^2 = س^2 + ص^2

$\therefore 2$ ف $\frac{ع ف}{ع ن} = 2$ س $\frac{ع س}{ع ن} + 2$ ص $\frac{ع ص}{ع ن}$ (١)

عند الساعة الثانية ظهرًا

$\therefore$ س = ٤ × ٢٠ = ٨٠ كم ، ص = ٢ × ٣٠ = ٦٠ كم

$\therefore$ ف = $\sqrt{(80)^2 + (60)^2}$ = ١٠٠ كم

ومن المعادلة (١) : $\therefore 2 \times 100 \times \frac{ع ف}{ع ن} = 2 \times 80 \times 20 + 2 \times 60 \times 30$

$\therefore \frac{ع ف}{ع ن}$ = ٣٤ كم/س

ملاحظة هامة

إذا كانت س$_.$ القيمة الابتدائية للمتغير س عند ($ن = 0$)

، وكان معدل تغير س بالنسبة للزمن ثابت (أى أن : $\frac{ع س}{ع ن}$ = مقدار ثابت)

، س قيمة المتغير بعد زمن ن

فإن : $س = س_. + \frac{ع س}{ع ن} \times ن$

فمثلًا : ① إذا كان طول ساق معدنية = ١٦٠ سم تعرضت للتسخين فتمددت بمعدل ٢ سم/ث

فإن طول القضيب بعد ن ثانية ل = ل$_.$ + $\frac{ع ل}{ع ن} \times ن$

$\therefore$ ل = ١٦٠ + ٢ ن

ل$_.$ = ١٦٠ سم

$\frac{ع ل}{ع ن}$ = ٢ سم/ث

② إذا انطلق صاروخ كتلته ١٧ طن وكان ينفث الوقود بمعدل ٢٠٠ كجم/ث

فإن كتلة الصاروخ بعد ٤٠ ثانية من لحظة انطلاقه

ك = ك$_.$ + $\frac{ع ك}{ع ن} \times ن$

$\therefore$ ك = ١٧٠٠٠ − ٢٠٠ × ٤٠ = ٩٠٠٠ كجم = ٩ طن

ك$_.$ = ١٧ طن = ١٧٠٠٠ كجم

$\frac{ع ك}{ع ن}$ = −٢٠٠ كجم/ث

مثال 5

إذا كان طولا ضلعى القائمة فى مثلث قائم الزاوية هما ٨ سم ، ٦ سم وكان طول الضلع الأول يتناقص بمعدل $\frac{1}{2}$ سم/د وطول الضلع الثانى يتزايد بمعدل ١ سم/د

أوجد : ① معدل تزايد مساحة سطح المثلث بعد دقيقتين.

② الزمن الذى بعده تنعدم الزيادة.

الحل

$\because$ طول الضلع الأول يتناقص بمعدل $\frac{1}{2}$ سم/د

$\therefore$ بعد ن ثانية يصبح طوله = $\left(8 - \frac{1}{2} ن\right)$ سم

، طول الضلع الثانى يتزايد بمعدل ١ سم/د

$\therefore$ بعد ن ثانية يصبح طوله = $(6 + ن)$ سم

$\therefore$ مساحة المثلث (م) = $\frac{1}{2} \times \left(8 - \frac{1}{2} ن\right) \times (6 + ن) = (6 + ن) \times \left(4 - \frac{1}{4} ن\right)$

$= 24 + \frac{5}{2} ن - \frac{1}{4} ن^2$

$\therefore \frac{ع م}{ع ن} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} ن$ ∴ $\left(\frac{ع م}{ع ن}\right)_{ن=2} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}(2) = 1.5$ سم/د

وعندما $\frac{ع م}{ع ن} = 0$ ∴ $\frac{5}{2} - \frac{1}{2} ن = 0$ ∴ ن = ٥ دقيقة.

تذكر أن :

$ل = ل_. + \frac{ع ل}{ع ن} \times ن$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

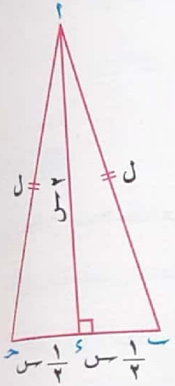
مثال ٦

صفيحة معدنية على شكل مثلث متساوى الساقين ارتفاعه يساوى ضعف طول قاعدته فإذا كان طول قاعدته يزداد بالتسخين بمعدل ٠,٠٤ سم/ثانية.

فأوجد : ① معدل الزيادة فى مساحة سطح الصفيحة عندما يكون طول القاعدة ٨ سم

② معدل التغير فى طول كل من الساقين.

الحل



نفرض أن طول قاعدة المثلث = س سم

∴ ارتفاعه = ٢ س سم

، مساحة المثلث = م سم^{٢} ، طول كل من الساقين = ل

① ∵ م = $\frac{١}{٢}$ س × ٢ س = س^{٢} (وبالاشتقاق بالنسبة إلى ن)

∴ $\frac{د م}{د ن}$ = ٢ س $\frac{د س}{د ن}$

∴ $\left(\frac{د م}{د ن}\right)_{س=٨}$ = ٢ × ٨ × ٠,٠٤ = ٠,٦٤ سم^{٢}/ثانية.

② ∵ ل^{٢} = (٢ س)^{٢} + $\left(\frac{١}{٢}س\right)^{٢}$ = ٤ س^{٢} + $\frac{١}{٤}$ س^{٢} = $\frac{١٧}{٤}$ س^{٢}

∴ ل = $\frac{\sqrt{١٧}}{٢}$ س

∴ $\frac{د ل}{د ن}$ = $\frac{\sqrt{١٧}}{٢}$ $\frac{د س}{د ن}$ (وبالاشتقاق بالنسبة إلى ن)

∴ $\frac{د ل}{د ن}$ = $\frac{\sqrt{١٧}}{٢}$ × ٠,٠٤ = ٠,٠٢ $\sqrt{١٧}$ سم/ثانية.

مثال ٧

أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها = $\frac{٧}{٦}$ طول قطر قاعدتها. أوجد معدل تغير حجمها عندما يكون طول نصف قطر قاعدتها ٦ سم إذا كان ارتفاعها يتغير بمعدل ٠,٠١ سم/ثانية.

الحل

نفرض أن طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة = نق سم وارتفاعها = ع سم

∴ ع = $\frac{٧}{٦}$ × ٢ نق = $\frac{٧}{٣}$ نق

∴ نق = $\frac{٣}{٧}$ ع

، ∵ ح = π نق^{٢} ع = π $\left(\frac{٣}{٧}ع\right)^{٢}$ × ع = $\frac{٩}{٤٩}$ π ع^{٣} (بالاشتقاق بالنسبة إلى ن)

∴ $\frac{د ح}{د ن}$ = $\frac{٢٧}{٤٩}$ π ع^{٢} × $\frac{د ع}{د ن}$ ، عندما نق = ٦ سم ∴ ع = ١٤ سم

∴ $\frac{د ح}{د ن}$ = $\frac{٢٧}{٤٩}$ π × (١٤)^{٢} × ٠,٠١ = ١,٠٨ π سم^{٣}/ثانية.

ملاحظة

إذا كان س قياس زاوية بالتقدير الدائرى فإن :

① $\frac{د (جا س)}{د ن}$ = (جتا س) × $\frac{د س}{د ن}$ ② $\frac{د (ظا س)}{د ن}$ = (قا^{٢} س) × $\frac{د س}{د ن}$

③ $\frac{د (جتا س)}{د ن}$ = (− جا س) × $\frac{د س}{د ن}$

من الملاحظة السابقة نلاحظ أن :

* $\left[\frac{د (جا س)}{د ن}\right]_{س=٠}$ = ١ × $\frac{د س}{د ن}$ ، $\left[\frac{د (ظا س)}{د ن}\right]_{س=٠}$ = ١ × $\frac{د س}{د ن}$

∴ $\frac{د (جا س)}{د ن}$ = $\frac{د (ظا س)}{د ن}$ (عند س = ٠)

أى أن : يتزايد الجيب والظل بنفس المعدل عند س = ٠

* $\left[\frac{د (جا س)}{د ن}\right]_{س=\frac{\pi}{٣}}$ = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{د س}{د ن}$ ، $\left[\frac{د (ظا س)}{د ن}\right]_{س=\frac{\pi}{٣}}$ = ٤ × $\frac{د س}{د ن}$

∴ $\frac{د (ظا س)}{د ن}$ = ٨ $\frac{د (جا س)}{د ن}$ $\left(\text{عند } س = \frac{\pi}{٣}\right)$

أى أن : يتزايد الظل بمعدل ٨ مرات قدر تزايد الجيب عند س = $\frac{\pi}{٣}$

* $\left[\frac{د (جتا س)}{د ن}\right]_{س=\frac{\pi}{٦}}$ = − $\frac{١}{٢}$ × $\frac{د س}{د ن}$ ، $\left[\frac{د (ظا س)}{د ن}\right]_{س=\frac{\pi}{٦}}$ = $\frac{٤}{٣}$ × $\frac{د س}{د ن}$

∴ $\frac{د (جتا س)}{د ن}$ = $\frac{-٣}{٨}$ $\frac{د (ظا س)}{د ن}$ $\left(\text{عند } س = \frac{\pi}{٦}\right)$

أى أن : يتناقص جيب التمام بمعدل $\frac{٣}{٨}$ مرة قدر تزايد الظل عند س = $\frac{\pi}{٦}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال 5

ضلعان في مثلث يتزايد طول كل منهما بمعدل $\frac{1}{\sqrt{2}}$ سم/ث ويتزايد قياس الزاوية المحصورة بينهما بمعدل $\frac{1}{4}$ ط/ث أوجد معدل تغير مساحة المثلث عند اللحظة التي يكون فيها طول كل ضلع من أضلاع المثلث = ١٢ سم

الحل

نفرض أن مساحة المثلث = م ∴ م = $\frac{1}{2}$ أ ب جا ح

∴ $\frac{د م}{د ن}$ = $\frac{1}{2}$ أ ب × جتا ح × $\frac{د ح}{د ن}$ + $\frac{1}{2}$ جا ح ($أ \frac{د ب}{د ن}$ + ب $\frac{د أ}{د ن}$)

∵ $\frac{د أ}{د ن}$ = $\frac{د ب}{د ن}$ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\frac{د ح}{د ن}$ = $\frac{1}{4}$

، عندما يكون طول كل ضلع من أضلاع المثلث = ١٢ سم يكون المثلث متساوى الأضلاع

∴ ق (د ح) = $\frac{\pi}{3}$

∴ $\frac{د م}{د ن}$ = $\frac{1}{2}$ × ١٢ × ١٢ × $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{4}$ × $\frac{1}{2}$ × ١٢ × ١٢ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ × (٢ × ١٢ × $\frac{1}{\sqrt{3}}$) = ١٥ سم^{٢}/ث

مثال 6

مثلث متساوى الساقين طول كل من ساقيه ٣٠ سم وقياس الزاوية بينهما = س فإذا تغيرت س بمعدل ٤ درجة لكل دقيقة أوجد معدل تغير مساحة المثلث عندما س = ٦٠°

الحل

∵ المساحة م = $\frac{1}{2}$ × ٣٠ × ٣٠ × جا س

∴ م = ٤٥٠ جا س (بالاشتقاق بالنسبة إلى ن)

∴ $\frac{د م}{د ن}$ = ٤٥٠ جتا س × $\frac{د س}{د ن}$

، عندما س = ٦٠° ، $\frac{د س}{د ن}$ = ٤° × $\frac{\pi}{180°}$ = $\frac{\pi}{45}$ ط/دقيقة.

∴ $\frac{د م}{د ن}$ = ٤٥٠ جتا ٦٠° × $\frac{\pi}{45}$ = ٥ ط سم^{٢}/دقيقة.

لاحظ أن

الزاوية س لابد أن تكون بالتقدير الدائرى

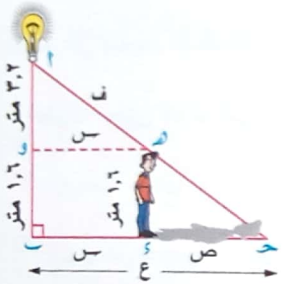
مثال 7

يسير رجل طوله ١,٦ متر بسرعة ٤ م/ث مبتعدًا عن عمود إضاءة معلق به مصباح يعلو سطح الأرض بـ ٤,٨ متر عن سطح الأرض.

أوجد: ① معدل تغير طول ظل الرجل. ② سرعة تحرك نهاية ظل الرجل.

③ معدل تغير بعد رأس الرجل عن المصباح وذلك عندما يكون الرجل على بعد ٢,٤ متر من عمود الإضاءة.

الحل



نفرض أن المسافة التى تحركها الرجل = س

، طول ظل الرجل = ص

، المسافة التى تحركتها نهاية ظل الرجل = ع

، بعد رأس الرجل عن المصباح = ف

① ∵ Δ أ ب حـ ~ Δ ء د حـ ∴ $\frac{س + ص}{ص}$ = $\frac{٤,٨}{١,٦}$

∴ ٣ ص = س + ص

∴ ٢ ص = س

∴ ٢ $\frac{د ص}{د ن}$ = $\frac{د س}{د ن}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى الزمن ن)

∴ $\frac{د ص}{د ن}$ = $\frac{1}{2}$ × ٤ = ٢ م/ث

② ∵ ع = ص + س

∴ $\frac{د ع}{د ن}$ = $\frac{د ص}{د ن}$ + $\frac{د س}{د ن}$ = ٢ + ٤ = ٦ م/ث

③ ∵ ف^{٢} = س^{٢} + (٣,٢)^{٢} ، عندما س = ٢,٤ متر

∴ ف = ٤ متر

∴ ٢ ف $\frac{د ف}{د ن}$ = ٢ س $\frac{د س}{د ن}$ (وبالاشتقاق بالنسبة إلى ن)

∴ ٢ × ٤ × $\frac{د ف}{د ن}$ = ٢ × ٢,٤ × ٤

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

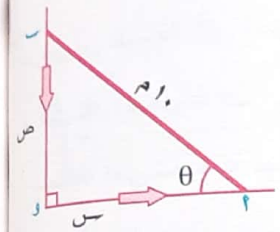
مثال ١١

سلم طوله ١٠ أمتار يستند طرفه السفلى على أرض أفقية وطرفه العلوى على حائط رأسى فإن انزلاق الطرف السفلى مبتعدًا عن الحائط بمعدل ٢ م/ث عندما يكون الطرف السفلى على بعد ٨ أمتار من الحائط.

أوجد : ① معدل انزلاق الطرف العلوى.

② سرعة تغير الزاوية بين السلم والأرض.

الحل



نفرض أن الطرف السفلى للسلم على بعد س متر من الحائط

، الطرف العلوى للسلم على بعد ص متر من الأرض.

① ∵ $س^{٢} + ص^{٢} = ١٠٠$

، عند س = ٨ متر فإن : ص = ٦ متر

، $٢ س \frac{ع س}{ع ن} + ٢ ص \frac{ع ص}{ع ن} = ٠$ ∴ $س \frac{ع س}{ع ن} + ص \frac{ع ص}{ع ن} = ٠$

∴ $٨ \times ٢ + ٦ \times \frac{ع ص}{ع ن} = ٠$ ∴ $\frac{ع ص}{ع ن} = \frac{-٨}{٣}$ م/ث

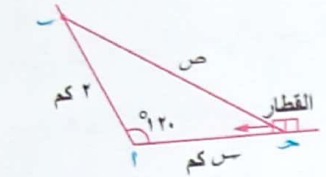
② ∵ $\frac{ص}{١٠} = جا \theta$ ∴ $\frac{١}{١٠} \frac{ع \theta}{ع ن} = جا \theta \frac{ع ص}{ع ن}$

∴ $\frac{٨}{١٠} \times \frac{١}{١٠} = \frac{ع \theta}{ع ن} \times \frac{-٨}{٣}$ ∴ $\frac{ع \theta}{ع ن} = \frac{-١}{٣}$ ع/ث

مثال ١٢

خطان حديديان متلاقيان فى زاوية قياسها ١٢٠° يسير قطار على أحدهما بسرعة ٦٥ كم/ساعة نحو نقطة التقاطع ا أوجد معدل اقتراب القطار من المحطة ب التى تقع على الخط الحديدى الآخر وعلى بعد من ا قدره ٢ كم وذلك فى اللحظة التى يكون فيها القطار على بعد من ا قدره $١\frac{٣}{٤}$ كم.

الحل



نفرض أن بعد القطار عن ا فى لحظة ما = س كم

وأن بعده عن المحطة ب فى هذه اللحظة = ص كم

، ∵ القطار يقترب من ا بسرعة ٦٥ كم/ساعة

∴ $\frac{ع س}{ع ن} = -٦٥$ كم/ساعة

من Δ ا ب حـ : ∵ $ص^{٢} = س^{٢} + (٢)^{٢} - ٢ \times س \times ٢ \times جتا ١٢٠°$

∴ $ص^{٢} = س^{٢} + ٢ س + ٤$ (وبالاشتقاق بالنسبة إلى ن)

∴ $٢ ص \frac{ع ص}{ع ن} = (٢ س + ٢) \frac{ع س}{ع ن}$ ∴ $ص \frac{ع ص}{ع ن} = (س + ١) \frac{ع س}{ع ن}$ (١)

، ∵ $س = \frac{٧}{٤}$ ∴ $ص^{٢} = \frac{٤٩}{١٦} + \frac{٧}{٢} + ٤ = \frac{١٦٩}{١٦}$

∴ $ص = \frac{١٣}{٤} = ٣\frac{١}{٤}$ كم

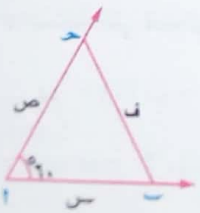
وبالتعويض فى (١) : ∴ $\frac{١٣}{٤} \times \frac{ع ص}{ع ن} = \left(١ + \frac{٧}{٤}\right) \times -٦٥$ ∴ $\frac{ع ص}{ع ن} = -٥٥$

أى أن معدل اقتراب القطار من المحطة ب عند اللحظة المذكورة = ٥٥ كم/ساعة.

مثال ١٣

$\overleftarrow{ا ب}$ ، $\overleftarrow{ا حـ}$ طريقان متلاقيان يحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° تحركت سيارة على الطريق $\overleftarrow{ا ب}$ من نقطة ا بسرعة ٤٠ كم/ساعة وبعد ١٠ دقائق تحركت سيارة أخرى على الطريق $\overleftarrow{ا حـ}$ من نقطة ا بسرعة ٦٠ كم/ساعة. أوجد معدل تباعدهما بعد مضى ٢٠ دقيقة من تحرك السيارة الثانية.

الحل



نفرض أن السيارة الأولى قطعت مسافة س ∴ $\frac{ع س}{ع ن} = ٤٠$ كم/س

والسيارة الثانية قطعت مسافة ص ∴ $\frac{ع ص}{ع ن} = ٦٠$ كم/س

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

∴ ف^{2} = س^{2} + ص^{2} − ٢ س ص جتا ٦٠°

(١) (بالاشتقاق بالنسبة إلى ن)

∴ ف^{2} = س^{2} + ص^{2} − س ص

∴ ٢ ف $\frac{ع ف}{ع ن}$ = ٢ س $\frac{ع س}{ع ن}$ + ٢ ص $\frac{ع ص}{ع ن}$ − [س $\frac{ع ص}{ع ن}$ + ص × $\frac{ع س}{ع ن}$] (٢)

وبعد مضى ٢٠ دقيقة من حركة السيارة الثانية أى : ن = $\frac{٢٠}{٦٠}$ = $\frac{١}{٣}$ ساعة

∴ ص = ٦٠ × $\frac{١}{٣}$ = ٢٠ كم

نجد أن السيارة الأولى تحركت (١٠ + ٢٠ = ٣٠ دقيقة) أى : ن = $\frac{٣٠}{٦٠}$ = $\frac{١}{٢}$ ساعة

∴ س = ٤٠ × $\frac{١}{٢}$ = ٢٠ كم

ومن (١) نجد أن : ف = $\sqrt{(٢٠)^{٢} + (٢٠)^{٢} - ٢٠ \times ٢٠}$ = ٢٠ كم

وبالتعويض فى (٢) :

∴ ٢ × ٢٠ $\frac{ع ف}{ع ن}$ = ٢ × ٢٠ × ٤٠ + ٢ × ٢٠ × ٦٠ − [٢٠ × ٦٠ + ٢٠ × ٤٠]

∴ $\frac{ع ف}{ع ن}$ = ٥٠ كم/س

حل آخر :

∵ المسافة التى تحركتها السيارة الأولى قبل

تحرك السيارة الثانية = ٤٠ × $\frac{١٠}{٦٠}$ = $\frac{٢٠}{٣}$ كم

ونفرض أن السيارتين تحركت معًا زمن = ن ساعة

فإن المسافة التى قطعتها السيارة الأولى = ٤٠ ن + $\frac{٢٠}{٣}$

، المسافة التى قطعتها السيارة الثانية = ٦٠ ن

∴ ف^{2} = (٤٠ ن + $\frac{٢٠}{٣}$)^{٢} + (٦٠ ن)^{٢} − ٢ (٤٠ ن + $\frac{٢٠}{٣}$) (٦٠ ن) × $\frac{١}{٢}$ (١)

، عندما ن = ٢٠ دقيقة = $\frac{٢٠}{٦٠}$ = $\frac{١}{٣}$ ساعة ∴ ف = ٢٠ كم

وبالاشتقاق العلاقة (١) بالنسبة للزمن (ن)

∴ ٢ ف $\frac{ع ف}{ع ن}$ = ٢ (٤٠ ن + $\frac{٢٠}{٣}$) × ٤٠ + ٢ (٦٠ ن) × ٦٠

− [(٤٠ ن + $\frac{٢٠}{٣}$) (٦٠) + (٦٠ ن) × (٤٠)]

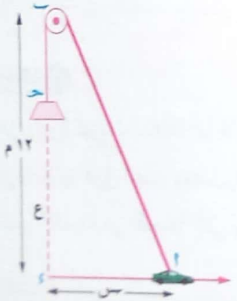
∴ ٢ ف $\frac{ع ف}{ع ن}$ = ٥٦٠٠ ن + $\frac{٤٠٠}{٣}$

∴ ٢ × ٢٠ $\frac{ع ف}{ع ن}$ = ٥٦٠٠ × $\frac{١}{٣}$ + $\frac{٤٠٠}{٣}$

∴ $\frac{ع ف}{ع ن}$ = ٥٠ كم/س

مثال ١٤

حبل طوله ٢٥ متر يمر حول بكرة ترتفع عن الأرض ١٢ متر مربوط بطرفه ثقل والطرف الآخر مربوط فى سيارة تسير على الأرض بسرعة ٦ م/ث ، أوجد معدل ارتفاع الثقل فى اللحظة التى تبعد فيها السيارة مسافة ١٦ متر عن مسقط البكرة على سطح الأرض.



الحل

نفرض أن ارتفاع الثقل = ع وبعد السيارة

عن مسقط البكرة = س

∴ ب حـ = ١٢ − ع

، أ ب = ٢٥ − (١٢ − ع) = ١٣ + ع

ومن هندسة الشكل :

∴ (١٣ + ع)^{٢} = س^{٢} + (١٢)^{٢} (١)

∴ ٢ (١٣ + ع) $\frac{ع ع}{ع ن}$ = ٢ س $\frac{ع س}{ع ن}$ ، عندما س = ١٦ مترًا

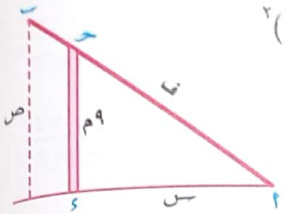
، من معادلة (١) : ∴ (١٣ + ع)^{٢} = ٤٠٠ ∴ ع = ٧ مترًا

∴ ٢ (٧ + ١٣) $\frac{ع ع}{ع ن}$ = ٢ × ١٦ × ٦ ∴ $\frac{ع ع}{ع ن}$ = ٤,٨ م/ث

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال (١٥)

يستند قضيب $\overline{أ ب}$ طوله ١٥ متر بطرفه $أ$ على أرض أفقية وبإحدى نقطه $ح$ على حائط رأسى ارتفاعه ٩ متر. إذا انزلق الطرف $أ$ مبتعدًا عن الحائط بمعدل $\frac{١}{٢}$ م/دقيقة فأوجد معدل هبوط الطرف $ب$ عندما يصل إلى حافة الحائط.



الحل

نفرض أن $أ ح = ف$ ، $أ ء = س$

$\therefore ٢ ف \frac{ء ف}{ء ن} = ٢ س \frac{ء س}{ء ن}$

، عندما يصل طرف القضيب إلى حافة الحائط

$\therefore ف = ١٥$ م ، $س = ١٢$ م

$\therefore ٢ \times ١٥ \times \frac{ء ف}{ء ن} = ٢ \times ١٢ \times \frac{١}{٢}$ $\quad\therefore \frac{ء ف}{ء ن} = ٠,٤$ م/د

ومن هندسة الشكل نجد أن : $\frac{ف}{١٥} = \frac{٩}{ص}$ $\quad\therefore ف ص = ١٣٥$

$\therefore ف \frac{ء ص}{ء ن} + ص \frac{ء ف}{ء ن} = ٠$ $\quad\therefore ١٥ \frac{ء ص}{ء ن} + ٩ \times ٠,٤ = ٠$

$\therefore \frac{ء ص}{ء ن} = -٠,٢٤$ م/د

مثال (١٦)

فى دائرة كهربائية مغلقة إذا كان $ح$ فرق الجهد (فولت) ، $ت$ شدة التيار (أمبير) ، $م$ المقاومة (أوم) وإذا تزايد فرق الجهد بمعدل ٢ فولت/ث وتناقصت شدة التيار بمعدل $\frac{١}{٢}$ أمبير/ث أوجد معدل تغير المقاومة فى اللحظة التى يكون فيها $ح = ٢٤$ فولت ، $ت = ٤$ أمبير علمًا بأن $[ح = ت \times م]$

الحل

$\because ح = ت \times م$ (باشتقاق الطرفين بالنسبة للزمن) $\quad\therefore \frac{ء ح}{ء ن} = ت \times \frac{ء م}{ء ن} + م \frac{ء ت}{ء ن}$

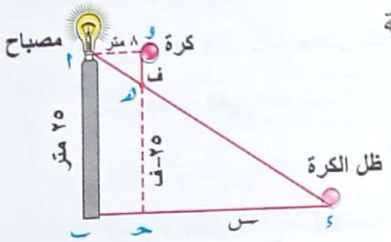
، $\because \frac{ء ح}{ء ن} = ٢$ فولت/ث ، $\frac{ء ت}{ء ن} = \frac{-١}{٢}$ أمبير/ث

، $ح = ٢٤$ فولت ، $ت = ٤$ أمبير $\quad\therefore م = \frac{ح}{ت} = \frac{٢٤}{٤} = ٦$ أوم

$\therefore ٢ = ٤ \times \frac{ء م}{ء ن} + ٦ \times \frac{-١}{٢}$ $\quad\therefore \frac{ء م}{ء ن} = \frac{٥}{٤}$ أوم/ث

مثال (١٧)

مصباح مضيء مثبت فى قمة برج ارتفاعه ٢٥ متر إذا سقطت كرة من نفس الارتفاع من نقطة تبعد ٨ متر عن المصباح أوجد سرعة تحرك ظل الكرة على الأرض عندما تكون الكرة على ارتفاع ١٥ متر عن سطح الأرض.



الحل

نفرض أن الكرة هبطت مسافة (ف) بعد مرور ($ن$) ثانية

وأن ظل الكرة فى هذه اللحظة يبعد مسافة ($س$)

عن مسقط الكرة على الأرض ($ح$)

$\because \Delta أ و هـ \sim \Delta ء ح هـ$

$\therefore \frac{ف}{٢٥ - ف} = \frac{٨}{س}$

$\therefore س = \frac{٢٠٠ - ٨ ف}{ف} = \frac{٢٠٠}{ف} - ٨$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى $ن$)

$\therefore \frac{ء س}{ء ن} = \frac{-٢٠٠}{ف^٢} \times \frac{ء ف}{ء ن}$ $\quad(١)$

عند اللحظة التى تكون الكرة فيها على ارتفاع ١٥ متر تكون ف = ١٠ متر

، $\because ع^٢ = ع_٠^٢ + ٢ ء ف$ $\quad\therefore ع^٢ =$ صفر $+ ٢ \times ٩,٨ \times ١٠ = ١٩٦$

$\therefore ع = ١٤$ م/ث $\quad\therefore \frac{ء ف}{ء ن} = ١٤$ م/ث

وبالتعويض فى (١) : $\therefore \frac{ء س}{ء ن} = \frac{-٢٠٠}{(١٠)^٢} \times ١٤ = -٢٨$ م/ث

أى أن ظل الكرة يتحرك مقتربًا من مسقط الكرة على الأرض بسرعة ٢٨ م/ث

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمارين 5 على المعدلات الزمنية المرتبطة

اختبار تفاعلي

• فهم • تطبيق • مستويات عليا — من أسئلة الكتاب المدرسى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مستطيل طوله ضعف عرضه يتمدد بانتظام بحيث يظل محتفظًا بشكله وبنفس النسبة بين أبعاده فإذا كان معدل تغير الطول هو ٦ سم/ث

فإن معدل تغير العرض = ... سم/ث.

(أ) ١٢ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) −٣

(٢) إذا زاد طول ضلع مثلث متساوى الأضلاع بمعدل ٢ سم/ث

فإن محيط المثلث يزداد بمعدل

(أ) ٢ (ب) ٨ (جـ) ٤ (د) ٦

(٣) مربع طول ضلعه ٥ سم بدأ طول الضلع فى التزايد بمعدل ٢ سم/ث

فإن طول ضلع المربع بعد زمن $ن$ ثانية يعطى بالعلاقة

(أ) $٢ن$ (ب) $٥ + ٢ن$ (جـ) $٢ن - ٥$ (د) $٥ + ٤ن^٢$

(٤) إذا كان : $ص = س^٢ - ٣س$ فإن : $\frac{د ص}{د ن} = \frac{د س}{د ن}$ عند $س$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٥) إذا تحرك جسيم على المنحنى : $ص^٢ + س^٢ = ١٠$ بحيث كان $\frac{د ص}{د ن} = ٤$

فإن : $\frac{د س}{د ن}$ = ... عند النقطة $(\sqrt{٥}، -\sqrt{٥})$

(أ) ٢ (ب) $٢\sqrt{٥}$ (جـ) ٤ (د) $٤\sqrt{٥}$

(٦) تتحرك نقطة على المنحنى $ص = ٢س + ١$ فإن النسبة بين معدل تغير الإحداثى السينى بالنسبة للزمن للنقطة إلى معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن تساوى

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $-\frac{١}{٢}$

٢ تتحرك نقطة على المنحنى : $س^٢ + ص^٢ - ٤س + ٨ص - ٦ = ٠$ وكان معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن $ن$ عند النقطة (٣ ، ١) يساوى ٤ وحدات/ث ، أوجد معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن عند نفس النقطة.

« $-\frac{٤}{٥}$ »

٣ تتحرك نقطة على المنحنى : $س^٢ + س ص + ص^٢ = ٧$ وكان معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن عند النقطة (−١ ، ٣) يساوى ٠,١ أوجد معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن عند نفس النقطة.

« $-\frac{١}{٥٠}$ »

٤ (دور أول ٢٠١١) تتحرك نقطة (س ، ص) على المنحنى الذى معادلته :

$س^٢ + ص^٢ + ٢س - ٤ص = ٢٧$ عين موضع هذه النقطة فى اللحظة التى يكون عندها معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن مساويًا لمعدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن.

«(−٥ ، ٦) ، (٣ ، −٢)»

٥ (دور ثان ٢٠٠٨) تتحرك نقطة (س ، ص) على المنحنى : $س^٢ + ٤س - ص = ٣$ عين موضع النقطة عند اللحظة التى تكون فيها سرعة إحداثيها الصادى ضعف سرعة إحداثيها السينى.

«(−١ ، −٦)»

٦ (دور ثان ٢٠٠١) تتحرك نقطة (س ، ص) على المنحنى : $ص = س^٢ - \frac{١}{٤}$ فأوجد موضع هذه النقطة عند اللحظة التى يكون فيها معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن يساوى ثلاثة أمثال معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن.

«$(٢ ، \frac{٣}{٢})$»

٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) صفيحة مربعة الشكل تتمدد بانتظام فإذا كان معدل ازدياد مساحة سطح الصفيحة ٧٥ سم^٢/ث فإن معدل زيادة طول ضلع الصفيحة يساوى سم/ث عندما يكون طول ضلعها ٥ سم.

(أ) ٢,٥ (ب) ٥ (جـ) ٧,٥ (د) ١٥

(٢) صفيحة معدنية مربعة الشكل يتغير طول ضلعها بمعدل ٠,٢ سم/ثانية فإن معدل التغير فى مساحة سطحها = ... عندما يكون طول قطرها $٨\sqrt{٢}$ سم.

(أ) $\frac{١}{٢٥}$ (ب) ٣,٢ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) ١٦

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

③ سقط حجر فى ماء ساكن فتكونت موجة دائرية فإذا عُلم أن طول نصف قطر الموجة يزداد بمعدل ٣ سم/ث فإن معدل زيادة مساحة الموجة بعد مرور ٤ ثوان يساوى سم^{٢}/ثانية.

(أ) ٨π (ب) ٧٢π (جـ) ١٢π (د) ٢٤π

④ تزداد مساحة قرص دائرى بمعدل ٠,٢ سم^{٢}/ث فإن معدل الزيادة فى طول نصف قطره يساوى سم/ث عندما يكون طول نصف القطر ٧ سم. $(\pi = \frac{٢٢}{٧})$

(أ) $\frac{٧}{٢٢}$ (ب) $\frac{٢٢}{٧}$ (جـ) $\frac{١}{٢٢٠}$ (د) ٣,٥

⑤ قرص معدنى ينقص طول قطره بالتبريد بمعدل ٠,٥ سم/ثانية فإن معدل النقص فى مساحة سطحه = ... سم^{٢}/ث عندما يكون طول نصف قطره ١٤ سم.

(أ) ٥,٥ (ب) ١١ (جـ) ١٦ (د) ٢٢

⑥ خزان به كمية من الماء على شكل مكعب طول ضلعه ٤ متر يصب فيه الماء بمعدل $\frac{١}{٢}$ م^{٣}/دقيقة فإن :

أولًا : معدل تغير ارتفاع الماء فى الخزان = ... م/دقيقة.

(أ) $\frac{١}{٩٦}$ (ب) $\frac{١}{٣٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢٤}$ (د) $\frac{١}{٤٨}$

ثانيًا : معدل تغير مساحة السطح العلوى للماء = ... م^{٢}/دقيقة.

(أ) صفر (ب) ٤ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{١}{٣٢}$

⑦ تتحرك نقطة على المنحنى : ص = س $-$ $\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}+١}$ فإذا كان معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن عند س = $\sqrt{٢}$ يساوى ٩ فإن معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن عند نفس النقطة يساوى

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٠

⑧ ينصهر مكعب من الثلج محتفظًا بشكله بمعدل ١ سم^{٣}/ث فإن معدل تغير طول حرف المكعب عندما يكون حجمه ٨ سم^{٣} هو سم/ث.

(أ) $\frac{١}{١٢}$ (ب) $\frac{١}{١٩٢}$ (جـ) $\frac{-١}{٢٤}$ (د) $\frac{-١}{١٢}$

⑨ دائرة تمس أضلاع مربع من الداخل فإن معدل تغير طول نصف قطر الدائرة يساوى معدل تغير طول ضلع المربع عند أى لحظة.

(أ) ضعف (ب) نصف (جـ) ربع (د) أربعة أمثال

⑩ مربع مرسوم داخل دائرة فإن معدل تغير طول نصف قطر الدائرة يساوى معدل تغير طول ضلع المربع عند أى لحظة.

(أ) ١ (ب) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\sqrt{٢}$

⑪ إذا نقص طول حرف مكعب بمعدل ٣ سم/ث فإن طول قطر المكعب يتناقص بمعدل سم/ث.

(أ) $٣\sqrt{٢}$ (ب) $٣\sqrt{٣}$ (جـ) ٦ (د) ٩

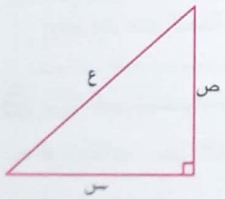
⑫ إذا كان طول ضلع المثلث المتساوى الأضلاع = أ ويتزايد بمعدل (ك) فإن معدل التزايد فى مساحة المثلث يساوى

(أ) $\frac{٢}{٣\sqrt{٣}}$ أ ك (ب) $\sqrt{٣}$ أ ك (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ أ ك (د) $\frac{\sqrt{٢}}{٣\sqrt{٣}}$ أ ك

⑬ أسطوانة دائرية قائمة تتمدد بحيث تظل محتفظة بشكلها ، فإذا كان طول نصف قطرها (نق) يزداد بمعدل ٠,٥ سم/ث وارتفاعها (ع) يزداد بمعدل ٠,٢٥ سم/ث فإن معدل التغير فى حجم الأسطوانة عندما يكون نق = ٣ سم ، ع = ٥ سم يساوى سم^{٣}/ث.

(أ) $\frac{٦٩}{٤}\pi$ (ب) $\frac{١٥}{٤}\pi$ (جـ) $\frac{١٣}{٢}\pi$ (د) $\frac{٣}{٤}\pi$

⑭ فى الشكل المقابل :



مثلث قائم الزاوية إذا كان : $\frac{\text{ع}}{\text{ل}} = ٣$ ، $\frac{\text{س}}{\text{ل}} = ٣\frac{\text{ص}}{\text{ل}}$ فإن : $\frac{\text{ص}}{\text{ل}}$ = ...

فى اللحظة التى يكون فيها س = ٨ ، ص = ٦

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

⑧ (دور ثان ٢٠٠٤) صفيحة معدنية على شكل مثلث متساوى الأضلاع تتمدد وتحتفظ بشكلها الهندسى فإذا كان معدل الزيادة فى طول ضلعها ٠,١ سم/ث فأوجد طول ضلع الصفيحة فى اللحظة التى يكون معدل الزيادة فى مساحتها مساويًا $٣\sqrt{٣}$ سم^{٢}/ث. ٢٠٠ سم

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٩ مستطيل طوله ضعف عرضه يتمدد بانتظام بحيث يظل محتفظًا بشكله وبنفس النسبة بين أبعاده أوجد مساحة المستطيل فى اللحظة التى يزداد فيها الطول بمعدل ٠,١ سم/ث وتزداد المساحة بمعدل ٠,٢ سم²/ث. «٢٠٠ سم²»

١٠ قطعة من المعدن مستطيلة الشكل يزيد طولها عن عرضها بمقدار ٢٠ سم تنكمش بالتبريد بحيث يظل طولها يزيد عن عرضها بمقدار ٢٠ سم ، فإذا كان الطول ينكمش بمعدل ٠,٢٥ سم/ث عندما يكون العرض ٨٠ سم ، احسب معدل تغير المساحة عند هذه اللحظة. «-٤٠,٥ سم²/ث»

١١ (دور ثان ٢٠٠٢) إذا كانت ع هى مساحة المنطقة المحصورة بين دائرتين متحدتى المركز طولا نصفى قطريهما نق١ ، نق٢ حيث نق٢ > نق١ وكان نق١ يتزايد بمعدل ٠,٤ سم/ث ، نق٢ يتناقص بمعدل ٠,٢ سم/ث فأوجد معدل تغير ع بالنسبة للزمن عند اللحظة التى يكون عندها نق١ = ٨ سم ، نق٢ = ١٤ سم. «-١٢ π سم²/ث»

١٢ (دور ثان ٢٠٠٩) سقط حجر فى ماء ساكن فتكونت موجة دائرية يتزايد طول نصف قطرها بمعدل ٢,١ سم/ث. فإذا كان معدل الزيادة فى مساحة سطح الموجة فى نهاية ن ثانية من البداية يساوى ٢٧٧,٢ سم²/ث فأوجد قيمة ن . $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$ «١٠ ثانية»

١٣ (دور ثان ٢٠١٠) مثلث قائم الزاوية ومتساوى الساقين مساحته (م) سم²
فإذا كان : $\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}$ = ٣٢ سم²/ث فى اللحظة التى كان طول أى من الساقين ٨ سم.
أوجد عند هذه اللحظة معدل التغير الزمنى لمحيط المثلث (ع) «٨ + ٤ √٢ سم/ث»

١٤ مكعب يتمدد بالحرارة فيزداد طول حرفه بمعدل ٠,٠٢ سم/د وتزداد مساحة سطحه فى لحظة ما بمعدل ٠,٧٢ سم²/د أوجد طول حرف المكعب فى هذه اللحظة ومعدل الزيادة فى حجمه حينئذ. «٣ سم ، ٠,٥٤ سم³/د»

١٥ مكعب يتمدد بالحرارة فيزداد طول حرفه بمعدل ٠,٠١ سم/دقيقة فإذا كان معدل تغير حجمه عند لحظة ما ٧٥ سم³/دقيقة.
فأوجد : ① طول ضلع المكعب عند هذه اللحظة.
② معدل تغير المساحة الكلية للمكعب عند هذه اللحظة. «٥٠ سم ، ٦ سم²/د»

١٦ تحركت سفينتان من نقطة واحدة وفى لحظة واحدة الأولى فى اتجاه الشرق بسرعة ٦٠ كم/ساعة والثانية فى اتجاه الجنوب بسرعة ٨٠ كم/ساعة أوجد معدل التغير بين السفينتين بعد ساعتين من بدء الحركة. «١٠٠٠ كم/ساعة»

١٧ يمر حبل فوق بكرة صغيرة ملساء عند قمة برج على ارتفاع ١٢ متر ويمسك بأحد طرفى الحبل عامل عند قاعدة البرج ، وثبت الطرف الآخر للحبل فى عربة ثقيلة على الأرض. فإذا استطاع العامل جذب الحبل بمعدل ٢ متر/دقيقة فاحسب السرعة التى تتحرك بها العربة نحو البرج عندما تكون العربة على بُعد ٩ أمتار من قاعدته. «$\frac{١٠}{٣}$ م/د»

١٨ يقف رجل على بُعد ٥٠ مترًا من طائرة مروحية تقف فى المطار ، فإذا صعدت الطائرة رأسيًا إلى أعلى بمعدل ٦٥ متر/ثانية. فأوجد المعدل الذى تبعد به الطائرة عن الرجل عندما تكون الطائرة على ارتفاع ١٢٠ مترًا من سطح الأرض. «٦٠ متر/ثانية»

١٩ يرتفع بالون رأسيًا لأعلى بسرعة ثابتة مقدارها ١٥ م/ث وعندما كان البالون على ارتفاع ٩٠ مترًا مرت تحته مباشرة سيارة وواصلت سيرها فى خط مستقيم بسرعة ثابتة مقدارها ٢٥ م/ث. أوجد المعدل الذى تزداد به المسافة بين السيارة والبالون بعد ثانيتين من مرور السيارة تحت البالون. «$\frac{٣٠٥}{١٣}$ م/ث»

٢٠ يرتفع بالون رأسيًا لأعلى من نقطة أ على سطح الأرض. وضع جهاز لتتبع حركة البالون عند نقطة ب فى نفس المستوى الأفقى للنقطة أ وعلى بعد ٢٠٠ متر منها عند لحظة ما رصد الجهاز زاوية ارتفاع البالون فوجدها $\frac{\pi}{٤}$ وتتزايد بمعدل ٠,١٢ ق/د ، أوجد معدل ارتفاع البالون فى هذه اللحظة. «٤٨ م/د»

٢١ ترتفع طائرة عمودية رأسيًا لأعلى بمعدل ثابت قدره ٤٢ م/د فإذا تم رصد الطائرة من مشاهد على الأرض ويبعد ١٥٠م عن موقع إقلاعها ، فأوجد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد للطائرة عندما تكون على ارتفاع ١٥٠م من سطح الأرض. «$\frac{٧}{٥٠}$ ق/د»

٢٢ (دور أول ٢٠٠٤) حبل من الصلب على شكل أسطوانة دائرية قائمة يتمدد بالتسخين بحيث يزداد طوله بمعدل ٠,٠٠٥ سم/دقيقة ، ويزداد طول قطر مقطعه الدائرى بمعدل ٠,٠٠٢ سم/دقيقة. أوجد بدلالة π معدل تغير حجم الحبل بالنسبة للزمن عندما يكون طوله ٤٠ سم وطول قطر مقطعه ٢ سم. «٠,٠٨٥ π سم³/د»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢٣ (دور أول ٢٠٠٦) وعاء أسطوانى الشكل طول نصف قطر قاعدته ١٠ سم وارتفاعه ٦٠ سم ، فإذا كان الوعاء فارغًا وصب فيه الماء بمعدل ٣٠ π سم٣/ث. أوجد معدل ارتفاع الماء فى الوعاء ، متى يمتلئ الوعاء بالماء ؟

« ٠,٣ سم/ث ، ٢٠٠ ثانية »

٢٤ خزان بترول على شكل أسطوانة دائرية قائمة طول قطر قاعدتها ٢٤ مترًا. يُراد تفريغ الخزان من البترول بمعدل ٢ م٣/د ، فما معدل تغير ارتفاع البترول فى الخزان ؟

« $\frac{-١}{٧٢\pi}$ م/د »

٢٥ أسطوانة ارتفاعها يساوى طول قطر قاعدتها ، فإذا تمددت بحيث كان معدل ازدياد مساحتها السطحية الكلية بالنسبة للزمن يساوى ١٨ π سم٢/ث عندما يكون طول نصف قطر قاعدتها يساوى ٦ سم فاحسب معدل ازدياد طول نصف القطر.

« $\frac{١}{٤}$ سم/ث »

٢٦ سلم طوله ٢,٦ متر يستند بطرفه العلوى على حائط رأسى وبطرفه السفلى على أرض أفقية. إذا كان طرفه السفلى يتحرك مبتعدًا عن الحائط بمعدل ٤ متر/د عندما يكون على بعد ١ متر من الحائط. أوجد معدل تحرك طرفه العلوى ومعدل تغير قياس زاوية ميل السلم على الأرض حينئذ.

« $\frac{-٥}{٣}$ م/د ، $(\frac{-٥}{٣})^{٢}$/د »

٢٧ يستند سلم طوله ٦,٥ متر بأحد طرفيه على أرض أفقية وبطرفه الآخر على حائط رأسى. فإذا انزلق الطرف السفلى للسلم مبتعدًا عن الحائط بمعدل ٣٠ سم/دقيقة عندما يكون على بعد ٢,٥ متر من الحائط. أوجد عندئذ معدل انخفاض الطرف العلوى للسلم. ثم أوجد بعد الطرف العلوى للسلم عن الأرض عندما يتحرك الطرف العلوى والطرف السفلى بنفس المعدل.

« $\frac{١}{٨}$ م/د ، $\frac{١٣\sqrt{٢}}{٤}$ م »

٢٨ سلم ثابت الطول ينزلق طرفه العلوى على حائط رأسى بمعدل ك وحدة/ث ، أوجد معدل ابتعاد طرفه السفلى عن الحائط عندما يميل السلم على الرأسى بزاوية θ حيث ظا θ = $\frac{٥}{٤}$

« $\frac{٣ك}{٤}$ وحدة/ث »

٢٩ سلم طوله ٤ أمتار يرتكز بأحد طرفيه على حائط رأسى وبطرفه الآخر على أرض أفقية ، فإذا انزلق الطرف الملامس للأرض مبتعدًا عن الحائط بمعدل ٢٠ سم/ث. احسب معدل هبوط الطرف العلوى للسلم عندما يكون السلم مائلًا على الأرض بزاوية قياسها $\frac{\pi}{٣}$

« $\frac{٢٠\sqrt{٣}}{٣}$ سم/ث »

٣٠ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا زاد طول نصف قطر دائرة بمعدل $\frac{٤}{\pi}$ سم/ث فإن محيط الدائرة يزيد عند هذه اللحظة بمعدل :

(أ) $\frac{٤}{\pi}$ سم/ث. (ب) $\frac{\pi}{٤}$ سم/ث. (جـ) $\frac{١}{٨}$ سم/ث. (د) ٨ سم/ث.

② دائرة يتزايد طول نصف قطرها بمعدل ٢ سم/د ومساحتها بمعدل ٢٠ π سم٢/د فإن طول نصف قطرها عند هذه اللحظة يساوى سم.

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

③ مستطيل طوله ضعف عرضه فإذا كان معدل تغير العرض ٣ سم/ث فإن معدل تغير قطر المستطيل = ... سم/ث

(أ) ٦ (ب) ٥√٢ (جـ) ٥√٣ (د) ١٥√٢

④ إذا كان ارتفاع مثلث متساوى الأضلاع يتزايد بمعدل ٣√٢ سم/ث فإن معدل تغير طول ضلع المثلث يساوى سم/ث

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

⑤ إذا كان : س + ص = ثابت فإن :

(أ) كل من س ، ص يزيد بنفس المعدل.

(ب) كل من س ، ص يتناقص بنفس المعدل.

(جـ) إحدهما يزيد والآخر يتناقص بنفس المعدل.

(د) لاشىء مما سبق.

⑥ تزداد مساحة سطح كرة بمعدل ثابت قدره ٦ سم٢/ث عند اللحظة التى يكون فيها طول نصف قطر الكرة ٣٠ سم فإن معدل الزيادة فى حجم الكرة = ... سم٣/ث.

(أ) ١٨٠ (ب) ٤٠ (جـ) ٩٠ (د) ٩٠ π

⑦ وعاء فارغ حجمه ٤٥ سم٣ يصب فيه الماء بمعدل ٥ سم٣/ث فإن الوعاء يمتلئ بعد مرور ثانية.

(أ) ٩ (ب) ١٣٥ (جـ) ٤٥ (د) ٥

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٨) مثلث متساوى الساقين طول كل من ساقيه يساوى ٦ سم وقياس الزاوية بينهما يساوى (س) فإذا تغير س بمعدل $\left(\frac{\pi}{٩٠}\right)^{c}$ فى الدقيقة فإن معدل تغير مساحة المثلث عند س = ٣٠° هو

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{١٠}\pi$ (ب) $\frac{\pi}{١٠}$ (جـ) $٣\sqrt{٩}$ (د) ٩

(٩) ترتبط الإزاحة ف التى يقطعها جسم مقذوف رأسيًا لأعلى مع الزمن ن بالعلاقة :
ف = ٤٩ ن − ٤,٩ ن^{٢} حيث ن الزمن مقدرًا بالثوانى.
فإن أقصى إزاحة يبلغها الجسم بعد مرور ثانية.

(أ) ٩,٨ (ب) ١٠ (جـ) ٥ (د) ٥٠

(١٠) إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = د (س) عند نقطة ما يساوى $\frac{١}{٢}$ وكان الإحداثى السينى لهذه النقطة يتناقص بمعدل ٣ وحدات/ث فإن معدل تغير إحداثيها الصادى يساوى وحدة/ث.

(أ) $-\frac{١}{٦}$ (ب) $-\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٦}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

(١١) إذا كان معدل التغير فى مساحة الدائرة يساوى معدل التغير فى طول قطرها عدديًا فإن : نق = ...

(أ) $\frac{٢}{\pi}$ (ب) $\frac{١}{\pi}$ (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) π

(١٢) يزداد طول ضلع مكعب بمعدل ٥ سم/ث فإن حجم المكعب يزداد بمعدل سم^{٣}/ث عندما يكون طول ضلعه ١٠ سم.

(أ) ١٥٠٠ (ب) ١٥٠ (جـ) ٤٥ (د) ٥٠

(١٣) مخروط دائرى قائم ارتفاعه يساوى طول قطر قاعدته فإذا كان معدل تغير طول نصف قطر قاعدته = $\frac{١}{\pi}$ سم/ث فإن معدل تغير حجم المخروط = ... سم^{٣}/ث عندما يكون طول نصف قطره يساوى ٥ سم

(أ) ٥٠ π (ب) $\frac{٢٥٠}{٣}\pi$ (جـ) ١٥٠ (د) ٥٠

(١٤) إذا كانت (م) مساحة دائرة طول نصف قطرها (نق) يتغير بمعدل ثابت فإن :

(أ) م ثابتة. (ب) $\frac{\text{د}م}{\text{د}ن}$ ثابتة. (جـ) $\frac{\text{د}م}{\text{د}ن} \propto$ نق (د) $\frac{\text{د}م}{\text{د}ن} \propto$ نق^{٢}

(١٥) مضلع منتظم عدد أضلاعه م وطول ضلعه يزيد بمعدل ثابت ٢ سم/ث فإن :

(أ) محيطه يزيد بمعدل ٢ سم/ث (ب) مساحته تزيد بمعدل ٢ سم^{٢}/ث

(جـ) محيطه يزيد بمعدل م ٢ سم/ث (د) مساحته تزيد بمعدل م ٢ سم^{٢}/ث

(١٦) مضلع منتظم عدد أضلاعه م وطول ضلعه يزيد بمعدل ثابت ٢ سم/ث فإن قياس زاوية رأس المضلع

(أ) يزداد بمعدل ثابت ٢ ؏/ث (ب) يزداد بمعدل ثابت م ٢ ؏/ث

(جـ) يزداد بمعدل غير ثابت وغير معلوم. (د) يظل ثابت.

(١٧) شاهد رجل يقف على سطح الأرض طائرة تمر فوقه تمامًا على ارتفاع ٣ كم وتطير أفقيًا بسرعة ٤٨٠ كم/س فإن معدل تغير المسافة بين الرجل والطائرة بعد ٣٠ ثانية من مرور الطائرة فوق الرجل = ...

(أ) $\frac{٣٢٠}{٣}$ كم/ساعة. (ب) ٣٨٤ كم/ث. (جـ) ٣٨٤ م/ث. (د) $\frac{٣٢٠}{٣}$ م/ث.

(١٨) خزان أسطوانى طول نصف قطر قاعدته ٢٥ سم وارتفاعه ١٢٠ سم يصب فيه الزيت بمعدل $\frac{٥٠٠٠}{ل + ٤٠}$ سم^{٣}/ثانية حيث ل ارتفاع الزيت عند أى لحظة
فإن معدل ارتفاع الزيت فى الخزان = ... سم/ث عندما يمتلىء نصفه.

(أ) $\frac{٤}{٢٥}\pi$ (ب) $\frac{١}{٢٥\pi}$ (جـ) $\frac{٢}{٢٥\pi}$ (د) $\frac{٨}{٢٥\pi}$

(١٩) سلم طوله ١٠ متر يستند طرفه العلوى على حائط رأسى وطرفه السفلى على أرض أفقيه فإذا انزلق الطرف السفلى بسرعة ٢ م/د فإن معدل تغير زاوية ميل السلم على الأفقى فى اللحظة التى يبعد فيها الطرف السفلى عن الحائط ٨ م يساوى دائرى/دقيقة.

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $-\frac{١}{٣}$

(٢٠) صفيحة على شكل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٢ ل سم فإذا كان طول ضلع الصفيحة يزداد بالتسخين بمعدل $\frac{٣\sqrt{٣}}{١٥}$ سم/ث فإن مساحة الصفيحة تزداد بمعدل سم^{٢}/ث.

(أ) $\frac{٢}{٥}$ ل (ب) $\frac{١}{٥}$ ل (جـ) $\frac{٤}{٥}$ ل (د) $\frac{١}{١٠}$ ل

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢١ إذا كانت ص موجبة وتزداد فإن قيمة ص التى عندها يكون معدل زيادة ص^{٢} يساوى ٤ أمثال معدل زيادة ص هى

(أ) $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (جـ) $٢\sqrt{٣}$ (د) $٣\sqrt{٢}$

٢٢ قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم ، قياس زاويتها المركزية س وتتغير بمعدل ٣° لكل دقيقة فإن معدل الزيادة فى مساحة القطعة الدائرية عند س = $\frac{\pi}{٣}$ هو سم^{٢}/دقيقة.

(أ) ١٢٥ (ب) ٧٥ (جـ) ١٥٠ (د) ٣٠٠

٣١ مستطيل طوله ١٢ سم ، وعرضه ٥ سم فإذا كان الطول يتناقص بمعدل ١ سم/دقيقة بينما يتزايد العرض بمعدل $\frac{١}{٢}$ سم/دقيقة فأوجد متى يصبح الشكل مربعًا . ثم أوجد الزمن الذى تتوقف فيه المساحة عن الزيادة وكم تكون المساحة وقتئذٍ ؟ «$\frac{١٤}{٣}$ ث ، ١ ث ، ٦٠,٥ سم^{٢}»

٣٢ (دورأول ٢٠١٤) مستطيل مساحته ثابتة وتساوى ٢٤ سم^{٢} يزداد عرضه بمعدل ١ سم/ث بينما يتناقص طوله.

أوجد : (١) معدل تغير محيط المستطيل فى اللحظة التى يكون فيها عرض المستطيل ٤ سم

(٢) بعدى المستطيل فى اللحظة التى يتوقف فيها المحيط عن التغير.

«-١ سم/ث ، $٢\sqrt{٦}$ ، $٢\sqrt{٦}$ سم»

٣٣ (دورأول ٢٠١٦) مستطيل طوله ل وعرضه ع ومساحة سطحه ثابتة وتساوى ١٢٠٠ سم^{٢} فى لحظة معينة يتزايد الطول بمعدل ٦ سم/د ويتناقص العرض بمعدل ٢ سم/دقيقة

أوجد بعدى المستطيل عند هذه اللحظة هل يتزايد طول قطر المستطيل ؟ وبأى معدل.

«٦٠ سم ، ٢٠ سم ، $\frac{١٠\sqrt{٨}}{٥}$ سم/د»

٣٤ صفيحة رقيقة من المعدن على شكل مثلث تتمدد بانتظام بحيث يظل طول قاعدتها مساويًا ثلاثة أمثال ارتفاعها. إذا كان معدل زيادة مساحة الصفيحة ٠,٢٧ سم^{٢}/ث فأوجد معدل تغير ارتفاعها عند اللحظة التى يكون فيها ارتفاع الصفيحة ٩ سم. «٠,٠١ سم/ث»

٣٥ (دورأول ٢٠١٢) فى لحظة ما كان طولا ضلعى القائمة فى مثلث قائم الزاوية ١٥ سم ، ٢٠ سم وكان أصغرهما يتزايد بمعدل ١ سم/دقيقة وأكبرهما يتناقص بمعدل $\frac{١}{٢}$ سم/دقيقة.

فأوجد :

(١) معدل التغير فى مساحة سطح هذا المثلث عند أى لحظة زمنية ن ثم أوجد قيمته عند ن = ٥ دقيقة.

(٢) مساحة سطح المثلث عندما ينعدم معدل تغيرها. «٣,٧٥ سم^{٢}/دقيقة ، ١٨٩,٠٦٢٥ سم^{٢}»

٣٦ (دورثان ٢٠١٣) إذا تغيرت أطوال أضلاع مثلث قائم مع بقاء المحيط ثابتًا عند ٤٠ سم وكان معدل تغير طول الوتر هو ٧ سم/دقيقة عندما كانت أطوال الأضلاع ٨ سم ، ١٥ سم ، ١٧ سم فأوجد معدل تغير كل من الضلعين الآخرين عند هذه اللحظة.

«٢٥ سم/ دقيقة ، -٣٢ سم/دقيقة»

٣٧ مثلث متساوى الساقين طول كل من ساقيه ١٠ سم وقياس الزاوية بينهما يساوى (س) فإذا تغير س بمعدل ٣° فى الدقيقة فأوجد معدل تغير مساحة المثلث عند س = ٦٠°

«$\frac{٥}{١٢}\pi$ سم^{٢}/د»

٣٨ مثلث متساوى الساقين طول قاعدته $٢٠\sqrt{٣}$ إذا كان طول كل من ساقية يتناقص بمعدل ٣ سم/ساعة ، فأوجد معدل تناقص مساحة سطح المثلث عند اللحظة التى يكون فيها طول كل من الساقين مساويًا لطول القاعدة. «٦٠ سم^{٢}/ساعة»

٣٩ ضلعان فى مثلث يتزايد طول كل منهما بمعدل ٠,١ سم/ث ، ويتزايد قياس الزاوية المحصورة بينهما بمعدل $\frac{١}{٥}$° /ث. بأى معدل تتغير مساحة المثلث عند اللحظة التى يكون فيها طول كل ضلع من أضلاع المثلث ١٠ سم. «٠,٨٦٦ سم^{٢}/ث»

٤٠ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى حـ ، مساحته ثابتة وتساوى ٢٤ سم^{٢} ، إذا كان معدل تغير ب حـ يساوى ١ سم/ث فأوجد معدل تغير كل من أ ، ب (د أ) عند اللحظة التى يكون فيها ب حـ يساوى ٨ سم. «$\frac{٣}{٤}$ سم/ث ، -١,٢ سم^{٢}/ث»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٤١ صفيحة رقيقة معدنية مستطيلة الشكل طولها $\frac{٤}{٥}$ طول قطرها ، تنكمش بالتبريد بانتظام محتفظة بشكلها الهندسى وبنفس النسبة بين بعديها ، وعند لحظة زمنية ما كان طول قطر الصفيحة ينكمش بمعدل ٢,٥ سم/دقيقة ، وفى نفس اللحظة تنكمش مساحتها السطحية بمعدل ٦٠ سم^{٢}/دقيقة. أوجد مساحة سطح الصفيحة عند هذه اللحظة.

«٣٠٠ سم^{٢}»

٤٢ يمسك ولد بيده خيط طائرة ورقية مرتفعة ٣٠ مترًا فإذا كانت الرياح تجذب الطائرة أفقيًا بمعدل ٢٥ متر/دقيقة فما هى السرعة التى يجب على الولد أن يعطيها للخيط عندما يكون طول الخيط يساوى ٥٠ مترًا.

«٢٠ متر/دقيقة»

٤٣ تتمدد قطعة من المعدن على هيئة متوازى مستطيلات طول ضلع قاعدته يزيد عن عرضه ٢ سم وارتفاعه ثلاثة أمثال عرضه بالتسخين بحيث تظل أبعادها محتفظة بهذه النسبة فإذا كان الحجم يزداد بمعدل ٠,٦ سم^{٣}/دقيقة عندما يزداد العرض بمعدل ٠,٠١ سم/دقيقة فأوجد أبعاد قطعة المعدن.

«٢ ، ٤ ، ٦ سم»

٤٤ متوازى مستطيلات قاعدته مربعة الشكل فإذا كان طول ضلع القاعدة يزداد بمعدل ١ سم/دقيقة وارتفاع متوازى المستطيلات ينقص بمعدل ٢ سم/دقيقة أوجد فى اللحظة التى يكون فيها طول ضلع القاعدة ٦ سم والارتفاع ٢٤ سم معدل الزيادة فى حجم متوازى المستطيلات ثم أوجد بعد كم دقيقة من هذه اللحظة تنعدم هذه الزيادة.

«٦ دقائق»

٤٥ يتمدد هرم رباعى منتظم من المعدن ارتفاعه يساوى طول ضلع قاعدته فيزداد حجمه بمعدل ١ سم^{٣}/ث ، إذا كان معدل تزايد كل من ارتفاع الهرم وطول ضلع قاعدته يساوى ٠,٠١ سم/ث فأوجد طول ضلع قاعدته.

«١٠ سم»

٤٦ منشور قائم قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها ٤ سم ويزداد بمعدل ٢ سم/ث وارتفاعه ٨ سم وينقص بمعدل ٤ سم/ث فبأى معدل يزداد حجم المنشور وبعد كم ثانية يقف حجمه عن الزيادة.

«٦٤ سم^{٣}/ث ، $\frac{٢}{٣}$ث»

٤٧ إذا كانت مساحة دائرة تزداد بمعدل ثابت أثبت أن معدل الزيادة فى محيط الدائرة يتناسب عكسى مع طول نصف القطر.

٤٨ بالون كروى مملوء بالغاز يتسرب منه الغاز بمعدل ـس سم^{٣}/ث ، أثبت أن معدل نقص مساحته فى اللحظة التى يكون فيها طول نصف قطره نق سم يساوى $\frac{٢ \text{ـس}}{\text{نق}}$ سم^{٢}/ث.

٤٩ تتحرك نقطة على المنحنى : ص = ٤ ـس − ٢ ـس^{٣} بحيث يتناقص إحداثيها الصادى بمعدل ٥ وحدات/ث أوجد معدل تغير ميل المنحنى عندما يكون ـس = ٢

«−٦ وحدات/ث»

٥٠ بدأت نقطة الحركة من نقطة الأصل وفى الاتجاه الموجب لمحور السينات بسرعة ٥ سم/ث أوجد معدل تغير البعد بينها وبين النقطة (٩ ، ٨) بعد مرور ثلاث ثوانى من بدء الحركة.

«٣ سم/ث»

٥١ تتحرك نقطة على منحنى الدالة د (ـس) = $\sqrt{\text{ـس}^{٢} + ٥}$ بحيث يزيد إحداثيها السينى بمعدل ١٠$\sqrt{٣}$ سم/ث أوجد معدل تغير بعدها عن النقطة (١ ، ٠) عندما ـس = ٢

«٩ سم/ث»

٥٢ تتحرك النقطة أ (ـس ، ص) على منحنى الدالة ص = ـس^{٣} + ـس بحيث $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ = ٢ وحدة /ث أوجد معدل التغير فى مساحة المثلث أ و ب حيث (و) نقطة الأصل ، النقطة ب (٠ ، ٦) فى اللحظة التى يكون فيها الإحداثى السينى للنقطة المتحركة يساوى ٣

«$\frac{٣}{١٤}$ وحدة مربعة/ث»

٥٣ صفيحة على شكل سداسى منتظم تنكمش بالبرودة ، وُجِدَ أن معدل تغير طول ضلعها ٠,١ سم/ث ، أوجد معدل التغير فى مساحة الصفيحة عندما يكون طول ضلعها ١٠ سم.

«−٣$\sqrt{٣}$ سم^{٢}/ث»

٥٤ مُثمن منتظم طول ضلعه ١٠ سم ويتزايد بمعدل ٠,٢ سم/ث أوجد معدل تزايد مساحته.

«١٩,٢ سم^{٢}/ث»

٥٥ (دورتان ٢٠١٤) رجل طوله ١٧٠ سم يسير بسرعة ٢م/ث فى خط مستقيم متجهًا نحو قاعدة مصباح يرتفع عن سطح الأرض بمقدار ٦٨٠ سم.

أوجد : ① معدل تغير طول ظل الرجل.

② سرعة تحرك نهاية ظل الرجل.

«−$\frac{٢}{٣}$ م/ث ، −$\frac{٨}{٣}$ م/ث»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٥٦ [إجابة ٢٠١٢] رجل طوله ١٨٠ سم يسير بسرعة ١٥٠ سم/ث فى اتجاه مصباح يرتفع ٤٨٠ سم فوق سطح الأرض.
أوجد : ① معدل تغير طول ظل الرجل.
② معدل تغير بعد رأس الرجل عن المصباح عندما يكون الرجل على بعد ٣٠٠ سم من قاعدة المصباح.
« -٩٠ سم/ث ، -٧٥√٢ سم/ث »

٥٧ يسير رجل طوله ١٨٠ سم مبتعدًا عن قاعدة مصباح ارتفاعه ٣ أمتار بمعدل ١,٢ م/ث
أوجد معدل تغير طول ظل الرجل. وإذا كان المستقيم المار بأعلى نقطة من رأس الرجل وقمة المصباح يميل على الأرض بزاوية قياسها θ° عندما يبعد الرجل عن قاعدة المصباح بمسافة قدرها س مترًا فاثبت أن س = $\frac{٦}{٥}$ ظا θ ، ثم أوجد معدل تغير θ عندما يبعد الرجل مسافة ٣,٦ متر عن قاعدة المصباح.
« ١,٨ م/ث ، $(\frac{-١}{١٠})^{\circ}$/ث »

٥٨ يصعد رجل طوله ١٧٠ سم بسرعة منتظمة ٦ م/دقيقة أعلى منحدر يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{٧}{٢٤}$ وطوله ٢٥ مترًا وهناك مصباح مثبت على ارتفاع $١١\frac{١}{٤}$ مترًا فوق المستوى الأفقى المار بقاعدة المنحدر رأسيًا فوق أعلى نقطة للمنحدر. أوجد معدل انكماش طول ظل الرجل وكذلك معدل اقتراب نهاية ظل الرجل من أعلى نقطة للمنحدر.
« ٤ م/د ، ١٠ م/د »

٥٩ قضيب طوله ٥ أمتار مثبت بمفصل فى الأرض عند أحد طرفيه ، فإذا رفع طرفه الآخر رأسيًا إلى أعلى بواسطة ونش بمعدل ١ متر/دقيقة أوجد معدل تناقص طول مسقط القضيب على الأرض عندما يكون ارتفاع هذا الطرف ٣ أمتار.
« $\frac{٣}{٤}$ م/د »

٦٠ فى سباق ١٠٠ متر ، يجرى لاعب فى مسار مستقيم باتجاه خط النهاية ، وكانت إحدى كاميرات خط النهاية على مسافة ٥ أمتار وعمودية على مسار السباق وفى نفس المستوى الأفقى للمتسابقين. أوجد معدل تغير الزاوية التى تدور بها الكاميرا لرصد حركة اللاعب عندما كان على بعد ٥ أمتار من نهاية السباق ومعدل اقترابه لنقطة النهاية ١٠ م/ث.
« $(-١)^{\circ}$/ث »

٦١ [إجابة ٢٠١٢] ينصهر الجليد المنتظم السمك والكثافة المتراكم على كرة معدنية مصمتة طول قطرها ١٢ سم بمعدل مقداره ٢٠ سم٣/دقيقة فى اللحظة التى كان فيها معدل تناقص سمك طبقة الجليد مساويًا $\frac{١}{٢٠\pi}$ سم/دقيقة بحيث يظل الجليد محتفظًا بشكله الكروى خلال فترة الانصهار وأن π هى النسبة التقريبية.
أوجد عند هذه اللحظة كلاً من :
① سمك طبقة الجليد.
② معدل تغير مساحة السطح الخارجى لهذه الطبقة.
« ٤ سم ، ٤ سم٢/دقيقة »

٦٢ كرة جوفاء طولا نصفى قطريها الداخلى والخارجى فى أى لحظة هما نق١ ، نق٢ على الترتيب. فإذا كان طول نصف قطرها الداخلى يزداد بمعدل ١ سم/ث بحيث يظل حجم مادة الكرة ثابتًا ، وذلك عند اللحظة التى يكون فيها نق١ = ٣ سم ، نق٢ = ٩ سم
أوجد عند هذه اللحظة :
① معدل تغير نصف قطرها الخارجى.
② معدل تغير مساحة سطحها الخارجى.
③ معدل تغير سمكها.
« $\frac{١}{٩}$ سم/ث، ٨ π سم٢/ث ، $-\frac{٨}{٩}$ سم/ث »

٦٣ يتسرب غاز من بالون كروى بمعدل ٢٠ سم٣/ث أوجد معدل تغير طول نصف قطر البالون فى اللحظة التى يكون فيها طول نصف قطره ١٠ سم ، ثم أوجد معدل تغير مساحة السطح الخارجى للبالون فى نفس اللحظة.



« $\frac{-١}{٢٠\pi}$ سم/ث ، -٤ سم٢/ث »

٦٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :
① إذا كانت س قياس زاوية بالتقدير الدائرى ، س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[فإن ظل الزاوية يتزايد بمعدل ٨ مرات قدر تزايد جيب الزاوية عند س = ...
(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٥}$ (د) $\frac{\pi}{٦}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

② بالون كروى طول نصف قطره نق وحجمه ح يتسرب الغاز منه بمعدل ثابت

فإن

(أ) $\frac{ء نق}{ء ن} > ٠$ ، $\frac{ء ح}{ء ن} < ٠$

(ب) $\frac{ء نق}{ء ن} < ٠$ ، $\frac{ء ح}{ء ن} > ٠$

(جـ) $\frac{ء نق}{ء ن} > ٠$ ، $\frac{ء ح}{ء ن} < ٠$

(د) $\frac{ء نق}{ء ن} > ٠$ ، $\frac{ء ح}{ء ن} > ٠$

③ بالون كروى حجمه ١٠٠ π سم^٣ مملوء بغاز ونتيجة لتسرب الغاز فإن حجم البالون ينقص بمعدل ٨ π سم^٣/دقيقة محتفظًا بشكله الكروى فإن :

أولًا : معدل تغير طول نصف قطر البالون عندما يكون طول نصف قطره = ٤ سم يساوى سم/دقيقة.

(أ) $\frac{١}{٨}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ - (جـ) $\frac{١}{٢}$ - (د) ٢-

ثانيًا : معدل تغير طول نصف قطر البالون بعد ثمانية دقائق من بدء تسرب الغاز يساوى سم/دقيقة.

(أ) $\frac{٣}{٨}$ - (ب) $\frac{٢}{٩}$ - (جـ) $\frac{١}{٩}$ - (د) $\frac{٢}{٣}$ -

④ إذا كان طول قاعدة مثلث (ق) يتزايد بمعدل ٣ سم/دقيقة ، وارتفاعة المناظر لهذه القاعدة (ع) يتناقص بمعدل ٣ سم/دقيقة فإن مساحة المثلث (م)

(أ) تتزايد دائمًا. (ب) تظل ثابتة.

(جـ) تتناقص فقط عندما ق < ع (د) تتناقص فقط عندما ق > ع

⑤ فى الشكل المقابل :

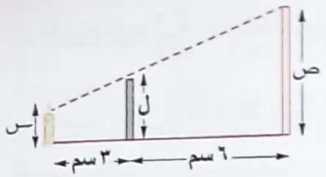
عمود إنارة طوله ٥,١ متر مقام على قمة طريق منحدر ينزل رجل طوله ١,٧ متر على المنحدر بسرعة ٢ م/ث فإن معدل زيادة طول ظل الرجل على المنحدر = ... م/ث.



(أ) ١ (ب) ١,٥ (جـ) ٢ (د) ٦

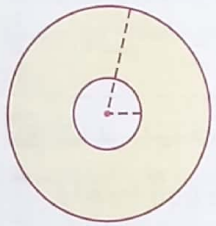
⑥ فى الشكل المقابل :

وضع حاجز معتم ارتفاعه (ل) سم على بعد ٣ سم من شمعة تحترق وعلى بعد ٦ سم من حائط رأسى فإذا كان طول الشمعة (س) ينقص بمعدل ٣ سم / ساعة فإن معدل تغير طول ظل الحاجز على الحائط (ص) يساوى سم/ساعة.



(أ) ٣ (ب) -٣ (جـ) ٦ (د) -٦

⑦ فى الشكل المقابل :

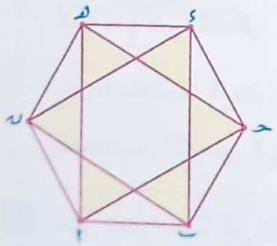


دائرتان متحدتا المركز طولا نصفا قطريهما ٦ سم ، ١٨ سم إذا تزايد طول نصف قطر الصغرى بمقدار ٢ سم/ث وتزايد طول نصف قطر الكبرى بمقدار ١ سم/ث فإن المساحة بين الدائرتين خلال الفترة الزمنية]٠ ، ١٢[.....

(أ) تتزايد باستمرار. (ب) تتناقص باستمرار.

(جـ) تتزايد ثم تتناقص. (د) تتناقص ثم تتزايد.

⑧ (دور أول ٢٠٢١) فى الشكل المقابل :



ا ب حـ ء د هـ سداسى منتظم ،
إذا كان طول ضلعه يزداد بمعدل $٣\sqrt{٢}$ سم/ث ، فإن معدل التغير فى مساحة الجزء المظلل بالنسبة للزمن يساوى سم^٢/ث عند اللحظة التى يكون فيها طول ضلعه ٤ سم

(أ) ١٢ (ب) ٨ (جـ) $١٢\sqrt{٣}$ (د) $٨\sqrt{٣}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٦٥ إذا كانت ك = ٤٠٠ كرة يتغير حجمها ح بانتظام محتفظة بشكلها الكروى وعند أى لحظة زمنية ن ثانية كان طول نصف قطرها نق سم ومساحة سطحها م سم٢

أثبت أن : $\frac{د ح}{د ن} = \frac{د ح}{د نق} \times \frac{د نق}{د ن} = \frac{١}{\pi ١٦} \times \left(\frac{د م}{د نق}\right)^{٢}$ ومن ثم احسب قيمة : $\frac{د نق}{د ن}$

عندما يكون $\frac{د ح}{د ن} = \pi$ سم٣/ث ، $\frac{د م}{د نق} = \pi ٢$ سم٢/ث وأوجد عندئذ مساحة سطح الكرة.

« $\frac{١}{٤}$ سم/ث ، ٤ π سم٢ »

٦٦ كتلة معلومة من غاز درجة حرارتها ثابتة ، انقص حجمها بمعدل ثابت قدرة ٢ سم٣/ث. فإذا كان الضغط يتناسب عكسيًا مع الحجم وأن الضغط يعادل ١٠٠٠ ث جم/سم٢ عندما يكون الحجم ٢٥٠ سم٣ . أوجد معدل تغير الضغط بالنسبة للزمن عندما يصبح حجم الغاز ١٠٠ سم٣

« ٥٠ ث.جم / سم٢/ث »

٦٧ فى دائرة كهربية مغلقة ، إذا كان حـ فرق الجهد (فولت) ، ت شدة التيار (أمبير) ، م المقاومة (أوم) وتزايد فرق الجهد بمعدل ١ فولت/ث ، وتناقص شدة التيار بمعدل $\frac{١}{٢}$ أمبير/ث أوجد معدل تغير المقاومة فى اللحظة التى يكون فيها حـ = ١٢ فولت ، ت = ٢ أمبير.

« ٢ أوم/ث »

٦٨ (دور أول ٢٠١٠) من نقطة الأصل (و) فى مستوى إحداثى متعامد تحركت نقطة أ فى اتجاه ٣٠° شمال الشرق بسرعة مقدارها ٤ متر/دقيقة ، وبعد دقيقة تحركت نقطة ب من نفس نقطة (و) على المستقيم $\overleftrightarrow{و ب}$ الذى معادلته : س + $\sqrt{٣}$ ص = ٠

بسرعة مقدارها ٦ متر/دقيقة وفى الاتجاه الذى يجعل ∠ ب و أ حادة. أوجد معدل تغير المسافة بين النقطتين أ ، ب بعد مضى دقيقتين من تحرك النقطة ب

« ٥ م/دقيقة »

٦٩ يسير قطارًا بادئًا حركته فى الحادية عشر صباحًا فى اتجاه الشرق بسرعة ٤٥ كم/س بينما بدأ قطار آخر حركته الساعة ١٢ ظهرًا من نفس النقطة متجهًا إلى الجنوب بسرعة ٦٠ كم/س أوجد معدل زيادة المسافة بينهما عند الساعة الثالثة ظهرًا.

« ٥٢,٥ $\sqrt{٣}$ كم/س »

٧٠ فى الساعة الثامنة صباحًا كانت سفينة تقع على بعد ٦٠ كم شرق ميناء معين وتقترب منه بسرعة ١٠ كم/ساعة وفى الساعة التاسعة صباحًا خرجت من الميناء سفينة أخرى متجهة نحو الجنوب بسرعة ٣٠ كم/ساعة. أوجد معدل تغير البعد بين السفينتين فى الساعة العاشرة صباحًا وهل تقترب السفينتان أم تبتعدا حينئذ ؟

« ١٠ كم/ساعة »

٧١ أقلعت طائرة من مطار القاهرة من نقطة أ تصنع مع الأفقى زاوية قياسها ٦٠° قطعت مسافة ١٥ كم فى هذا الاتجاه ثم سارت أفقية مبتعدة عن المطار بسرعة ٧٥٠ كم/ساعة. أوجد معدل تغير بعد الطائرة عن نقطة الإقلاع أ بعد مرور دقيقتين على سيرها أفقيًا.

« $\frac{٤٨٧٥}{٧}$ كم/ساعة »

٧٢ بدأت سفينة الحركة من موقع أ بسرعة منتظمة ١٨ كم/ساعة فى اتجاه الشمال وبعد ساعتين سارت فى اتجاه يصنع ٣٠° شمال الشرق. أوجد معدل تغير المسافة بين موضع السفينة والموقع أ بعد ٤ ساعات من بدء الحركة.

« ٩ $\sqrt{٣}$ كم/ساعة »

٧٣ أبحرت سفينة من ميناء الساعة التاسعة صباحًا متجهة نحو الغرب بسرعة ٢٠ كم/ساعة وبعد ساعة ابحرت سفينه أخرى من نفس الميناء بسرعة ٤٠ كم/ساعة فى اتجاه ٦٠° شمال الغرب. أوجد معدل التباعد بين السفينتين الساعة ١١ صباحًا.

« ٣٠ كم/ساعة »

٧٤ شاهد رجل يقف عند ضفة نهر قارب متحرك فى خط مستقيم موازيًا لضفة النهر ويبعد عن ضفة النهر ١٠ متر وعندما كان الخط الواصل بين الرجل والقارب يميل على ضفة النهر بزاوية قياسها ٣٠° كان معدل تغير هذه الزاوية يساوى $\frac{١}{٢}$ دائرى/ثانية. أوجد سرعة القارب عند هذه اللحظة.

« ٢٠ م/ث »

٧٥ (دور ثان ٢٠٠٦) $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{أ حـ}$ طريقان متعامدان يحصران زاوية قياسها ٩٠° ، تحركت سيارة على الطريق $\overleftarrow{أ ب}$ من أ بسرعة ٤٠ كم/ساعة وبعد ١٠ دقائق تحركت سيارة أخرى على الطريق $\overleftarrow{أ حـ}$ من نقطة أ بسرعة ٦٠ كم/ساعة. أوجد معدل تباعدهما بعد مضى ٢٠ دقيقة من بدأ تحرك السيارة الثانية.

« ٥٠ $\sqrt{٢}$ كم/س »

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٧٦ (أسئلة وزارية ٢٠٠٠) أ حـ ، ب حـ طريقان متعامدان ، أ حـ = ب حـ = ١٠٠٠ متر يسير رجلان الأول من أ نحو حـ بسرعة منتظمة ٥٠ متر/دقيقة ، والثانى من ب نحو حـ بسرعة منتظمة ١٠٠ متر/دقيقة. أثبت أن : البعد بين الرجلين بعد مضى ن دقيقة من لحظة انطلاقهما معًا يعطى بالعلاقة : ف^{٢} = (١٠٠٠ − ٥٠ ن)^{٢} + (١٠٠٠ − ١٠٠ ن)^{٢}

ثم أوجد : ① معدل تغير المسافة بينهما بالنسبة للزمن عندما تكون ن = ٤

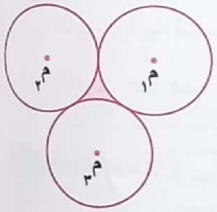
② متى يبدأ الرجلان فى التباعد عن بعضهما ؟ «−١٠٠ م/دقيقة ، ١٢ دقيقة»

٧٧ $\overleftarrow{و س}$ ، $\overleftarrow{و ص}$ شعاعان يحصران بينهما زاوية ١٥٠° تتحرك أ على $\overleftarrow{و س}$ بسرعة ثابتة قدرها ٤ سم/ثانية وكانت ب نقطة أخرى تتحرك على $\overleftrightarrow{و ص}$ بحيث تكون مساحة سطح Δ و أ ب ثابتة وتساوى ٣٠ سم^{٢}. أوجد مقدار واتجاه سرعة ب عندما يكون و أ = ٨ سم.

«٧,٥ سم/ث فى اتجاه $\overleftarrow{ب و}$»

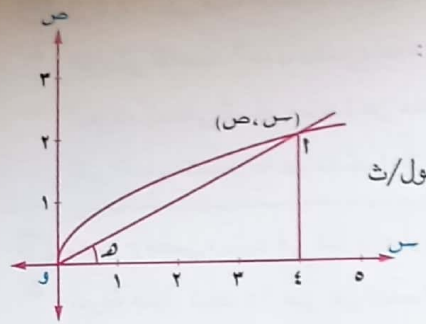
٧٨ حبل طوله ٥٠ متر يمر حول بكرة ترتفع عن الأرض ٢٤ متر مربوط بطرفه ثقل والطرف الآخر مربوط فى سيارة تسير على الأرض بسرعة ١٨ م/ث أوجد معدل ارتفاع الثقل فى اللحظة التى تبعد فيها السيارة مسافة ٣٢ متر عن مسقط البكرة. «١٤,٤ م/ث»

٧٩ فى الشكل المقابل :



ثلاث دوائر متطابقة ومتماسة مثنى مثنى طول نصف قطر كل منها نق تتمدد بانتظام بحيث تظل محتفظة بشكلها فإذا كان طول نصف قطر كل منها يتمدد بمعدل ١ سم/د أوجد معدل التغير فى مساحة المنطقة المظللة فى اللحظة التى يكون فيها طول نصف قطر كل منها ١٠ سم. «(٢٠ √٣ − ١٠ π) سم/د»

٨٠ (دور أول ٢٠١٢) فى الشكل المقابل :



يتحرك جسيم (س ، ص) على منحنى الدالة : ص = ٢ √س وعندما س = ٤ كان الإحداثى الصادى لموضع الجسيم يتزايد بمعدل ١ وحدة طول/ث

① ما هو معدل تغير الإحداثى السينى عند هذه اللحظة ؟

② ما هو معدل تغير المسافة بين نقطة الأصل والجسيم عند نفس اللحظة ؟

③ ما هو معدل تغير زاوية الميل هـ عند نفس اللحظة ؟

«٤ وحدة طول/ث ، $\frac{٥\sqrt{٢٩}}{٥}$ وحدة طول/ث ، $\left(\frac{-١}{٥}\right)^{٥}$ /ث»

٨١ بدأت النقطتان أ ، ب الحركة معًا من نقطة الأصل (و) بحيث تتحرك النقطة أ فى الاتجاه الموجب لمحور السينات بسرعة ٢ وحدة طول/ث وتتحرك النقطة ب فى الربع الأول على منحنى الدالة د : د (س) = س^{٢} بحيث يبقى طول $\overline{و ب}$ = طول $\overline{أ ب}$ دائمًا أوجد معدل التغير فى مساحة Δ أ ب و بعد ٥ ثوان من بدء الحركة. «٧٥ وحدة مربعة/ث»

٨٢ تتحرك النقطة أ على دائرة الوحدة فى الربع الأول وكانت سرعة إحداثيها السينى تساوى ٣ وحدة/ث فأوجد معدل تغير الإحداثى السينى لنقطة تقاطع المماس للدائرة عند أ مع محور السينات عندما يكون الإحداثى السينى لنقطة تقاطع المماس مع محور السينات يساوى ٢ وحدة. «−١٢ وحدة/ث»

٨٣ إذا كانت النقطة أ تتحرك فى الاتجاه الموجب لمحور السينات مبتدأة من نقطة الأصل (و) بسرعة $\frac{٢}{٣}$ وحدة طول/د وكانت ب (٠ ، ٢) ، حـ (٠ ، ٤)

أوجد معدل تغير الزاوية (د ب أ حـ) عندما تصل النقطة أ إلى (٢ ، ٠) «$\left(\frac{١}{٣٠}\right)^{٥}$ / د»

٨٤ ماسورة مياه طرفاها أ ، ب وطولها ٥ أمتار ، تستند بطرفها أ على أرض أفقية وبإحدى نقطها ء على سور رأسى ارتفاعه ٣ أمتار. فإذا انزلق الطرف أ مبتعدًا عن السور بمعدل $\frac{٥}{٤}$ متر/د أوجد معدل هبوط الطرف ب عندما تصل إلى حافة السور. «$\frac{٣}{٥}$ م/د»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٨٥ إناء على هيئة اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها من الداخل ٩ سم وطول نصف القطر الداخلي لقاعدته ٦ سم. وضع داخله ساق معدنية طولها ١٦ سم ، فإذا كان معدل انزلاق الطرف السفلي للساق مبتعدة عن حافة الاسطوانة ٢ سم/ث ، أوجد معدل انزلاق الساق على قاعدة الاسطوانة عندما تصل إلى نهاية قاعدتها. « $\frac{٥}{٢}$ سم/ث »

٨٦ مصباح مضيء مثبت في قمة برج ارتفاعه ١٦ متر فإذا سقطت كرة من نفس الارتفاع من شرفة منزل تبعد ١٥ متر عن المصباح. أوجد سرعة تحرك ظل الكرة على الأرض عندما تكون الكرة على ارتفاع ٦ متر عن سطح الأرض. « -٦,٢٣ م/ث »

٨٧ عمود إنارة طوله ١٥ مترًا أعلاه مصباح قذفت كرة رأسيًا إلى أعلى بسرعة ٥ أمتار/ث من مسافة قدرها ١٢ مترًا من قاعدة العمود. أوجد معدل ابتعاد ظل الكرة على الأرض من قاعدة العمود عند منتصف الثانية الأولى. « ٠,٠٩٥٥ م/ث »

مسائل تقيس مهارات التفكير

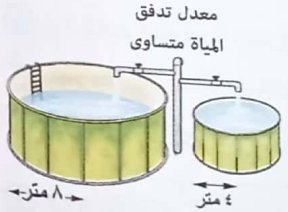
٨٨ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مضلع غير منتظم عدد أضلاعه = م وطول كل ضلع يزداد بمعدل منتظم ف سم/ث فإن :

(أ) محيطه يزداد بمعدل ف سم/ث (ب) محيطه يزداد بمعدل م ف سم/ث

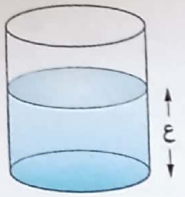
(جـ) محيطه يزداد ولكن ليس بمعدل ثابت. (د) مساحته تزداد بمعدل ف سم^{٢}/ث

(٢) خزانان للمياه كل منهما أسطوانى الشكل ، نصف قطر الخزان الأصغر ٤ متر ونصف قطر الخزان الأكبر ٨ متر وتم ملء الخزانين بالمياه بنفس المعدل ووجد أن معدل تزايد ارتفاع الماء فى الخزان الأصغر $\frac{١}{٢}$ م/دقيقة فإن معدل تزايد ارتفاع الماء فى الخزان الأكبر = ... م/دقيقة.

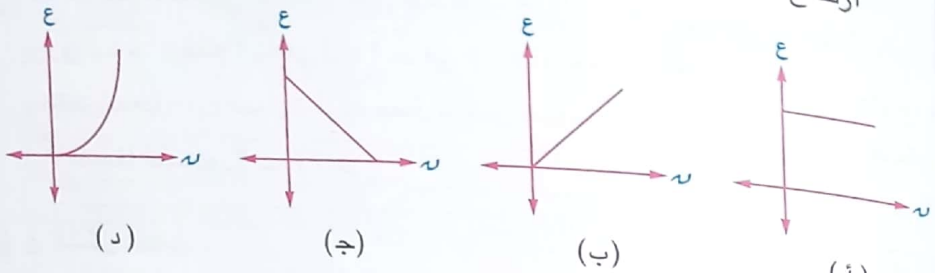


(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٨}$ (د) $\frac{١}{١٦}$

(٣) فى الشكل المقابل :

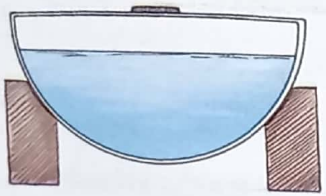


يصب ماء فى أسطوانة دائرية قائمة بمعدل ثابت فأى من الأشكال التالية يعبر عن العلاقة بين ارتفاع الماء (ع) فى الأسطوانة والزمن (ن) ؟



(أ) (ب) (جـ) (د)

(٤) خزان ماء على شكل نصف كرة طول نصف قطرها ٢ متر صُب فيه الماء فإذا كان معدل تغير ارتفاع الماء فيه $\frac{١}{٤}$ م/د فإن معدل تغير مساحة سطح الماء فى الخزان بعد ٢ دقيقة من بداية صب الماء هو م^{٢}/د



(أ) $\pi \frac{١}{٤}$ (ب) $\pi \frac{١}{٢}$ (جـ) $\pi \frac{٣}{٤}$ (د) $\pi \frac{٢}{٣}$

(٥) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه أ ب = أ حـ = ١٣ سم ، ب حـ = ١٠ سم. إذا تحرك المستقيم ل من نقطة ب موازيًا $\overleftrightarrow{أ حـ}$ وفى اتجاه $\overleftarrow{ب حـ}$ ويقطع $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب حـ}$ فى ء ، هـ على الترتيب بحيث معدل التغير فى ب هـ = $\frac{١}{١٠}$ سم/ث فإن معدل تغير مساحة Δ ء هـ ب عند ب هـ = ١ سم يساوى سم^{٢}/ث

(أ) ٠,٤٨ (ب) ٠,١٢ (جـ) ٠,٩٦ (د) ٠,٢٤

CamScanner الممسوحة ضوئيا بـ

٩٠ من المعلوم أن شدة الاستضاءة عند نقطة تتناسب عكسيًا مع مربع البعد عن مصدر الضوء. يتحرك قارب في اتجاه منارة بسرعة ثابتة فإذا كان ارتفاع المنارة ١٠٠ متر، أثبت أن معدل ازدياد شدة الاستضاءة عند القارب عندما يكون على بعد ١٠٠ متر من قاعدة المنارة = $\frac{٢٤}{٨}$ مرة قدر معدلها عندما كان القارب على بعد ٢٠٠ متر من قاعدة المنارة

٩١ أ ب حـ مثلث متساوى الساقين طول قاعدته ب حـ = ٦ سم ، ارتفاعه يساوى ٨ سم ، $\overline{ل م}$ يوازى $\overline{ب حـ}$ ويقطع $\overline{أ ب}$ فى ل ، $\overline{أ حـ}$ فى م ، فإذا علم أن ارتفاع شبه المنحرف ل ب حـ م يتناقص بمعدل ٠,٥ سم/ث. أوجد معدل تناقص مساحة شبه المنحرف ل ب حـ م عندما يكون $\overline{ل م}$ منصفًا للضلعين $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ حـ}$

← ١,٥ سم²/ث.

٩٢ فى الشكل المقابل :

د و م ر شبه منحرف متساوى الساقين

ويميل كل من ساقية بزاوية ٤٥° على القاعدة الكبرى،

أ ب حـ ء مستطيل بحيث تتحرك أ من د إلى و

وتتحرك ء من (ر) إلى (م) فإذا كان معدل تغير طول $\overline{أ ب}$ = $\frac{١}{٤}$ سم/ث

فأوجد معدل تغير مساحة المستطيل أ ب حـ ء عندما يكون طول $\overline{أ ب}$ = ٣ سم

واحسب مساحة المستطيل عندما تتوقف مساحته عن الزيادة.

← ١- سم²/ث ، ٣٢ سم²

٩٣ قمع على هيئة مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٣٥ سم ونصف قطر قاعدته ٧ سم ثبت بحيث يكون محوره رأسيًا ورأسه إلى أسفل يصب فيه الزيت بمعدل ٥,٤ سم³/ث بينما يتسرب الزيت من ثقب عند رأسه بمعدل ٣,٢ سم³/ث أوجد المعدل الذى يرتفع به الزيت فى القمع عندما يصل الزيت إلى ارتفاع ٢٥ سم. $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$

← ٠,٠٢٨ سم/ث

٩٤ مخروط دائرى قائم رأسه لأسفل طول نصف قطر قاعدته ٨٠ سم وارتفاعه ١٦٠ سم يتسرب منه الماء ويتجمع فى وعاء أسطوانى الشكل طول نصف قطر قاعدته ٥٠ سم. أوجد ارتفاع الماء فى المخروط فى اللحظة التى يكون فيها معدل هبوط الماء فى المخروط مساويًا لمعدل ارتفاع الماء فى الأسطوانة.

← ١٠٠ سم

مسائل مرتبطة بالهندسة الفراغية

٩٤ متوازى مستطيلات أبعاده فى لحظة ما هى ٣ ، ٤ ، ١٢ سم فإذا كان معدل تزايد بعده الأول ٢ سم/ث ومعدل تزايد بعده الثانى ١ سم/ث ومعدل تناقص بعده الثالث ٣ سم/ث.

أوجد : ① معدل تغير حجم متوازى المستطيلات فى أى لحظة زمنية (م)

② معدل تغير حجم متوازى المستطيلات فى نهاية ٢ ثانية.

③ معدل تغير طول قطر متوازى المستطيلات عند نفس اللحظة.

← ١٢- سم³/ث ، $\frac{٢}{١١}$ سم/ث

٩٥ يعبر رجل كوبرى يعلو سطح الماء بمقدار ١٢ مترًا بسرعة منتظمة ٣ م/دقيقة شاهد قارب يسير فى اتجاه عمودى على الكوبرى بسرعة منتظمة ٦ م/دقيقة فى اللحظة التى كان فيها تحته تمامًا. أوجد المعدل الذى يبتعد به كل منهما عن الآخر بعد ٦ دقائق من اللحظة التى كانا فيها على خط رأسى واحد.

← $\frac{٤٥}{٧}$ م/د

٩٦ تطير طائرة أفقيًا على ارتفاع ٢٠٠٠ متر متجهة نحو الجنوب بسرعة ١٥٠ متر/ث فمرت على سيارة تسير بسرعة ٧٥ متر/ث متجهة نحو الشرق. أوجد المعدل الذى تبتعد به الطائرة عن السيارة بعد ٤٠ ث.

← $\frac{٥}{٧}$ ١٦٠ متر/ثانية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

متطلبات قبلية جبرية - الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعى ودالة اللوغاريتم الطبيعى

تذكر أن

١ الدالة الأسية :

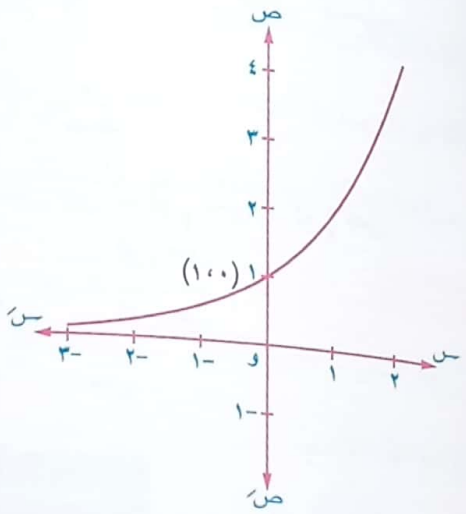
* إذا كان : أ ∈ ع$^{+}$ − {١} فإن الدالة : د : ع ⟵ ع$^{+}$ حيث د (س) = أ^{س}

تسمى دالة أسية أساسها (أ) وهى دالة أحادية مجالها = ع

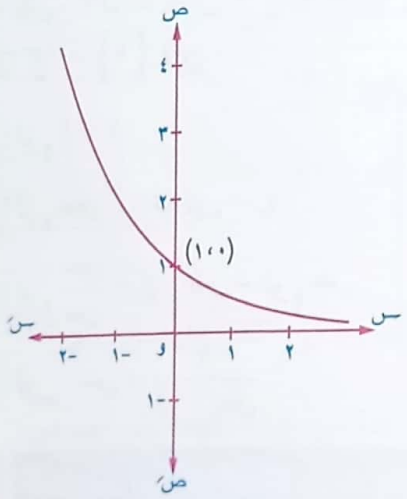
، مداها = ع$^{+}$ ومنحناها يمر بالنقطة (٠ ، ١)

* الشكل البيانى للدالة الأسية د : د (س) = أ^{س} يأخذ أحد الشكلين الآتيين حسب قيمة الأساس أ :

أ > ١



١ > أ > ٠



* المنحنى ص = أ$^{س + ب}$ + حـ يمثل بيانيًا بنفس المنحنى ص = أ^{س} بانتقال (-ب ، حـ)

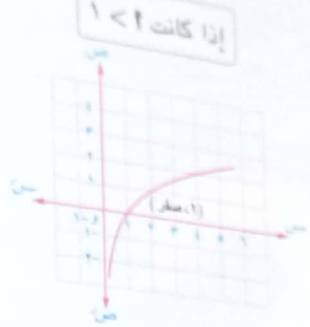
٢ الدالة اللوغاريتمية :

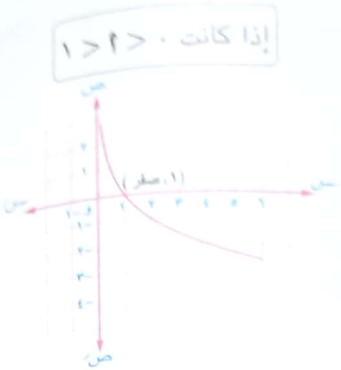
* إذا كان : أ ∈ ع$^{+}$ − {١} فإن الدالة د : ع$^{+}$ ⟵ ع حيث د (س) = لو$_{أ}$ س

تسمى دالة لوغاريتمية أساسها (أ) وهى دالة أحادية مجالها = ع$^{+}$ ومداها = ع ومنحناها يمر بالنقطة (١ ، ٠)

* الشكل البيانى للدالة اللوغاريتمية د : د (س) = لو$_{أ}$ س يأخذ أحد الشكلين الآتيين حسب قيمة الأساس أ :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner





* المنحنى ص = لو$_{م}$ (س + ب) + حـ يمثل بيانيًا بنفس المنحنى ص = لو$_{م}$ س بانتقال (−ب ، حـ)
* اللوغاريتم المعتاد هو اللوغاريتم الذى أساسه = ١٠

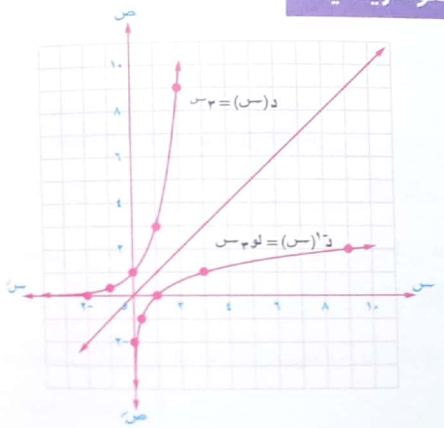
*** بعض خواص اللوغاريتمات**

إذا كان : س ∈ ع$^{+}$ ، ص ∈ ع$^{+}$ ، ن ∈ ع مع مراعاة أن يكون الأساس أ ∈ ع$^{+}$ − {١} فإن :

① لو$_{م}$ أ = ١
② لو$_{م}$ ١ = صفر
③ لو$_{م}$ س^{ن} = ن لو$_{م}$ س
④ لو$_{م}$ س ص = لو$_{م}$ س + لو$_{م}$ ص
⑤ لو$_{م}$ $\frac{س}{ص}$ = لو$_{م}$ س − لو$_{م}$ ص
⑥ لو$_{ص}$ س = $\frac{لو_{م} س}{لو_{م} ص}$
⑦ لو$_{ص}$ س = $\frac{١}{لو_{س} ص}$
⑧ أ لو$_{م}$ س = س

٣ العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية :

* إذا كان : أ ∈ ع$^{+}$ − {١}
، س ∈ ع$^{+}$
، ص ∈ ع
فإن : ص = لو$_{م}$ س ⇔ س = أ^{ص}
* الدالة اللوغاريتمية هى الدالة العكسية للدالة الأسية.



العدد النيبرى (هـ) هو عدد غير نسبى ، ٢ < هـ < ٣

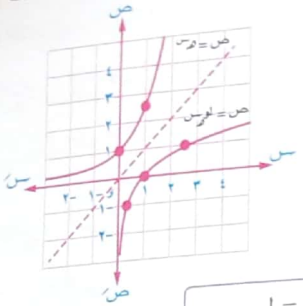
هـ = ١ + $\frac{١}{١}$ + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٣}$ + ... = $\sum_{ن=٠}^{\infty}$ $\frac{١}{ن}$ (متسلسلة ماكلورين)

العدد هـ = ٢,٧١٨٢٨

*** الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعى :**

د : ع ⟵ ع$^{+}$ حيث د (س) = هـ^{س}

دالة أسية أساسها (هـ) وهى دالة أحادية مجالها = ع
، مداها = ع$^{+}$
ومنحناها يمر بالنقطتين (٠ ، ١) ، (١ ، هـ)



*** دالة اللوغاريتم الطبيعى :** د : ع$^{+}$ ⟵ ع حيث د (س) = لو$_{هـ}$ س

دالة لوغاريتمية أساسها (هـ) وهى دالة أحادية مجالها = ع$^{+}$
، مداها = ع ومنحناها يمر بالنقطتين (١ ، ٠) ، (هـ ، ١)

لاحظ أن

① إذا كان : س ∈ ع$^{+}$ ، ص ∈ ع فإن : ص = لو$_{هـ}$ س ⇔ س = هـ^{ص}
② الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعى هى الدالة العكسية لدالة اللوغاريتم الطبيعى.
③ * من الشكل السابق نجد أن : نهـــا$_{س ⟵ ∞}$ لو$_{هـ}$ س = ∞ ، نهـــا$_{س ⟵ ٠^{+}}$ لو$_{هـ}$ س = − ∞

*** بعض خواص اللوغاريتم الطبيعى :**

إذا كان : س ، ص ∈ ع$^{+}$ ، ن ∈ ع مع مراعاة أن يكون الأساس ∈ ع$^{+}$ − {١} فإن :

① لو$_{هـ}$ هـ = ١
② لو$_{هـ}$ ١ = صفر
③ لو$_{هـ}$ س^{ن} = ن لو$_{هـ}$ س
④ هـ$^{لو_{هـ} س}$ = س
⑤ لو$_{هـ}$ س ص = لو$_{هـ}$ س + لو$_{هـ}$ ص
⑥ لو$_{هـ}$ $\frac{س}{ص}$ = لو$_{هـ}$ س − لو$_{هـ}$ ص
⑦ لو$_{ص}$ س = $\frac{لو_{هـ} س}{لو_{هـ} ص}$
⑧ لو$_{هـ}$ س × لو$_{س}$ هـ = ١

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

2

مثال

حل كلاً من المعادلات الآتية :

① $\log_{\text{ه}}(\text{س}+11)=2$

② $\text{ه}^{2\text{س}-1}=23$

③ $\log_{\text{ه}}\text{س}+\log_{\text{ه}}(\text{س}+2)=\log_{\text{ه}}(\text{س}+6)$

④ $2\,\text{ه}^{\text{س}}+2\,\text{ه}^{-\text{س}}=5$

الحل

① ∵ $\log_{\text{ه}}(\text{س}+11)=2$

∴ $\text{س}+11=\text{ه}^{2}=25$

∴ $\text{س}=14$

② ∵ $\log_{\text{ه}}\text{س}+\log_{\text{ه}}(\text{س}+2)=\log_{\text{ه}}(\text{س}+6)$

∴ $\log_{\text{ه}}\text{س}(\text{س}+2)=\log_{\text{ه}}(\text{س}+6)$ ∴ $\text{س}(\text{س}+2)=\text{س}+6$

∴ $\text{س}^{2}+\text{س}-6=0$ ∴ $(\text{س}-2)(\text{س}+3)=0$

∴ إما $\text{س}=2$ (تحقق) أ، $\text{س}=-3$ (مرفوض)

③ ∵ $\text{ه}^{2\text{س}-4}=23$ بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس ه

∴ $\log_{\text{ه}}\text{ه}^{2\text{س}-4}=\log_{\text{ه}}23$

∴ $(3\text{س}-4)\log_{\text{ه}}\text{ه}=\log_{\text{ه}}23$

∴ $3\text{س}-4=\log_{\text{ه}}23$

∴ $3\text{س}=4+\log_{\text{ه}}23$

∴ $\text{س}\simeq 2{,}38$

لاحظ أن

لكتابة $4+\log_{\text{ه}}23$ على الآلة الحاسبة نكتب

= 3 2 Ln + 4

④ ∵ $2\,\text{ه}^{\text{س}}+2\,\text{ه}^{-\text{س}}=5$ بالضرب × $\text{ه}^{\text{س}}$

∴ $2\,\text{ه}^{2\text{س}}-5\times\text{ه}^{\text{س}}+2=0$ ∴ $(2\,\text{ه}^{\text{س}}-1)(\text{ه}^{\text{س}}-2)=0$

∴ إما $\text{ه}^{\text{س}}=\frac{1}{2}$ أ، $\text{ه}^{\text{س}}=2$

∴ $\text{س}=\log_{\text{ه}}\frac{1}{2}\simeq -0{,}69$ أ، $\text{س}=\log_{\text{ه}}2\simeq 0{,}69$

تمارين

فهم • تطبيق • مستويات عليا

من أسئلة الكتاب المدرسى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① م = $\text{ه}^{\log_{\text{ه}}7}$ فإن : م تساوى

(أ) ١ (ب) $\frac{1}{\text{ه}}$ (جـ) ه (د) ٧

② مجموعة حل المعادلة : $\log_{\text{ه}}(\text{س}-3)+\log_{\text{ه}}(\text{س}-2)=\log_{\text{ه}}6$ هى

(أ) $\{0\,،\,5\}$ (ب) $\{5\}$ (جـ) $\{2\,،\,3\}$ (د) $\varnothing$

③ منحنى الدالة د حيث د (س) = $\text{ه}^{\text{س}-3}+2$ هو نفس منحنى ر : ر (س) = $\text{ه}^{\text{س}}$ بانتقال

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٢ ، −٣) (جـ) (٣ ، −٢) (د) (٣ ، ٢)

④ منحنى الدالة : د : د (س) = ١ + $\log_{\text{ه}}(\text{س}-2)$

هو نفس منحنى الدالة ر : ر (س) = $\log_{\text{ه}}$ س بالانتقال

(أ) (١ ، ٢) (ب) (١ ، −٢) (جـ) (−٢ ، ١) (د) (٢ ، ١)

٢ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

① لو (س − ٣) = ٢

② $\log_{\text{ه}}$ س = ٤

③ $\log_{٢}(\text{س}+7)=5$

④ $\log_{\text{ه}}(2\text{س}+1)=5$

⑤ $2\,\text{ه}^{\text{س}}=21$

⑥ $\text{ه}^{\text{س}}=10$

⑦ $\text{ه}^{5\text{س}+1}=20$

⑧ $\text{ه}^{3\text{س}+1}=\frac{1}{2}$

⑨ $7^{\text{س}}=25$

⑩ $\log_{\text{ه}}(\text{س}+1)-\log_{\text{ه}}(\text{س}-2)=\log_{\text{ه}}4$

⑪ $\log_{\text{ه}}\text{س}+\log_{\text{ه}}(\text{س}-3)=0$

⑫ $\log_{\text{ه}}2+\log_{\text{ه}}\text{س}=4$

⑬ $\log_{\text{ه}}4^{2\text{س}-1}=\log_{\text{ه}}50$

⑭ $\log_{\text{ه}}\text{ه}^{\text{س}}=3\log_{\text{ه}}3$

⑮ $2\log_{\text{ه}}(\text{س}-3)=\log_{\text{ه}}(\text{س}+5)+\log_{\text{ه}}4$

⑯ $\text{س}-\text{س}\,\text{ه}^{2\text{س}-2}=0$

⑰ $24-\text{ه}^{2\text{س}}=10$

⑱ $\text{ه}^{\text{س}}+6\,\text{ه}^{-\text{س}}=5$

⑲ $\text{ه}^{\text{س}}+\text{ه}^{-\text{س}}=2$

⑳ $5\,\text{ه}^{\text{س}^{2}}=200$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الدرس 1

نهايات الدوال المرتبطة بالعدد (هـ)

• إذا كانت د : د (س) = $(1 + \frac{1}{س})^{س}$ وأردنا دراسة سلوك الدالة د عندما تكبر قيمة س وتقترب من ∞ وذلك بفرض أن س تأخذ القيم : ١ ، ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ ، ١٠٠٠٠ ، ... فنحصل على الجدول الآتي :

س	١	١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠	←	∞
$(1 + \frac{1}{س})^{س}$	٢	٢,٥٩٣٧٤	٢,٧٠٤٨١٣	٢,٧١٦٩٢٤	٢,٧١٨١٤٦	←	٢,٧١٨٢٨

ونلاحظ من الجدول السابق أنه كلما زادت قيمة س واقتربت من ∞ اقتربت قيمة

$\lim_{س \to \infty} (1 + \frac{1}{س})^{س}$ من العدد الثابت هـ ≈ ٢,٧١٨٢٨

تعريف العدد (هـ) كنهاية

$$\lim_{س \to \infty} (1 + \frac{1}{س})^{س} = هـ$$

* بوضع $\frac{1}{س}$ = ص في العلاقة السابقة حيث س ≠ ٠

، ∵ س ← ∞ تعنى أن ص ← صفر

فإن : $\lim_{س \to \infty} (1 + \frac{1}{س})^{س} = \lim_{ص \to 0} (1 + ص)^{\frac{1}{ص}}$

أى يمكن التعبير عن العدد (هـ) بالصورة $هـ = \lim_{س \to 0} (1 + س)^{\frac{1}{س}}$

لاحظ أن

التعويض المباشر يعطى كمية غير معينة (1^{∞})

مثال ١

أوجد كلًا مما يأتى :

① $\lim_{س \to \infty} (1 + \frac{1}{س})^{2س}$

② $\lim_{س \to \infty} (1 + \frac{1}{س})^{س+٥}$

③ $\lim_{س \to \infty} (1 + \frac{٤}{س})^{س}$

الحل

① $\lim_{س \to \infty} (1 + \frac{1}{س})^{2س} = \lim_{س \to \infty} \left((1 + \frac{1}{س})^{س}\right)^{2}$

$= \left(\lim_{س \to \infty} (1 + \frac{1}{س})^{س}\right)^{2} = هـ^{2}$

② $\lim_{س \to \infty} (1 + \frac{1}{س})^{س+٥} = \lim_{س \to \infty} [(1 + \frac{1}{س})^{س} \times (1 + \frac{1}{س})^{٥}]$

$= \lim_{س \to \infty} (1 + \frac{1}{س})^{س} \times \lim_{س \to \infty} (1 + \frac{1}{س})^{٥}$

$= هـ \times (1 + ٠)^{٥} = هـ$

لاحظ أن

$\lim_{س \to \infty} \frac{1}{س}$ = صفر

③ بوضع ص = $\frac{٤}{س}$ حيث س ≠ ٠ فإن ص ← ٠ عندما س ← ∞

∴ $\lim_{س \to \infty} (1 + \frac{٤}{س})^{س} = \lim_{ص \to 0} (1 + ص)^{\frac{٤}{ص}} = \lim_{ص \to 0} \left((1 + ص)^{\frac{1}{ص}}\right)^{٤}$

$= \left(\lim_{ص \to 0} (1 + ص)^{\frac{1}{ص}}\right)^{٤} = هـ^{٤}$

ملاحظة

من المثال السابق يمكن استنتاج أنه إذا كان ؟ عدد نسبى فإن :

① $\lim_{س \to \infty} (1 + \frac{1}{س})^{؟س} = هـ^{؟}$

② $\lim_{س \to \infty} (1 + \frac{1}{س})^{س+؟} = هـ$

③ $\lim_{س \to \infty} (1 + \frac{؟}{س})^{س} = هـ^{؟}$

④ $\lim_{س \to \infty} (1 - \frac{؟}{س})^{س+ك} = هـ^{-؟}$

⑤ $\lim_{س \to \infty} (1 + \frac{؟}{س})^{\frac{س}{؟}} = هـ$

فمثلًا : $\lim_{س \to \infty} (1 + \frac{1}{س})^{٧س} = هـ^{٧}$ ، $\lim_{س \to \infty} (1 - \frac{١٩}{س})^{س} = هـ^{-١٩}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أهم النتائج

① $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{س} - 1}{س} = 1$

② $\lim_{س \to 0} \frac{لو_{م}(1 + س)}{س} = لو_{م} هـ$ ومنها $\lim_{س \to 0} \frac{لو_{هـ}(1 + س)}{س} = 1$

③ $\lim_{س \to 0} \frac{م^{س} - 1}{س} = لو_{هـ} م$ ومنها $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{س} - 1}{س} = 1$

الإثبات

① $\lim_{س \to 0} هـ^{س} = هـ^{صفر} = 1$

② $\lim_{س \to 0} \frac{لو_{م}(1 + س)}{س} = \lim_{س \to 0} [\frac{1}{س} لو_{م}(1 + س)] = \lim_{س \to 0} [لو_{م}(1 + س)^{\frac{1}{س}}]$

$= لو_{م} [\lim_{س \to 0} (1 + س)^{\frac{1}{س}}] = لو_{م} هـ$

* بوضع $م = هـ$ ينتج أن : $\lim_{س \to 0} \frac{لو_{هـ}(1 + س)}{س} = لو_{هـ} هـ = 1$

③ بوضع $م^{س} - 1 = ص$ ∴ عند $س \to 0$ فإن : $ص \to 0$

ويكون $م^{س} = 1 + ص$ بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ $لو_{هـ} م^{س} = لو_{هـ}(1 + ص)$ ∴ $س \, لو_{هـ} م = لو_{هـ}(1 + ص)$

∴ $س = \frac{لو_{هـ}(1 + ص)}{لو_{هـ} م}$

∴ $\lim_{س \to 0} \frac{م^{س} - 1}{س} = \lim_{ص \to 0} \frac{ص \times لو_{هـ} م}{لو_{هـ}(1 + ص)} = لو_{هـ} م \times \lim_{ص \to 0} \frac{ص}{لو_{هـ}(1 + ص)}$

$= لو_{هـ} م \times 1 = لو_{هـ} م$

* بوضع $م = هـ$ ينتج أن : $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{س} - 1}{س} = لو_{هـ} هـ = 1$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٣

أوجد: ① $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{٤س} - ١}{س}$ ② $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{٣س} - ١}{٣س}$ ③ $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{س} - س - ١}{س}$ ④ $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{جاس} - ١}{س}$ ⑤ $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{٣س} - هـ^{٢س}}{س}$ ⑥ $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{س} - هـ^{٥}}{س - ٥}$

الحل

① $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{٤س} - ١}{س} = ٤ \times \lim_{س \to 0} \frac{هـ^{٤س} - ١}{٤س}$

[بوضع ٤س = ص ، عندما س ← ٠ فإن : ص ← ٠]

$= ٤ \times \lim_{ص \to 0} \frac{هـ^{ص} - ١}{ص} = ٤ \times ١ = ٤$

② $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{٣س} - ١}{٣س} = \frac{٢}{٣} \times \lim_{٢س \to 0} \frac{هـ^{٢س} - ١}{٢س}$

[بوضع ٢س = ص ، عندما س ← ٠ فإن ص ← ٠]

$= \frac{٢}{٣} \times \lim_{ص \to 0} \frac{هـ^{ص} - ١}{ص} = \frac{٢}{٣} \times ١ = \frac{٢}{٣}$

③ $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{س} - س - ١}{س} = \lim_{س \to 0} \frac{(هـ^{س} - ١) - س}{س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{هـ^{س} - ١}{س} - \lim_{س \to 0} ١ = ١ - ١ =$ صفر

④ $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{جاس} - ١}{س} = \lim_{س \to 0} \left[\frac{هـ^{جاس} - ١}{جاس} \times \frac{جاس}{س}\right]$

$= \lim_{جاس \to 0} \frac{هـ^{جاس} - ١}{جاس} \times \lim_{س \to 0} \frac{جاس}{س}$

$= ١ \times ١ = ١$

تذكر أن : $\lim_{س \to 0} \frac{جاس}{س} = ١$

⑤ $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{٣س} - هـ^{٢س}}{س} = \lim_{س \to 0} \left[\frac{هـ^{٢س}(هـ^{س} - ١)}{س}\right]$

$= \lim_{س \to 0} هـ^{٢س} \times \lim_{س \to 0} \frac{هـ^{س} - ١}{س} = ١ \times ١ = ١$

حل آخر: $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{٣س} - هـ^{٢س}}{س} = \lim_{س \to 0} \frac{هـ^{٣س} - ١}{س} - \lim_{س \to 0} \frac{هـ^{٢س} - ١}{س}$

$= ٣ - ٢ = ١$

⑥ $\lim_{س \to 5} \frac{هـ^{س} - هـ^{٥}}{س - ٥} = \lim_{س \to 5} \left[\frac{هـ^{٥}(هـ^{س-٥} - ١)}{س - ٥}\right]$

$= هـ^{٥} \times \lim_{(س-٥) \to 0} \frac{هـ^{س-٥} - ١}{س - ٥} = هـ^{٥} \times ١ = هـ^{٥}$

مثال ٤

أوجد: ① $\lim_{س \to 0} \frac{٢^{س} - ١}{س}$ ② $\lim_{س \to 0} \frac{لو_{هـ}(١ + ٧س)}{س}$ ③ $\lim_{س \to 0} \frac{طا ٣س}{٣^{س} - ١}$ ④ $\lim_{س \to ١} \frac{لو_{هـ} س}{س - ١}$ ⑤ $\lim_{س \to 0} (١ + ٤ طا^{٢} س)^{طا^{٢} س}$ ⑥ $\lim_{س \to 0} \frac{(هـ^{٢س} - ١)(١ - جتا ٢س)}{س^{٣}}$

الحل

① $\lim_{س \to 0} \frac{٢^{س} - ١}{س} = لو_{هـ} ٢$

② $\lim_{س \to 0} \frac{لو_{هـ}(١ + ٧س)}{س} = ٧ \lim_{٧س \to 0} \frac{لو_{هـ}(١ + ٧س)}{٧س}$

[بوضع ص = ٧س ∴ عندما س ← ٠ فإن : ص ← ٠]

$= ٧ \lim_{ص \to 0} \frac{لو_{هـ}(١ + ص)}{ص} = ٧ \times ١ = ٧$

③ $\lim_{س \to 0} \frac{طا ٣س}{٣^{س} - ١} = \lim_{س \to 0} \frac{\frac{طا ٣س}{س}}{\frac{٣^{س} - ١}{س}} = \lim_{س \to 0} \frac{طا ٣س}{س} \div \lim_{س \to 0} \frac{٣^{س} - ١}{س}$

$= \frac{٣}{لو_{هـ} ٣}$

④ بوضع س − ١ = ص ∴ س = ص + ١ ، عندما س ← ١ فإن : ص ← ٠

∴ $\lim_{س \to ١} \frac{لو_{هـ} س}{س - ١} = \lim_{ص \to 0} \frac{لو_{هـ}(ص + ١)}{ص} = ١$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑤ بوضع $٤ \, طا^{٢} س = ص$ ∴ $طا^{٢} س = \frac{ص}{٤}$ ∴ $طا^{٢} س = \frac{٤}{ص}$

∵ عندما $س \to ٠$ ، فإن : $ص \to ٠$

∴ $\lim_{س \to ٠} (١ + ٤ \, طا^{٢} س)^{\frac{١}{طا^{٢} س}} = \lim_{ص \to ٠} (١ + ص)^{\frac{١}{ص}}$

$= \left(\lim_{ص \to ٠} (١ + ص)^{\frac{١}{ص}} \right)^{٤} = هـ^{٤}$

⑥ $\lim_{س \to ٠} \left[\frac{هـ^{٢ س} - ١}{س} \times \frac{١ - جتا ٢ س}{س^{٢}} \right]$

$= ٢ \lim_{س \to ٠} \left[\frac{هـ^{٢ س} - ١}{٢ س} \right] \times \lim_{س \to ٠} \frac{٢ \, جا^{٢} س}{س^{٢}}$

$= ٢ \lim_{س \to ٠} \left(\frac{هـ^{٢ س} - ١}{٢ س} \right) \times ٢ \lim_{س \to ٠} \left(\frac{جا س}{س} \right)^{٢} = ٢ \times ١ \times ٢ \times (١)^{٢} = ٤$

لاحظ أن

$١ - جتا ٢ س = ٢ \, جا^{٢} س$

معلومة إثرائية

① لإيجاد $\lim_{ن \to \infty} \left(١ + \frac{١}{ن} \right)^{ن}$ نتبع الآتى :

∵ $ن \to \infty$ ∴ $\frac{١}{ن} \to ٠$ ∴ $\frac{١}{ن}$ أقل من الواحد

∴ يمكن فك $\left(١ + \frac{١}{ن} \right)^{ن}$ بنظرية ذات الحدين كما يلى :

$$\left(١ + \frac{١}{ن} \right)^{ن} = ١ + ن \left(\frac{١}{ن} \right) + \frac{ن(ن - ١)}{|٢} \left(\frac{١}{ن} \right)^{٢} + \frac{ن(ن - ١)(ن - ٢)}{|٣} \left(\frac{١}{ن} \right)^{٣} + \ldots$$

$$= ١ + ١ + \frac{١}{|٢} \left(\frac{ن}{ن} \right) \left(\frac{ن - ١}{ن} \right) + \frac{١}{|٣} \left(\frac{ن}{ن} \right) \left(\frac{ن - ١}{ن} \right) \left(\frac{ن - ٢}{ن} \right) + \ldots.$$

$$= ١ + ١ + \frac{١}{|٢} \left(١ - \frac{١}{ن} \right) + \frac{١}{|٣} \left(١ - \frac{١}{ن} \right) \left(١ - \frac{٢}{ن} \right) + \ldots.$$

∴ $\lim_{ن \to \infty} \left(١ + \frac{١}{ن} \right)^{ن} = ١ + ١ + \frac{١}{|٢} + \frac{١}{|٣} + \ldots.$ «متسلسلة تايلور»

∴ $\lim_{ن \to \infty} \left(١ + \frac{١}{ن} \right)^{ن} = هـ$

② ∵ $\lim_{ن \to \infty} \left(١ + \frac{س}{ن} \right)^{ن} = هـ^{س}$ ، وبفك الطرف الأيمن بنظرية ذات الحدين

وإيجاد النهاية نجد أن : $هـ^{س} = ١ + \frac{س}{|١} + \frac{س^{٢}}{|٢} + \frac{س^{٣}}{|٣} + \ldots.$

اختبار تفاعلى

فهم • تطبيق • مستويات عليا | من أسئلة الكتاب المدرسى

١ أوجد كلًا من النهايات الآتية :

① $\lim_{س \to \infty} \left(١ + \frac{١}{س} \right)^{٣ س}$

② $\lim_{س \to \infty} \left(١ + \frac{١}{س} \right)^{\frac{١}{٥} س}$

③ $\lim_{س \to \infty} \left(١ + \frac{١}{س} \right)^{٤ س}$

④ $\lim_{س \to \infty} \left(١ + \frac{٥}{س} \right)^{س}$

⑤ $\lim_{ن \to \infty} \left(١ + \frac{٢}{ن} \right)^{٣ ن}$

⑥ $\lim_{س \to \infty} \left(١ + \frac{١}{س} \right)^{س + ١}$

⑦ $\lim_{س \to \infty} \left(١ + \frac{١}{س} \right)^{٢ س + ٥}$

⑧ $\lim_{س \to \infty} \left(١ + \frac{١}{س + ١} \right)^{٢ س}$

⑨ $\lim_{س \to \infty} \left(١ + \frac{٤}{س} \right)^{س + ٣}$

⑩ $\lim_{س \to \infty} \left(١ - \frac{١}{س} \right)^{٢ س}$

⑪ $\lim_{ن \to \infty} \left(\frac{ن}{ن + ١} \right)^{ن}$

⑫ $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س + ٧}{س + ٣} \right)^{س + ٤}$

⑬ $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{٢ س - ١}{٢ س + ١} \right)^{٢ س}$

⑭ $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{٢ س + ٥}{٢ س + ١} \right)^{س + ٢}$

٢ أوجد كلًا من النهايات الآتية :

① $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{٣ س} - ١}{س}$

② $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{٤ س} - ١}{٥ س}$

③ $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{س} + س - ١}{س}$

④ $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{س} - جا س - ١}{س}$

⑤ $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{جا س} - ١}{جا س}$

⑥ $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{ظا س} - ١}{ظا س}$

⑦ $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{-س} - ١}{س}$

⑧ $\lim_{س \to ٠} \frac{جا ٢ س}{هـ^{س} - ١}$

⑨ $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{ظا س} - ١}{س}$

⑩ $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{٣ س} - ١}{س}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(١١) $\lim_{س \to 1} \frac{س^{٥} - ١}{س^{٣} - ١}$

(١٢) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا } ٥س}{س^{٥} - ١}$

(١٣) $\lim_{س \to 0} \frac{٢^{\text{جا}س} - ١}{\text{جا}س}$

(١٤) $\lim_{س \to 0} \frac{٣^{س} - ١}{ب^{س} - ١}$

(١٥) $\lim_{س \to 0} \frac{٣^{\text{جا}س} - ١}{ب^{\text{جا}س} - ١}$

(١٦) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{لو}_{هـ}(١ + ٢س)}{س}$

(١٧) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{لو}_{هـ}(١ + س^{٢})}{س^{٢}}$

(١٨) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{لو}_{هـ}(١ + ٣س^{٢})}{٢س^{٢}}$

(١٩) $\lim_{س \to 0} \frac{٣^{٢س} - ١}{س}$

(٢٠) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{لو}(١ + ٢س)}{٥^{س} - ١}$

(٢١) $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{٢+س} - هـ^{٢}}{س}$

(٢٢) $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{٤س} - هـ^{٣س}}{س}$

(٢٣) $\lim_{س \to 0} \frac{٣^{س} - ب^{س}}{س}$

(٢٤) $\lim_{س \to 0} \frac{٣^{س} - ب^{س}}{\text{جا}س}$

(٢٥) $\lim_{س \to 0} \frac{(١٠)^{\text{جا}س} - ١}{ط س}$

(٢٦) $\lim_{س \to 0} \frac{٣^{س} - ٣^{-س}}{س}$

(٢٧) $\lim_{س \to 0} \frac{٣^{٢+س} - ٩}{س}$

(٢٨) $\lim_{س \to 0} \frac{٢^{٢س} - ٢^{٣س}}{س}$

(٢٩) $\lim_{س \to 0} \frac{٢^{س} - ١}{\sqrt{١ + س} - ١}$

(٣٠) $\lim_{س \to 0} \frac{٣^{س} + ب^{س} + حـ^{س} - ٣}{س}$

٣ أثبت أن : $\lim_{س \to 0} (١ + \frac{س}{٣})^{\frac{٣}{س}} = هـ$

٤ أثبت أن : $\lim_{ن \to \infty} ن [\text{لو}_{هـ}(ن + ١) - \text{لو}_{هـ} ن] = ١$

٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $\lim_{س \to \infty} (١ + \frac{١}{س})^{٢س}$ يساوى

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) هـ (د) $هـ^{٢}$

(٢) $\lim_{س \to 0} (١ + س)^{\frac{١}{٢س}}$ يساوى

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $هـ^{٣}$ (جـ) $هـ^{\frac{١}{٣}}$ (د) $\frac{هـ}{٣}$

(٣) (دورتان ٢٠١٩) $\lim_{س \to 0} \frac{٢^{س} - ١}{٣س}$ يساوى

(أ) ٣ لو$_{هـ}$ ٢ (ب) $\frac{١}{٣}$ لو$_{هـ}$ ٢ (جـ) لو$_{هـ}$ $\frac{٢}{٣}$ (د) ٢ لو$_{هـ}$ ٣

(٤) $\lim_{س \to 0} (هـ^{س} - ٤)$ = ...

(أ) ٤- (ب) ٣- (جـ) هـ (د) $هـ^{٤}$

(٥) $\lim_{س \to ١} \frac{\text{لو}_{هـ} س}{س - ١}$ يساوى

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) هـ (د) $هـ^{-١}$

(٦) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{لو}_{هـ}(١ - س)}{س}$ = ...

(أ) هـ (ب) - هـ (جـ) ١- (د) ١

(٧) $\lim_{س \to ٣} \frac{\text{لو}_{هـ}(س - ٢)}{س - ٣}$ = ...

(أ) هـ (ب) ١ (جـ) $هـ^{٢}$ (د) ١-

(٨) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - هـ^{٢س}}{١ - هـ^{س}}$ = ...

(أ) ١ (ب) ١- (جـ) ٢ (د) ٢-

(٩) إذا كانت : $\lim_{س \to ا} (١ + \frac{١}{س})^{٢س} = هـ^{٢}$ فإن : ا = ...

(أ) صفر (ب) هـ (جـ) ١ (د) ∞

(١٠) $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{ط س} - ١}{ط ٢ س}$ = ...

(أ) هـ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

(١١) $\lim_{س \to 0} (١ + ٢س + س^{٢})^{\frac{١}{٢س}}$ = ...

(أ) $هـ^{٢}$ (ب) $هـ^{\frac{١}{٢}}$ (جـ) هـ (د) $هـ^{\frac{١}{٢}}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(١٢) إذا كان : $\lim_{س \to 0} (١ + ك س)^{\frac{١}{س}} = هـ^{-١٢}$ فإن : $ك =$

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) -٣ (جـ) -١٢ (د) -٤٨

(١٣) إذا كانت : $\lim_{س \to \infty} (١ + \frac{أ + ٢}{س})^{س} = هـ^{٤}$ فإن : $أ =$

(أ) -٢ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٤) $\lim_{س \to \infty} (\frac{س^{٢} - ٧ س + ١٢}{س^{٢} - ٨ س + ١٦})^{٢ س - ٤} =$

(أ) ١ (ب) هـ (جـ) هـ^{٢} (د) هـ^{٤}

(١٥) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} (١ + ظا س)^{\frac{ظا س}{٤}} =$

(أ) ٤ هـ (ب) هـ^{٤} (جـ) $\frac{١}{٤}$ هـ (د) هـ$^{\frac{١}{٤}}$

(١٦) $\lim_{س \to 0} (٤ جا^{٣} س + ما \frac{\pi}{٢})$ ظا^{٣} س = ...

(أ) هـ$^{-٤}$ (ب) ٤ هـ (جـ) هـ^{٢} (د) هـ^{٤}

(١٧) إذا كانت : $\lim_{س \to 0} \frac{٢^{س} + ٣^{س} + ٤^{س} - ٣}{س} =$ لو$_{هـ}$ أ + لو$_{هـ}$ ب

فإن : أ ب = ...

(أ) ١٢ (ب) ١٦ (جـ) ٢٤ (د) ٤٤

(١٨) إذا كان : $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{أ^{٢} س} - هـ^{٥ أ س}}{٣ س} = ٢$ فإن : أ = ... حيث أ $\in ح^{+}$

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٦

(١٩) إذا كانت : $\lim_{س \to \infty} (\frac{س}{س + ك})^{س} =$ هـ فإن : $ك =$

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) -٢ (د) ٢

(٢٠) إذا كانت : $\lim_{س \to 0} \frac{لو_{هـ} (س + ١)^{\frac{١}{ك}}}{س} = ٤$ فإن : $ك =$

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

(٢١) (دور أول ٢٠٢١) إذا كان : $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{س + أ} - هـ^{أ}}{س} = \frac{١}{هـ}$ ، فإن قيمة أ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) هـ (د) -١

٦ أوجد كلًا من النهايات الآتية :

(١) $\lim_{س \to ١} \frac{لو س}{س - ١}$

(٢) $\lim_{س \to 0} \frac{(١ + ٣ ظا^{٢} س)^{ظا^{٢} س}}{}$

(٣) $\lim_{س \to ٢} \frac{هـ^{س^{٢}} - هـ^{٤}}{س - ٢}$

(٤) $\lim_{س \to 0} (١ + ٤ جا^{٢} س)^{ظا^{٢} س}$

(٥) $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{جا س} - ١}{جا س}$

(٦) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{هـ^{جا س} - ١}{(\frac{\pi}{٢} - س)}$

(٧) $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{س س} - هـ^{أ س}}{س}$

(٨) $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{س} - هـ^{جا س}}{س - جا س}$

مسائل تقيس مهارات التفكير

٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $\lim_{س \to 0} \frac{لو_{هـ} (س^{٢} + ٣ س + ١)}{س} =$

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢) $\lim_{س \to 0} \frac{لو_{هـ} (س^{٢} + ٣ س + ١)}{لو_{هـ} (س^{٢} + ٥ س + ١)} =$

(أ) ١ (ب) $\frac{٣}{٥}$ (جـ) $\frac{٥}{٣}$ (د) لو$_{هـ}$ $\frac{٢}{٥}$

(٣) إذا كان : $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{أ س} - ١}{لو_{هـ} (١ + ٣ س)} = ٢$ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٦

(٤) إذا كان : $\lim_{س \to ك} (٢ + س)^{\frac{١}{س + ١}} =$ هـ فإن : $ك =$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) -١ (د) هـ

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٨ أوجد كلًا من النهايات الآتية :

① $\lim_{س \to 0} \frac{س (هـ^{س} - ١)}{١ - جتا ٢ س}$

② $\lim_{س \to ٠} \frac{لو_{هـ} س - ١}{س - هـ}$

③ $\lim_{س \to ٠} \frac{س (هـ^{٠,٢ س} - هـ^{٢})}{١ - جتا س}$

④ $\lim_{س \to ٠} \frac{(أ ب)^{س} - أ^{س} - ب^{س} + ١}{س^{٢}}$

⑤ $\lim_{س \to ٠} \frac{(١٠)^{س} - ٢^{س} - ٥^{س} + ١}{س جتا س}$

⑥ $\lim_{س \to ٠} \frac{لو_{هـ} (٣ + س) - لو_{هـ} (٣ - س)}{س}$

⑦ $\lim_{س \to ٢} \frac{٣^{س} - ٩}{٢^{س} - ٤}$

⑧ $\lim_{س \to ٠^{+}} \frac{هـ^{س} - ١}{\sqrt{١ - جتا س}}$

⑨ $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{س} - ١ - س - \frac{س^{٢}}{٢}}{س^{٣}}$ علمًا بأن : $هـ^{س} = \sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{س^{ن}}{ن!}$

مشتقة الدالة الأسية

① إذا كانت : $د (س) = هـ^{س}$ فإن : $د' (س) = هـ^{س}$

② إذا كانت : $د (س) = أ^{س}$ فإن : $د' (س) = أ^{س} لو_{هـ} أ$

وبصفة عامة : إذا كانت ع دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س فإن :

* $\frac{ء (هـ^{ع})}{ء س} = هـ^{ع} \cdot \frac{ء ع}{ء س}$ * $\frac{ء (أ^{ع})}{ء س} = أ^{ع} لو_{هـ} أ \cdot \frac{ء ع}{ء س}$

الإثبات

① ∵ $د (س) = هـ^{س}$

، $د' (س) = \lim_{و \to ٠} \frac{د (س + و) - د (س)}{و} = \lim_{و \to ٠} \frac{هـ^{س + و} - هـ^{س}}{و}$

$= \lim_{و \to ٠} \frac{هـ^{س} (هـ^{و} - ١)}{و} = هـ^{س} \times \lim_{و \to ٠} \frac{هـ^{و} - ١}{و} = هـ^{س} \times ١ = هـ^{س}$

أى أن : $\frac{ء}{ء س} (هـ^{س}) = هـ^{س}$

وبصفة عامة إذا كانت ع دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

فإن : $\frac{ء (هـ^{ع})}{ء س} = \frac{ء (هـ^{ع})}{ء ع} \times \frac{ء ع}{ء س}$ «قاعدة السلسلة» ∴ $\frac{ء (هـ^{ع})}{ء س} = هـ^{ع} \cdot \frac{ء ع}{ء س}$

② من خواص اللوغاريتمات نجد أن : $أ = هـ^{لو_{هـ} أ}$

∴ $أ^{س} = [هـ^{لو_{هـ} أ}]^{س} = هـ^{س لو_{هـ} أ}$

∴ $\frac{ء}{ء س} (أ^{س}) = \frac{ء}{ء س} (هـ^{س لو_{هـ} أ}) = هـ^{س لو_{هـ} أ} \times لو_{هـ} أ = أ^{س} \times لو_{هـ} أ$

وبصفة عامة إذا كانت ع دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

فإن : $\frac{ء (أ^{ع})}{ء س} = \frac{ء (أ^{ع})}{ء ع} \times \frac{ء ع}{ء س}$ «قاعدة السلسلة» ∴ $\frac{ء (أ^{ع})}{ء س} = أ^{ع} لو_{هـ} أ \cdot \frac{ء ع}{ء س}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ١

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

١) $ص = س^{٣} + ٥\,هـ^{س}$

٢) $ص = س^{\frac{٢}{٣}} + هـ^{٩ - ٢س^{٣}}$

٣) $ص = ٤^{س} + س^{٤}$

٤) $ص = طا س + س^{٣}\,هـ^{س}$

٥) $ص = ٢^{٢س^{٣} + ٥س + ١}$

٦) $ص = (٣س - ١)\,هـ^{طا س}$

٧) $ص = \frac{هـ^{س}}{س^{٢} + ٢}$

٨) $ص = (هـ^{٤س} - هـ^{-٤س})^{٧}$

٩) $ص = هـ^{٣} + (\pi)^{قا س}$

١٠) $ص = هـ^{متا س} \times ٣^{-٢س}$

الحل

١) $\because ص = س^{٣} + ٥\,هـ^{س}$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = ٣س^{٢} + ٥\,هـ^{س}$

٢) $\because ص = س^{\frac{٢}{٣}} + هـ^{٩ - ٢س^{٣}}$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = \frac{٢}{٣} س^{-\frac{١}{٣}} + هـ^{٩ - ٢س^{٣}} \times (-٦س^{٢})$

٣) $\because ص = ٤^{س} + س^{٤}$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = ٤^{س} لو_{هـ} ٤ + ٤س^{٣}$

٤) $\because ص = طا س + س^{٣}\,هـ^{س}$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = ق ا^{٢} س + س^{٣}\,هـ^{س} + ٣س^{٢}\,هـ^{س}$

٥) $\because ص = ٢^{٢س^{٣} + ٥س + ١}$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = ٢^{٢س^{٣} + ٥س + ١} \times (٦س^{٢} + ٥) لو_{هـ} ٢$

٦) $\because ص = (٣س - ١)\,هـ^{طا س}$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = (٣س - ١) \times هـ^{طا س} \times ق ا^{٢} س + ٣\,هـ^{طا س}$

$= هـ^{طا س}\,[(٣س - ١)\,ق ا^{٢} س + ٣]$

٧) $\because ص = \frac{هـ^{س}}{س^{٢} + ٢}$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = \frac{(س^{٢} + ٢) \times هـ^{س} - هـ^{س}\,(٢س)}{(س^{٢} + ٢)^{٢}} = \frac{هـ^{س}\,(س^{٢} - ٢س + ٢)}{(س^{٢} + ٢)^{٢}}$

٨) $\because ص = (هـ^{٤س} - هـ^{-٤س})^{٧}$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = ٧\,(هـ^{٤س} - هـ^{-٤س})^{٦} \times [٤\,هـ^{٤س} + ٤\,هـ^{-٤س}]$

$= ٢٨\,(هـ^{٤س} + هـ^{-٤س})\,(هـ^{٤س} - هـ^{-٤س})^{٦}$

٩) $\because ص = هـ^{٣} + (\pi)^{قا س}$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = صفر + (\pi)^{قا س} \times لو_{هـ} (\pi) \times ق ا س\,طا س$

$= \pi^{قا س} \times ق ا س\,طا س\,لو_{هـ} (\pi)$

لاحظ أن

$\because هـ^{٣}$ = مقدار ثابت

$\therefore$ اشتقاقه = صفر

١٠) $\because ص = هـ^{متا س} \times ٣^{-٢س}$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = هـ^{متا س} \times ٣^{-٢س} لو_{هـ} ٣ \times (-٢) + ٣^{-٢س}\,هـ^{متا س} \times - طا س$

$= هـ^{متا س} \times ٣^{-٢س}\,[-٢ لو_{هـ} ٣ - طا س]$

مشتقة الدالة اللوغاريتمية

١) إذا كانت : $د(س) = لو_{هـ} س$ فإن : $د'(س) = \frac{١}{س}$

٢) إذا كانت : $د(س) = لو_{أ} س$ فإن: $د'(س) = \frac{١}{س لو_{هـ} أ} = \frac{١}{س} لو_{أ} هـ$

وبصفة عامة : إذا كانت ع دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س فإن :

* $\frac{ء (لو_{هـ} ع)}{ء س} = \frac{١}{ع} \cdot \frac{ء ع}{ء س}$

* $\frac{ء (لو_{أ} ع)}{ء س} = \frac{١}{ع لو_{هـ} أ} \cdot \frac{ء ع}{ء س} = \frac{١}{ع} لو_{أ} هـ \cdot \frac{ء ع}{ء س}$

الإثبات

١) $\because ص = لو_{هـ} س$

$\therefore س = هـ^{ص}$ (بتفاضل الطرفين بالنسبة إلى س)

$\therefore ١ = هـ^{ص} \frac{ء ص}{ء س}$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = \frac{١}{هـ^{ص}} = \frac{١}{س}$

أي أن : $\frac{ء}{ء س} (لو_{هـ} س) = \frac{١}{س}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

وبصفة عامة إذا كانت ع دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

فإن : $\frac{د (لو_م ع)}{د س} = \frac{د (لو_م ع)}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$ «قاعدة السلسلة»

$\therefore \frac{د (لو_م ع)}{د س} = \frac{١}{ع} \cdot \frac{د ع}{د س}$

② $\frac{د}{د س} (لو_م س) = \frac{د}{د س} \left(\frac{لو_{هـ} س}{لو_{هـ} م} \right) = \frac{١}{لو_{هـ} م} \frac{د}{د س} (لو_{هـ} س) = \frac{١}{س} \cdot \frac{١}{لو_{هـ} م}$

، $\because \frac{١}{لو_{هـ} م} = لو_م هـ$ $\quad \therefore \frac{د}{د س} (لو_م س) = \frac{١}{س} لو_م هـ$

وبصفة عامة إذا كانت ع دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

فإن : $\frac{د (لو_م ع)}{د س} = \frac{د (لو_م ع)}{د ع} \cdot \frac{د ع}{د س} = \frac{١}{ع لو_{هـ} م} \cdot \frac{د ع}{د س}$

مثال ٢

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

① ص = ٤ س + ٩ لو_هـ س

② ص = لو_٤ س

③ ص = لو_هـ (٣ س^٤ + ٨)

④ ص = لو (٤ س^٢ − ١)^٣

⑤ ص = س^٤ لو_هـ س^٣

⑥ ص = ٢ س + هـ^س لو_هـ س

⑦ ص = لو_هـ $\frac{س^٣}{س + ٤}$

⑧ ص = $\frac{١ + لو_{هـ} س}{١ - لو_{هـ} س}$

الحل

① ∵ ص = ٤ س + ٩ لو_هـ س $\quad \therefore \frac{د ص}{د س} = ٤ + ٩ \times \frac{١}{س} = ٤ + \frac{٩}{س}$

② ∵ ص = لو_٤ س $\quad \therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{١}{س لو_{هـ} ٤} = \frac{١}{س} لو_٤ هـ$

③ ∵ ص = لو_هـ (٣ س^٤ + ٨) $\quad \therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{١}{(٣ س^٤ + ٨)} \times (١٢ س^٣) = \frac{١٢ س^٣}{٣ س^٤ + ٨}$

④ ∵ ص = لو (٤ س^٢ − ١)^٣ = ٣ لو (٤ س^٢ − ١)

$\therefore \frac{د ص}{د س} = ٣ \times \frac{٨ س}{(٤ س^٢ - ١) لو_{هـ} ١٠} = \frac{٢٤ س}{(٤ س^٢ - ١) لو_{هـ} ١٠}$

⑤ ∵ ص = س^٤ لو_هـ س^٣

$\therefore \frac{د ص}{د س} = س^٤ \times \frac{١}{س^٣} \times ٣ س^٢ + (لو_{هـ} س^٣) \times ٤ س^٣$

$= ٣ س^٣ + ٤ س^٣ لو_{هـ} س^٣$

$= س^٣ (٣ + ٤ لو_{هـ} س^٣)$

⑥ ∵ ص = ٢ س + هـ^س لو_هـ س

$\therefore \frac{د ص}{د س} = ٢ + هـ^س \times \frac{١}{س} + (لو_{هـ} س) \times هـ^س$

$= ٢ + هـ^س \left(\frac{١}{س} + لو_{هـ} س \right)$

⑦ ∵ ص = لو_هـ $\frac{س^٣}{س + ٤}$

$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{١}{\left(\frac{س^٣}{س + ٤} \right)} \times \frac{(س + ٤) \times ٣ س^٢ - س^٣ (١)}{(س + ٤)^٢} = \frac{٣ س^٣ + ١٢ س^٢ - س^٣}{س^٣ (س + ٤)}$

$= \frac{٢ س^٣ + ١٢ س^٢}{س^٣ (س + ٤)} = \frac{٢ س^٣ (س + ٦)}{س^٣ (س + ٤)} = \frac{٢ (س + ٦)}{س (س + ٤)}$

حل آخر :

∵ ص = لو_هـ $\frac{س^٣}{س + ٤}$

∴ ص = لو_هـ س^٣ − لو_هـ (س + ٤) (باستخدام قوانين اللوغاريتمات)

∴ ص = ٣ لو_هـ س − لو_هـ (س + ٤)

$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{٣}{س} - \frac{١}{س + ٤} = \frac{٣ س + ١٢ - س}{س (س + ٤)} = \frac{٢ س + ١٢}{س (س + ٤)} = \frac{٢ (س + ٦)}{س (س + ٤)}$

⑧ ∵ ص = $\frac{١ + لو_{هـ} س}{١ - لو_{هـ} س}$

$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{(١ - لو_{هـ} س) \times \frac{١}{س} - (١ + لو_{هـ} س) \times \frac{-١}{س}}{(١ - لو_{هـ} س)^٢} = \frac{٢}{س (١ - لو_{هـ} س)^٢}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ملاحظات

(١) ميل المماس للمنحنى ص = $\text{لو}_{\text{و}}$ س عند أى نقطة عليه هو نفسه قيمة الإحداثى السادى لهذه النقطة.

(٢) ميل المماس للمنحنى ص = $\text{لو}_{\text{و}}$ س عند أى نقطة عليه هو مقلوب قيمة الإحداثى السينى لهذه النقطة.

(٣) ∵ $\text{لو}_{\text{و}}|\text{س}| = \begin{cases} \text{لو}_{\text{و}}\ \text{س} & ، \text{س} > ٠ \\ \text{لو}_{\text{و}}(-\text{س}) & ، \text{س} < ٠ \end{cases}$

- عندما س > ٠ فإن: $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}[\text{لو}_{\text{و}}\ \text{س}] = \frac{١}{\text{س}}$
- عندما س < ٠ فإن: $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}[\text{لو}_{\text{و}}(-\text{س})] = \frac{١}{-\text{س}} \times -١ = \frac{١}{\text{س}}$

أى أن: $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}[\text{لو}_{\text{و}}|\text{س}|] = \frac{١}{\text{س}}$ لكل س ≠ ٠

وبصفة عامة إذا كانت ع دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}[\text{لو}_{\text{و}}|\text{ع}|] = \frac{\text{ء}}{\text{ء ع}}[\text{لو}_{\text{و}}|\text{ع}|] \times \frac{\text{ء ع}}{\text{ء س}}$ «قاعدة السلسلة»

$= \frac{١}{\text{ع}} \times \text{ع}' = \frac{\text{ع}'}{\text{ع}}$

مثال ٣

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى:

(١) ص = $\text{لو}_{\text{و}}|\text{س}^{٢} - ١|$

(٢) ص = لو | جا س |

الحل

(١) ∵ ص = $\text{لو}_{\text{و}}|\text{س}^{٢} - ١|$

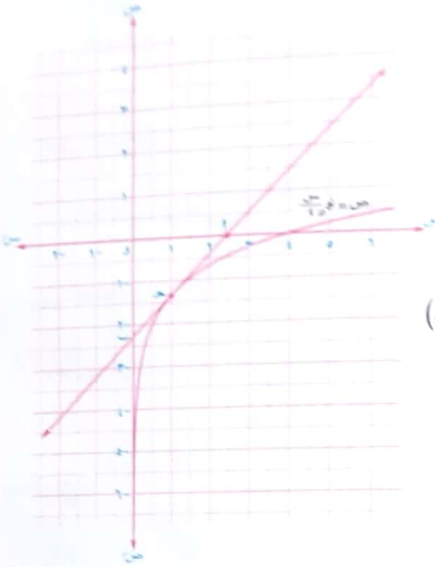
∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{١}{\text{س}^{٢} - ١} \times ٢\text{س} = \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} - ١}$

(٢) ∵ ص = لو | جا س |

∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{١}{(\text{جا س}) \times \text{لو}_{\text{و}}\ ١٠} \times \text{جتا س} = \frac{\text{جتا س}}{\text{لو}_{\text{و}}\ ١٠} = \text{طتا س} \times \text{لو}_{\text{و}}$

مثال ٤

إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماسًا للمنحنى ص = $\text{لو}_{\text{و}}\ \frac{\text{س}}{٤}$ فى النقطة (١ ، ص) ويقطع محور السينات فى النقطة أ ، ومحور الصادات فى النقطة ب أوجد طول: $\overline{\text{أ ب}}$



الحل

∵ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{٤}{\text{س}} \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{\text{س}}$

∴ ميل المماس عند النقطة حـ (١ ، ص)

$= \left(\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right)_{\text{س}=١} = ١$

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يمس المنحنى فى النقطة حـ (١ ، ص)

∴ ص = $\text{لو}_{\text{و}}\ \frac{١}{٤} = -\text{لو}_{\text{و}}\ ٤$

∴ حـ = (١ ، − $\text{لو}_{\text{و}}\ ٤$)

∴ معادلة المماس $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ هى: $\frac{\text{ص} + \text{لو}_{\text{و}}\ ٤}{\text{س} - ١} = ١$

أى: ص + $\text{لو}_{\text{و}}\ ٤$ = س − ١

لإيجاد نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مع محور السينات نضع ص = ٠

∴ س = ١ + $\text{لو}_{\text{و}}\ ٤$ ∴ أ = (١ + $\text{لو}_{\text{و}}\ ٤$ ، ٠)

∴ لإيجاد نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مع محور الصادات نضع س = ٠

∴ ص = −١ − $\text{لو}_{\text{و}}\ ٤$ ∴ ب = (٠ ، −١ − $\text{لو}_{\text{و}}\ ٤$)

∴ $\text{أ ب} = \sqrt{(١ + \text{لو}_{\text{و}}\ ٤)^{٢} + (١ + \text{لو}_{\text{و}}\ ٤)^{٢}} = \sqrt{٢}(١ + \text{لو}_{\text{و}}\ ٤)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٥

أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى : ص = $هـ^{٢س}$ جتا س عند س = ٠

الحل

عند س = ٠

∴ النقطة (٠ ، ١) ، ∵ $\frac{ء ص}{ء س}$ = $هـ^{٢س}$ × – جا س + جتا س × $هـ^{٢س}$ × ٢

∴ $\left(\frac{ء ص}{ء س}\right)_{س = ٠}$ = ١ × صفر + ١ × ١ × ٢ = ٢

∴ ميل المماس = ٢

∴ معادلة المماس هى : $\frac{ص - ١}{س - ٠}$ = ٢ ∴ ص – ٢ س = ١

، ميل العمودى = $\frac{-١}{٢}$

∴ معادلة العمودى هى : $\frac{ص - ١}{س - ٠}$ = $\frac{-١}{٢}$ ∴ ٢ ص + س = ٢

مثال ٦

إذا كانت : ص = $هـ^{س}$ جا س أثبت أن : $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$ – ٢ $\frac{ء ص}{ء س}$ + ٢ ص = ٠

الحل

∵ ص = $هـ^{س}$ جا س

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = $هـ^{س}$ جتا س + جا س × $هـ^{س}$ = $هـ^{س}$ (جا س + جتا س)

، $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$ = $هـ^{س}$ (جتا س – جا س) + (جا س + جتا س) × $هـ^{س}$ = $هـ^{س}$ (٢ جتا س)

∴ $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$ – ٢ $\frac{ء ص}{ء س}$ + ٢ ص

= $هـ^{س}$ × ٢ جتا س – ٢ × $هـ^{س}$ (جا س + جتا س) + ٢ × $هـ^{س}$ جا س

= ٢ جتا س × $هـ^{س}$ – ٢ جا س × $هـ^{س}$ – ٢ جتا س × $هـ^{س}$ + ٢ جا س × $هـ^{س}$ = صفر

مثال ٧

إذا كانت : س = لو$_{هـ}$ ن ، ص = جا ن أوجد : $\frac{ء ص}{ء س}$ ، $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$

الحل

∵ س = لو$_{هـ}$ ن ∴ $\frac{ء س}{ء ن}$ = $\frac{١}{ن}$

، ص = جا ن ∴ $\frac{ء ص}{ء ن}$ = جتا ن

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{\frac{ء ص}{ء ن}}{\frac{ء س}{ء ن}}$ = $\frac{\text{جتا ن}}{\frac{١}{ن}}$ = ن جتا ن

، $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$ = $\frac{ء}{ء س}$ $\left(\frac{ء ص}{ء س}\right)$ = $\frac{ء}{ء ن}$ [ن جتا ن] × $\frac{ء ن}{ء س}$

= (– ن جا ن + جتا ن) × ن

= – ن^٢ جا ن + ن جتا ن

الاشتقاق اللوغاريتمى

يمكن التعبير عن العلاقة بين المتغيرات (فى حالة وجود دالة أس دالة) بصورة لوغاريتمية بأخذ اللوغاريتم الطبيعى لطرفيها واستخدام خواص اللوغاريتمات فى تبسيط العلاقة قبل إجراء عملية الاشتقاق.

مثال ٨

أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ فى كل مما يأتى :

(١) ص = س^{س} (٢) ص = (جا س)^{س}

(٣) ص = س جا س (٤) س^{ص} = $هـ^{ص - س}$

الحل

(١) ∵ ص = س^{س} بأخذ اللوغاريتم الطبيعى للطرفين

∴ لو$_{هـ}$ ص = لو$_{هـ}$ س^{س}

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

∴ لو$_{هـ}$ ص = س لو$_{هـ}$ س باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

∴ $\frac{1}{ص} \times \frac{ء ص}{ء س} = س \times \frac{1}{س} +$ لو$_{هـ}$ س

∴ $\frac{1}{ص} \times \frac{ء ص}{ء س} = 1 +$ لو$_{هـ}$ س بالضرب × (ص = س^{س})

∴ $\frac{ء ص}{ء س} = ص (1 +$ لو$_{هـ}$ س) = س^{س} (1 + لو$_{هـ}$ س)

(٢) ∵ ص = (فا س)^{س} بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين

∴ لو$_{هـ}$ ص = س لو$_{هـ}$ (فا س)

∴ لو$_{هـ}$ ص = س لو$_{هـ}$ (فا س) باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

∴ $\frac{1}{ص} \times \frac{ء ص}{ء س} = س \times \frac{1}{فا س}$ × فا س طا س + لو$_{هـ}$ (فا س)

∴ $\frac{1}{ص} \times \frac{ء ص}{ء س} =$ س طا س + لو$_{هـ}$ (فا س) بالضرب × (ص = (فا س)^{س})

∴ $\frac{ء ص}{ء س} = ص$ [س طا س + لو$_{هـ}$ (فا س)] = (فا س)^{س} [س طا س + لو$_{هـ}$ (فا س)]

(٣) ∵ ص = س$^{جا س}$ بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين

∴ لو$_{هـ}$ ص = لو$_{هـ}$ س$^{جا س}$

∴ لو$_{هـ}$ ص = جا س لو$_{هـ}$ س باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

∴ $\frac{1}{ص} \times \frac{ء ص}{ء س} =$ جا س $\times \frac{1}{س} +$ لو$_{هـ}$ س × جتا س بالضرب × (ص = س$^{جا س}$)

∴ $\frac{ء ص}{ء س} = ص$ [$\frac{جا س}{س}$ + جتا س لو$_{هـ}$ س]

= س$^{جا س}$ [$\frac{جا س}{س}$ + جتا س لو$_{هـ}$ س]

(١) ∵ ص = هـ^{س} بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين

∴ لو$_{هـ}$ ص = س لو$_{هـ}$ هـ

∴ لو$_{هـ}$ ص = (ص − س) لو$_{هـ}$ هـ ∴ ص لو$_{هـ}$ س = ص − س

∴ ص = ص − ص لو$_{هـ}$ س ∴ س = ص (١ − لو$_{هـ}$ س)

∴ ص = $\frac{س}{١ - لو_{هـ} س}$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{(١ - لو_{هـ} س) \times ١ - س (-\frac{١}{س})}{(١ - لو_{هـ} س)^{٢}} = \frac{١ - لو_{هـ} س + ١}{(١ - لو_{هـ} س)^{٢}} = \frac{٢ - لو_{هـ} س}{(١ - لو_{هـ} س)^{٢}}$

مثال ٩

إذا كانت : ص = هـ^{س} $\times \sqrt{\frac{١ - س}{١ + س}}$ حيث −١ < س < ١

أثبت أن : (١ − س^{٢}) صَ + س^{٢} ص = ٠

الحل

∴ ص = هـ^{س} $\sqrt{\frac{١ - س}{١ + س}}$ بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين

∴ لو$_{هـ}$ ص = لو$_{هـ}$ [هـ^{س} $\sqrt{\frac{١ - س}{١ + س}}$]

∴ لو$_{هـ}$ ص = لو$_{هـ}$ هـ^{س} + لو$_{هـ}$ $(\frac{١ - س}{١ + س})^{\frac{١}{٢}}$

∴ لو$_{هـ}$ ص = س + $\frac{١}{٢}$ لو$_{هـ}$ $(\frac{١ - س}{١ + س})$

∴ لو$_{هـ}$ ص = س + $\frac{١}{٢}$ [لو$_{هـ}$ (١ − س) − لو$_{هـ}$ (١ + س)] (باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س)

∴ $\frac{١}{ص} \times$ صَ = ١ + $\frac{١}{٢}$ [$\frac{-١}{١ - س} - \frac{١}{١ + س}$]

تذكر أن :

* لو$_{هـ}$ (أ × ب) = لو$_{هـ}$ أ + لو$_{هـ}$ ب
* لو$_{هـ}$ هـ = ١

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$\therefore \frac{ص'}{ص} = \frac{1}{2} \left[\frac{-1 - س + 1 + س}{(1 - س)(1 + س)} \right] + 1$

$\therefore \frac{ص'}{ص} = \frac{1}{1 - س^2} - 1$

$\therefore \frac{ص'}{ص} = \frac{-س^2}{1 - س^2}$

$\therefore (1 - س^2)\, ص' + س^2 ص = 0$

حل آخر:

$\therefore ص = هـ^{س} \sqrt{\frac{1 - س}{1 + س}}$ (باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س)

$\therefore ص' = هـ^{س} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1 - س}{1 + س}}} \times \frac{(1 + س) \times (-1) - (1 - س) \times (1)}{(1 + س)^2} + \sqrt{\frac{1 - س}{1 + س}} \times هـ^{س}$

$= هـ^{س} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1 - س}{1 + س}}} \times \frac{-1 - س - 1 + س}{(1 + س)^2} + \sqrt{\frac{1 - س}{1 + س}} \times هـ^{س}$

$= هـ^{س} \times \frac{-1}{(1 + س)^2 \sqrt{\frac{1 - س}{1 + س}}} + \sqrt{\frac{1 - س}{1 + س}} \times هـ^{س}$

$= هـ^{س} \sqrt{\frac{1 - س}{1 + س}} \left[\frac{-1}{(1 + س)(1 - س)} + 1 \right]$

$= هـ^{س} \sqrt{\frac{1 - س}{1 + س}} \times \left[\frac{-1}{1 - س^2} + 1 \right]$

$\therefore ص' = ص \times \left[\frac{-س^2 + س^2 - 1}{1 - س^2} \right]$ $\therefore ص' = \frac{-ص}{1 - س^2}$

$\therefore (1 - س^2)\, ص' + س^2 ص = 0$

على مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية

اختبار تفاعلي

فهم • تطبيق • مستويات عليا | من أسئلة الكتاب المدرسي

١ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

(١) $ص = هـ^{3س}$

(٢) $ص = 7 هـ^{س + 4}$

(٣) $ص = هـ^{2س + 3}$

(٤) $ص = \frac{1}{2} هـ^{3 - 6س - س^2}$

(٥) $ص = هـ^{3س^5}$

(٦) $ص = هـ^{س^2 - س}$

(٧) $ص = \frac{1}{3} هـ^{س} - 5 هـ$

(٨) $ص = هـ^{(س + 1)^2}$

(٩) $ص = س^2 هـ^{-3}$

(١٠) $ص = س^2 + 3 هـ^{س}$

(١١) $ص = 2 هـ^{س} + جتا 2س$

(١٢) $ص = 2س + هـ^{6س}$

(١٣) $ص = س^3 + ظا س + هـ^{5س + 1}$

(١٤) $ص = هـ^{5} + هـ^{5س} + هـ^{5} س^2$

٢ أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ لكل مما يأتي :

(١) $ص = 3^{س}$

(٢) $ص = \left(\frac{1}{2}\right)^{س}$

(٣) $ص = 5 \times 6^{س}$

(٤) $ص = 5 س^3 + 2^{س}$

(٥) $ص = 7^{س} + س^7$

(٦) $ص = 3(3س^2 - 5س + 2)$

(٧) $ص = 3 هـ^{ظا س}$

(٨) $ص = هـ^{جتا س}$

(٩) $ص = هـ^{\sqrt{س}}$

(١٠) $ص = (3س - 1)^{-2}$

(١١) $ص = هـ^{ظا 2س}$

(١٢) $ص = هـ^{\sqrt{ظا س}}$

٣ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

(١) $ص = س هـ^{2س}$

(٢) $ص = س^2 هـ^{س}$

(٣) $ص = (س^2 + 3) هـ^{-3س}$

(٤) $ص = 2 س^4 هـ^{1 + س}$

(٥) $ص = (3 س - 5) هـ^{س^2}$

(٦) $ص = هـ^{س} جا س$

(٧) $ص = هـ^{2س} جا 3 س$

(٨) $ص = س \times 5^{س}$

٤ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

(١) $ص = \frac{هـ^{س^٢}}{س}$

(٢) $ص = \frac{هـ^{س}}{س^٢}$

(٣) $ص = \frac{٢}{س}$

(٤) $ص = \frac{س}{هـ^{س}}$

(٥) $ص = \frac{٣ + س^٢}{هـ^{س^٢ + ٢س}}$

(٦) $ص = \frac{لتا\ س}{هـ^{س}}$

(٧) $ص = \frac{هـ^{س}}{لتا\ س}$

(٨) $ص = \frac{هـ^{لتا\ س}}{س}$

(٩) $ص = \frac{\sqrt{١ + س}}{هـ^{س^٢}}$

(١٠) $ص = \frac{هـ^{س} + ١}{هـ^{س}}$

(١١) $ص = \frac{هـ^{س}}{١ + لتا\ س}$

(١٢) $ص = \frac{٣}{س^٢ + ١}$

(١٣) $ص = (هـ^{س^٢} + هـ^{-س^٢})^٢$

(١٤) $ص = (هـ^{س^٢} - هـ^{-س^٢})^٥$

٥ أوجد $\frac{د ص}{د س}$ لكل مما يأتي :

(١) $ص = ٥$ لتا $س$

(٢) $ص = ٧$ لتا $س$

(٣) $ص = ٣$ لتا $(س + ٤)$

(٤) $ص = (٧ - ٢س)$ لتا $س$

(٥) $ص = ٣س + ٥$ لتا $س$

(٦) $ص = ٥ - ٣$ لتا $س$

(٧) $ص = ٥$ لتا $\left(\frac{١}{٢}س^٢ + س\right)$

(٨) $ص = ٩$ لتا $(٢ + س^٢)$

(٩) $ص = \frac{١}{٩ + س^٢}$ لتا $س$

(١٠) $ص = ٢$ لتا $س$

(١١) $ص = ٥$ لتا $(٢ - س^٢)$

(١٢) $ص = ٥ - ٢$ لتا $٥س^٢$

(١٣) $ص = \frac{٢}{٥}$ لتا $٥س^٢$

٦ أوجد $\frac{د ص}{د س}$ لكل مما يأتي :

(١) $ص = س$ لتا $س$

(٢) $ص = س^٢$ لتا $س$

(٣) $ص = س$ لتا $(٣ - ٥س^٢)$

(٤) $ص = (٣ + س)$ لتا $س$

(٥) $ص = ٢س + ٣$ لتا $س$

(٦) $ص = ٣س^٢$ لتا $٢س$

(٧) $ص = (٢ + س)$ لتا $(١ + س^٢)$

(٨) $ص = ٤$ لتا $(٥س)$ لتا $(١ + س^٢)$

(٩) $ص = ٤ + ٥$ لتا $س$ لتا $س$

(١٠) $ص = (٢ + س)^٣ \sqrt{س}$ لتا $س$

(١١) $ص = \frac{س}{٢ + س}$ لتا $س$

(١٢) $ص = \frac{٣}{٢ + س}$ لتا $س$

(١٣) $ص = \frac{٢}{٣ + س}$ لتا $س$

(١٤) $ص = \frac{٣}{٢ + س}$ لتا $س$

(١٥) $ص = \frac{٢}{٣ + س}$ لتا $س$

(١٦) $ص = \frac{٣}{٢ + س}$ لتا $س$

(١٧) $ص = \frac{٢}{٣ + س}$ لتا $س$

(١٨) $ص = \frac{٣}{٢ + س}$ لتا $س$

(١٩) $ص = \frac{٢}{٣ + س}$ لتا $س$

(٢٠) $ص = \frac{٣}{٢ + س}$ لتا $س$

٧ أوجد $\frac{د ص}{د س}$ لكل مما يأتي :

(١) $س = هـ^{٢ر}$ ، $ص = ٢ر$

(٢) $س = هـ^{٢ر}$ ، $ص = هـ^{٢ر}$

(٣) $س = ٦$ لتا $ر$ ، $ص = ٢ر$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٨ أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ لكل مما يأتى :

(١) ص = لو$_{هـ}$ س

(٢) ص = س^{٣} + هـ$^{٢ س}$

(٣) ص = س لو س

٩ أوجد ميل المماس لكل من المنحنيات الآتية عند النقط المعطاة :

(١) ص = $\sqrt{س}$ - ٢ هـ^{س} ، س = $\frac{١}{٤}$

(٢) ص = س^{٢} - ٣ لو$_{هـ}$ س ، س = ٢

(٣) ص = $\frac{١}{٤}$ هـ$^{٢ س}$ - ٢ لو$_{هـ}$ س ، س = $\frac{١}{٢}$

(٤) ص = س هـ$^{-س}$ ، $(١ ، \frac{١}{هـ})$

(٥) ص = (٢ س + ٣) هـ$^{٢ س}$ ، (٠ ، ٣)

(٦) ص = لو$_{٢}$ ٥ س ، س = ٢

(٧) ص = ٤ لو (٣ س + ١) ، س = ١

(٨) ص = لو$_{٢}$ (٢ س^{٢} - ٣)^{٤} ، س = ١

(٩) ص = ٣ (لو س)^{٢} ، س = ٣

١٠ أوجد قيم س التى يكون عندها مماس المنحنى يوازى محور السينات حيث س > ٠ :

(١) ص = س^{٣} لو$_{هـ}$ س

(٢) ص = $\frac{١}{س^{٢}}$ لو$_{هـ}$ س^{٢}

(٣) ص = س^{٣} - ٨١ لو$_{هـ}$ س

(٤) ص = $\frac{س^{٢}}{٤}$ - ٣ + لو$_{هـ}$ $\frac{س}{٢}$

١١ أوجد معادلة المماس للمنحنى : ص = س هـ$^{٢ س}$ عند النقطة $(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢} هـ)$

١٢ أوجد معادلة المماس للمنحنى : ص = هـ$^{٢ س}$ جتا س عند س = ٠

١٣ أوجد معادلة المماس للمنحنى : ص = ٢^{س} + ٢$^{-س}$ عند النقطة $(٢ ، ٤\frac{١}{٤})$

١٤ أوجد معادلة المماس للمنحنى : ص = $\frac{هـ^{٢ س}}{س}$ عند النقطة $(٣ ، \frac{١}{٣} هـ)$

١٥ (دور أول ٢٠١٧) أوجد معادلة العمودى للمنحنى : ص = ٣ هـ^{س} عند نقطة واقعة عليه وإحداثيها السينى يساوى -١

١٦ أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى :

ص = س^{٣} - ١٨ لو$_{هـ}$ س عند نقطة تقع عليه وإحداثيها السينى يساوى ٢

١٧ (دور ثان ٢٠١٩) أوجد معادلة المماس للمنحنى : ص = لو$_{هـ}$ $(٢ - \sqrt{٢}$ جتا س$)$ عند النقطة التى تقع عليه وإحداثيها السينى يساوى $\frac{\pi}{٤}$

١٧ أوجد معادلة العمودى للمنحنى : س = هـ^{ن} ، ص = هـ^{ن} + هـ$^{٢ ن}$ عند س = ١

١٨ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : د (س) = هـ$^{٣ س}$ فإن : د$'$ (س) تساوى

(أ) هـ$^{٢ س}$ (ب) ٣ هـ$^{٣ س}$ (جـ) ٩ هـ$^{٣ س}$ (د) ٣ هـ$^{٢ س}$

(٢) (دور أول ٢٠١٧) إذا كان : د (س) = ٢ هـ^{س} فإن : د$'$ (-٢) تساوى

(أ) - د (٢) (ب) - د$'$ (٢) (جـ) - د (-٢) (د) د (-٢)

(٣) إذا كانت : د (س) = س^{٢} - ٣ لو$_{هـ}$ ٥ س فإن : د$'$ (٢) تساوى

(أ) -١ (ب) ١ (جـ) $\frac{٥}{٢}$ (د) ٦

(٤) معادلة المماس لمنحنى الدالة د حيث د (س) = هـ$^{٢ س + ١}$ عند النقطة $(\frac{-١}{٢} ، ١)$ هى :

(أ) ٢ ص = س + ١ (ب) ص = ٢ س + ٢

(جـ) ص = ٢ س - ٣ (د) ٢ ص = ٣ س + ١

(٥) إذا كان : ص = $\frac{١}{س}$ لو$_{هـ}$ هـ^{س} فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ...

(أ) ١ (ب) هـ^{س} (جـ) صفر (د) لو$_{هـ}$ س

(١٣) إذا كان العمودى على المنحنى ص = س لو$_{هـ}$ س موازى للمستقيم
٢ س − ٢ ص + ٣ = ٠ فإن معادلة هذا العمودى هى

(أ) س − ص = ٣ هـ$^{-٢}$ (ب) س − ص = ٦ هـ$^{-٢}$

(جـ) س − ص = ٣ هـ^{٢} (د) س − ص = ٦ هـ^{٢}

(١٤) المماس للمنحنى س = هـ$^{\theta}$ جتا θ ، ص = هـ$^{\theta}$ جا θ عند النقطة التى عندها
θ = $\frac{\pi}{٤}$ يعمل مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها

(أ) صفر (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٣}$ (د) $\frac{\pi}{٢}$

(١٥) ميل المماس للمنحنى ص = لو$_{هـ}$ طا ن + لو$_{هـ}$ جتا ن ، س = لو$_{هـ}$ جا ن + لو$_{هـ}$ طتا ن
عند ن = $\frac{\pi}{٤}$ تساوى

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

(١٦) قياس الزاوية التى يصنعها المماس للمنحنى ص = هـ$^{\text{طا س}}$ جا س مع الاتجاه الموجب
لمحور السينات عند س = π تساوى

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) $\frac{\pi ٣}{٤}$

(١٧) إذا كان : د (س) = دَ (س) = هـ$^{ر (س)}$ فإن : ر (س) يمكن أن تكون

(أ) س + ٢ (ب) س^{٢} (جـ) لو$_{هـ}$ س (د) ٢ س

(١٨) إذا كانت : د (س) = لو$_{هـ}$ (س^{٢} + ١)^{٢} + هـ$^{\text{جا س}}$
فإن : د (٠) × دَ (٠) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ١ + هـ (د) هـ

(١٩) إذا كانت : ص × لو$_{س^{٢}}$ هـ = ١ حيث س > ١ فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ... عند س = ٢

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ لو$_{هـ}$ ٢ (د) لو$_{هـ}$ ٢

(٢٠) إذا كانت : ص = أ هـ$^{ب س}$ ، $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ = ص فإن : ب^{٢} = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ٢

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٢١) إذا كانت معادلة المماس للمنحنى ص = – لو$_{هـ}$ س عند نقطة واقعة عليه (أ ، ب) هي ص = م س فإن : أ = ...

(أ) هـ (ب) $\frac{١}{٢}$ هـ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ هـ (د) ٢ $\sqrt{هـ}$

(٢٢) إذا كانت : س = هـ$^{\text{ظا}\theta}$ ، $\frac{ء ص}{ء \theta}$ = ٢ لو$_{٢}$ ظاθ

فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ... عندما θ = صفر

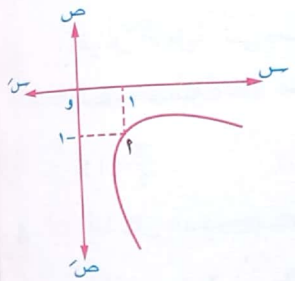
(أ) $\frac{٢}{هـ}$ (ب) ١ (جـ) هـ (د) $\frac{١}{هـ}$

(٢٣) إذا كان د (س) = لو$_{هـ}$ (س . ر (س)) وكان : ر (٤) = ر$'$ (٤) = ٤

فإن : د$'$ (٤) = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{٥}{٤}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ٢

(٢٤) الشكل المقابل يمثل المنحنى هـ^{س} + ص = ٣ س – ٢ فإذا كان المماس له عند النقطة أ (١ ، –١) يقطع محورى الإحداثيات $\overleftrightarrow{س س'}$ ، $\overleftrightarrow{ص ص'}$ عند النقطتين ب ، حـ على الترتيب فإن أ تقسم $\overline{ب حـ}$ بنسبة :



(أ) ١ : ٢ من الداخل (ب) ٢ : ١ من الداخل

(جـ) ١ : ٢ من الخارج (د) ٢ : ١ من الخارج

٢٠ إذا كانت : هـ$_{س}$ = $\sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{س^{ن}}{ن!}$ أثبت أن : $\frac{ء}{ء س}$ (هـ$_{س}$) = هـ$_{س}$

٢١ إذا كانت : ص = س^{٢} لو$_{هـ}$ $\frac{س}{أ}$ فأوجد : $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ عند س = ٤ «$\frac{١}{٢}$»

٢٢ إذا كانت : ص = لو$_{هـ}$ (١ + هـ$_{س}$) أوجد قيم س التى تجعل : هـ$_{ص}$ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٦ «لو$_{هـ}$ ٦»

١٦ إذا كانت : س = ص^{٢} هـ^{ص} أوجد : $\frac{ء س}{ء ص}$

١٤ إذا كانت : س = ص^{٢} لو$_{هـ}$ ص ، ص > ٠ أوجد : $\frac{ء ص}{ء س}$

١٥ إذا كان : ص = لو$_{هـ}$ (قتا س – ظتا س) أثبت أن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = قتا س

١٦ إذا كان : ص = لو$_{هـ}$ (ظا ($\frac{\pi}{٤}$ + $\frac{س}{٢}$)) أثبت أن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = قا س

١٧ إذا كان : ص = لو$_{هـ}$ (ظا س) أثبت أن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٢ قتا ٢ س

١٨ إذا كان : ص = لو$_{هـ}$ ($\sqrt{٢}$ قا س) أثبت أن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{١}{٢}$ ظا س

١٩ إذا كانت : ص = لو$_{هـ}$ (س + $\sqrt{س^{٢} + ٢٤}$) أثبت أن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{١}{\sqrt{س^{٢} + ٢٤}}$

٣٠ إذا كانت : ص = هـ$^{٢ س}$ جا ٢ س أثبت أن : $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ = ٨ ص ظتا ٢ س

٣١ إذا كانت : ص = هـ$^{٣ س}$ + س^{٢} أثبت أن : $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ – ٢ = ٩ (ص – س^{٢})

٣٢ إذا كانت : ص = أ هـ$^{س^{٢} + ١}$ أثبت أن : $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ = ٤ س ص (٣ + ٢ س^{٢})

٣٣ إذا كانت : ص = أ هـ$^{\frac{س}{ب}}$ أثبت أن : س ص ص$''$ + ٢ ص ص$'$ – س ص$'^{٢}$ = ٠

٣٤ إذا كانت : ص = $\sqrt{\frac{س^{٢} + ١}{س^{٢} - ١}}$ أثبت أن : (س^{٤} – ١) ص$'$ + ٢ س ص = ٠

٣٥ إذا كانت : ص = هـ$^{-س}$ $\sqrt{\frac{١ + س}{١ - س}}$

أثبت أن : (١ – س^{٢}) ص$'$ = س^{٢} ص

٣٦ أوجد معدل تغير لو$_{هـ}$ (٩ + س^{٣}) بالنسبة إلى س^{٢} + ٣ عند س = ١ «$\frac{٣}{٢}$»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٣٧ إذا كانت : ص = $هـ^{٢س}$

① اثبت أن : $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}} - ٢^{٢}ص = ٠$

② أوجد قيم ٢ التى تحقق أن : $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}} - ٢\frac{د ص}{د س} + ص = ٠$

٣٨ (دور ثان ٢٠١٨) إذا كان : س $هـ^{ص} = ٢ - لو_{هـ} ٢ + لو_{هـ} س$ ، $\frac{د س}{د ن} = ٦$

، س = ٢ ، ص = صفر فأوجد : $\frac{د ص}{د ن}$

٣٩ أوجد $\frac{د ص}{د س}$ فى كل مما يأتى :

① ص = $قا هـ^{س}$

② ص $هـ^{س} = هـ^{٣}$

③ س $لو_{هـ}$ ص = ٥٨

④ ص = $لو_{هـ} |س^{٣} - ٧س^{٢} - ٣|$

⑤ ص = $٢قا^{٢}س$

⑥ ص = لو | ظا س |

⑦ ص = جا (لو س)

⑧ ص = لو (جتا ٥ س)

⑨ ص = $هـ^{جا س} \times جا هـ^{س}$

⑩ ص = $\frac{١}{هـ^{س} ظا س}$

⑪ ص = $\sqrt{\frac{١ + هـ^{س}}{١ - هـ^{س}}}$

⑫ ص = لو $_{هـ}$ لو $_{هـ}$ لو $_{هـ}$ س

⑬ ص = لو $_{هـ}$ لو $_{هـ}$ لو $_{هـ}$ س

⑭ ص = لو $_{هـ}$ $(١ + هـ^{٣س})$

⑮ ص = لو $_{هـ}$ $(هـ^{٢س} + هـ^{-٢س})$

⑯ ص = لو $\sqrt{س}$

⑰ ص = $\sqrt{٢ لو س}$

⑱ ص = $[س + لو_{هـ} (٢س)]^{٣}$

⑲ ص = لو $_{هـ}$ (جا $(هـ^{س} + ٥س + ٨)$)

⑳ ص = لو $\sqrt{\frac{س - ١}{س + ١}}$

㉑ ص = $\frac{هـ^{س} لو_{هـ} س}{س^{٢}}$

㉒ ص = لو (جتا $س^{٢}$)

㉓ ص = جتا $(لو س)^{٢}$

㉔ ص^{٢} = $هـ^{٥س^{٢}} - ٣$

㉕ ص^{٢} = $٣^{س} \times ٢^{ص}$

㉖ ص = $٢جتا س + لو_{هـ} س$

㉗ ص = $٤^{٣جا س} - هـ^{س}$

㉘ ص = $\pi^{جا س} + هـ^{\pi}$

㉙ ص = $٣س + ٢ لو_{هـ} س$

㉚ ص = $لو_{هـ} (قا س + ظا س)$

㉛ ص = $لو_{هـ} \left(\frac{لو_{هـ} س}{س}\right)$

٤٠ أوجد $\frac{د ص}{د س}$ فى كل مما يأتى :

① ص = $س^{٢س}$

② (دور ثان ٢٠١٧) ص = $(س^{٣} + ٥)^{س}$

③ ص = $٣س \, س^{٢} + ٢$

④ ص = $س^{\frac{١}{س}}$

⑤ ص = $س^{جا س}$

⑥ ص = $(جا س)^{س}$

⑦ ص = $(١ - ٣س)^{جتا س}$

⑧ ص = $(جا س)^{ظا س}$

⑨ ص = $س^{هـ^{س}}$

⑩ ص = $هـ^{س^{س}}$

⑪ ص = $هـ^{هـ^{س}}$

⑫ ص = $(لو س)^{لو س}$

⑬ ص = $(لو س)^{ظا س}$

⑭ ص = $(س^{٢} + ٣)^{لو س}$

⑮ ص = $(لو س)^{س}$

⑯ ص = $س^{س^{س}}$

٤١ إذا كان $\overleftrightarrow{أ ب}$ مماس للمنحنى : ص = $لو_{هـ} \frac{س}{٢}$ فى النقطة حـ (١ ، ص) ويقطع محور السينات فى النقطة أ ، ومحور الصادات فى النقطة ب أوجد طول : $\overline{أ ب}$

« $٢\sqrt{٢} لو_{هـ} ٢$ هـ وحدة طول»

٤٢ إذا كان العمودى للمنحنى : ص = $لو_{هـ} ٢$ س عند النقطة أ (١ ، $لو_{هـ} ٢$) يقطع محور السينات فى النقطة ب أوجد طول $\overline{أ ب}$ لأقرب ثلاثة أرقام عشرية. « ٠,٩٨٠ وحدة طول»

٤٣ إذا كان مماس المنحنى ص = $هـ^{س}$ عند النقطة (٢ ، $هـ^{٢}$) يقطع محور السينات فى النقطة أ ، ومحور الصادات فى النقطة ب ، أوجد طول : $\overline{أ ب}$ « ٧,٤٦ وحدة طول»

٤٤ إذا كان الإنتاج اليومى لأحد المصانع خلال فترة زمنية ن (يومًا) يتعين بالعلاقة ص = ٤٠٠ (١ - $هـ^{-٠,٠٣ن}$) وحدة أوجد معدل التغير فى عدد الوحدات المنتجة بالنسبة للزمن فى اليوم العاشر.

« ١٢٠ $هـ^{-٠,٣}$ »

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

١٥ إذا كان إنتاج خلية نحل من العسل يُعطى بالعلاقة
ص = (٥٠ + ١٠) لو$_{هـ}$ (٥ + ٥هـ) جرام بدلالة عدد الأيام هـ أوجد معدل تغير إنتاج الخلية عند هـ = ٥ ، هـ = ١٥ ، هـ = ٢٠
هل يتزايد إنتاج الخلية من العسل أم يتناقص ؟ ٨٠ ، ١٢٠ ، ٨٧٫٥ ، ٨٠ ، ٢٠ ، يتناقص

١٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) معدل تغير هـ$^{س^٢}$ بالنسبة إلى لو$_{هـ}$ س يساوى
(أ) ٣ س^٢ هـ$^{س^٢}$ + ٣ س^٢ (ب) هـ$^{س^٢}$
(جـ) ٣ س^٢ هـ$^{س^٢}$ (د) ٣ س^١ هـ$^{س^٢}$

(٢) المنحنى ص = هـ$^{س ص}$ + س = ٠ له مماس رأسى عند النقطة
(أ) (١ ، ١) (ب) (٠ ، ٠) (جـ) (١ ، ٠) (د) (٢ ، هـ^٢)

(٣) إذا كان : د (س) = لو$_{هـ}$ جتا س − لو$_{هـ}$ جتا س فإن : دَ $\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ = ...
(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ١ (د) −١

(٤) إذا كان : د (س) = (جتا س)$^{جتا س}$ فإن : دَ (صفر) = ...
(أ) −٣ (ب) −٢ (جـ) −١ (د) صفر

(٥) إذا كان : د (س) = هـ$^{ظا س}$ فإن : $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{د(س) - د\left(\frac{\pi}{٤}\right)}{س - \frac{\pi}{٤}}$ = ...
(أ) هـ (ب) ٢ هـ (جـ) هـ^٢ (د) ٢ هـ^٢

(٦) إذا كان : ص = لو$_{هـ}$ (جتا س) فإن : $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$ = ...
(أ) − ظتا^٢ س (ب) ظا س
(جـ) − ظتا س ظا س (د) ظا س ظا س

(٧) إذا كان : د (س) = هـ$^{لو_{هـ} س}$ فإن : دَ (س) = ...
(أ) (لو$_{هـ}$ س) هـ$^{لو_{هـ} س}$ (ب) هـ$^{لو_{هـ} س}$
(جـ) (لو$_{هـ}$ س) هـ$^{س - لو_{هـ} س}$ (د) ١

(٨) إذا كان : د (س) = هـ$^{لو_{هـ} (س^٢ - ٢ س + ١٠)}$ فإن : دَ (٠) = ...
(أ) −٤ (ب) −٢ (جـ) صفر (د) ٢

(٩) إذا كان : د (س) = س − س لو$_{هـ}$ س فإن ميل المماس للمنحنى عند س = هـ يساوى
(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) هـ

(١٠) إذا كان : ما س = هـ^{ص} حيث ٠ < س < π فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ...
(أ) طا س (ب) طتا س (جـ) − طا س (د) − طتا س

(١١) (دور ثان ٢٠١٨) إذا كان : ص = هـ$^{(١ + لو_{هـ} س)}$ فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ...
(أ) س (ب) هـ س (جـ) هـ (د) ١

(١٢) النسبة بين ميل مماس المنحنى : ص = لو$_{هـ}$ ٣ $\sqrt{س + ١}$ وميل مماس المنحنى ص = لو$_{هـ}$ ٥ $\sqrt{س + ١}$ عند س = ٣ كنسبة
(أ) ٣ : ٥ (ب) ٥ : ٣ (جـ) ١ : ١ (د) لو$_{هـ}$ ٣ : لو$_{هـ}$ ٥

(١٣) إذا كان : ص = لو$_{هـ}$ س ، ن عدد صحيح موجب فإن : $\frac{ء^ن (ص)}{ء س^ن}$ = ...
(أ) $\left(\frac{-هـ}{س}\right)^ن$ (ب) (ن − ١) س$^{-ن}$
(جـ) (ن + ١) س$^{-ن - ١}$ (د) (−١)$^{ن-١}$ $\underline{|ن - ١}$ س$^{-ن}$

(١٤) إذا كان : د (س) = س لو$_{هـ}$ س وكان $\frac{ء^٨ ص}{ء س^٨} = \frac{ك}{س^٧}$ فإن ك = ...
(أ) $\underline{|٥}$ (ب) $\underline{|٦}$ (جـ) $\underline{|٧}$ (د) $\underline{|٨}$

(١٥) إذا كان : ص = $\sqrt[٣]{هـ^{٢ س}}$ وكان ص^٣ + ٤ ص^٢ + ٤ ص = ٠ فإن : ٢ = ...
(أ) ٤ (ب) −٤ (جـ) ١٦ (د) −١٦

(١٦) إذا كان : س = ٢ هـ^{θ} (جا θ − جتا θ) ، ص = ٢ هـ^{θ} (جا θ + جتا θ)
فإن : $\left(\frac{ء ص}{ء س}\right)_{θ = \frac{\pi}{٤}}$ = ...
(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) $\frac{٢}{\pi}$ (د) $\frac{١}{\pi}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(١٧) إذا كان : ص = ٤ لو$_{هـ}$ ما س + ٩ لو$_{هـ}$ ما س فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ما س + ما س (د) ١-

(١٨) إذا كان : ك ، م ∈ ح وكان د (س) = س $هـ^{س}$ فإن : ك + م = ...

وكان د$^{(١٠)}$ (س) = ك $هـ^{س}$ + م س $هـ^{س}$

(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٢

(١٩) إذا كانت : ص = س^{س} فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = ...

(أ) ١ + لو$_{هـ}$ س (ب) س^{س}

(جـ) س^{س} لو$_{هـ}$ س (د) س^{س} (١ + لو$_{هـ}$ س)

(٢٠) ميل المماس للمنحنى س^{ص} - ص^{س} = ٠ عند النقطة (١ ، ١)

الواقعة عليه يساوى

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) ١-

(٢١) إذا كانت : ص = لو$_{هـ}$ $\frac{هـ^{س^{٢}}}{س^{٢}}$ فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = صفر عندما س = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ١- (د) ± ١

(٢٢) (دور أول ٢٠٢١) معادلة العمودى على المماس للمنحنى ص = لو$_{هـ}$ ظا س عند نقطة واقعة على المنحنى وإحداثيها السينى يساوى $\frac{\pi}{٤}$ هى

(أ) ٤ س - ٨ ص = π (ب) ٨ ص + ٤ س = π

(جـ) ٤ س + ٢ ص = π (د) ٤ س - ٢ ص = π

٤٧ إذا كان : $هـ^{س}$ ص = س $هـ^{ص}$ أوجد : $\frac{د ص}{د س}$ ، $\frac{ص - س ص}{س - س ص}$

٤٨ إذا كانت : $هـ^{٢ س}$ لو$_{هـ}$ ص = س + ص - ٢ أوجد : $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة (١ ، ١) ، $\frac{١}{هـ^{٢} - ١}$

٤٩ إذا كانت : س $هـ^{س ص}$ = ص + ما^{٢} س أوجد : $\frac{د ص}{د س}$ عند س = ٠ ، ١

٥٠ إذا كان : $هـ^{س ص}$ - س^{٢} + ص^{٢} = صفر أوجد : $\frac{د ص}{د س}$ عند س = ٠ ، $\frac{١}{٢}$

٥١ إذا كان : س $هـ^{\frac{١}{٢} ص}$ + ص $هـ^{\frac{س}{٢}}$ = ٢ أوجد : $\frac{د ص}{د س}$ عند س = ٠ ، $\frac{هـ - ١}{هـ}$

٥٢ إذا كانت : س^{٢} ص = ٢ س لو$_{هـ}$ س أثبت أن : س^{٢} ص$''$ + ٥ س ص$'$ + ٤ ص = ٠

٥٣ إذا كان : ص لو$_{هـ}$ (س ص) = س أثبت أن : $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{ص (س - ص)}{س (س + ص)}$

مسائل تقيس مهارات التفكير

٥٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : ص = $\left(١ + \frac{س}{|١} + \frac{س^{٢}}{|٢} + \frac{س^{٣}}{|٣} + ...\right)$

فإن : $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ = ...

(أ) |٣ س (ب) |٣ ص (جـ) س (د) ص

(٢) إذا كانت : د (س) = $هـ^{س}$ ما س ، ق (س) = $هـ^{س}$ ما س

أى من العبارات الآتية غير صحيح ؟

(أ) د$'$ (س) = د (س) + ق (س) (ب) ق$'$ (س) = ق (س) - د (س)

(جـ) د$'$ (س) = ٢ ق (س) (د) ق$'$ (س) = ٢ د (س)

(٣) إذا كانت د : ح ← ح حيث د (س) = $هـ^{ظا س}$ فإن لجميع قيم س ∈ ح

نجد أن

(أ) د$'$ (س) ≤ د (س) (ب) د$'$ (س) ≥ د (س)

(جـ) د$'$ (س) < د (س) (د) د$'$ (س) > د (س)

(٤) إذا كانت الدالة ر هى الدالة العكسية للدالة د حيث د (س) = س^{٣} + ٢ س + $هـ^{س}$

فإن : ر$'$ (١) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٤}$

٥٥ إذا كان : س = $هـ^{ما ٢ ن}$ ، ص = $هـ^{ما ٢ ن}$ أثبت أن : $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{- ص لو_{هـ} س}{س لو_{هـ} ص}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٥٦ إذا كان : ص = أ $e^{ب س}$ + ب $e^{-ب س}$

أثبت أن : $س^{٢} \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} + س \frac{د ص}{د س}$ + ص = ٠

٥٧ إذا كانت : ص = $س^{س}$ أثبت أن : صَ = $س^{س}$ (١ + لو$_{e}$ س)^{٢} + $س^{س - ١}$

٥٨ إذا كان : ص = $\frac{١}{٢}$ لو$_{e}$ $\left(\frac{١ - \sqrt{٢ س}}{١ + \sqrt{٢ س}}\right)$ أثبت أن : $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{٢}{\sqrt{٢ س}}$

٥٩ إذا كان : ص = لو$_{e}$ $\frac{\sqrt{س^{٢} + ١} - ١}{\sqrt{س^{٢} + ١} + ١}$ أثبت أن : $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{٢}{س \sqrt{س^{٢} + ١}}$

٦٠ إذا كان : ص = $س^{س^{س^{س}}}$... أثبت أن : $س \frac{د ص}{د س}$ = $\frac{ص^{٢}}{١ - ص لو_{e} س}$

٦١ إذا كان : ص = $\sqrt{لو_{e} س + \sqrt{لو_{e} س + \sqrt{لو_{e} س + ...}}}$

أثبت أن : (٢ ص − ١) $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{١}{س}$

تكامل الدالة الأسية

* $\int هـ^{س}$ د س = $هـ^{س}$ + ث
* $\int هـ^{ل س + أ}$ د س = $\frac{هـ^{ل س + أ}}{ل}$ + ث حيث : ل ≠ ٠
* إذا كانت د (س) قابلة للاشتقاق فإن :
* $\int$ د' (س) $هـ^{د (س)}$ د س = $هـ^{د (س)}$ + ث حيث : ث ثابت اختيارى.

مثال ١

أوجد كلًا مما يأتى :

① $\int$ ٩ $هـ^{س}$ د س

② $\int هـ^{٦ س}$ د س

③ $\int$ (٤ $س^{٣}$ − ٤ $هـ^{٨ س}$) د س

④ $\int$ (ما ٣ س + ٢ $هـ^{-٤ س}$) د س

⑤ $\int$ (٣ $هـ^{\frac{٥}{٤} ص}$ − ٨ $هـ^{-٠,٢ ص}$) د ص

⑥ $\int$ ($هـ^{ع}$ + $هـ^{-ع}$)^{٢} د ع

⑦ $\int$ $\left(\frac{هـ^{س} + ٦}{هـ^{س}}\right)$ د س

الحل

① $\int$ ٩ $هـ^{س}$ د س = ٩ $\int هـ^{س}$ د س = ٩ $هـ^{س}$ + ث

② $\int هـ^{٦ س}$ د س = $\frac{هـ^{٦ س}}{٦}$ + ث

③ $\int$ (٤ $س^{٣}$ − ٤ $هـ^{٨ س}$) د س = $س^{٤}$ − ٤ × $\frac{هـ^{٨ س}}{٨}$ + ث = $س^{٤}$ − $\frac{١}{٢}$ $هـ^{٨ س}$ + ث

④ $\int$ (ما ٣ س + ٢ $هـ^{-٤ س}$) د س = $\frac{- ما ٣ س}{٣}$ + ٢ × $\frac{هـ^{-٤ س}}{-٤}$ + ث

= − $\frac{١}{٣}$ ما ٣ س − $\frac{١}{٢}$ $هـ^{-٤ س}$ + ث

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑤ $\int (٣ هـ^{\frac{١}{٤}س} - ٨ هـ^{-٠,٢ ص}) ء ص = \frac{٣ \times هـ^{\frac{١}{٤}ص}}{\frac{١}{٤}} - ٨ \times \frac{هـ^{-٠,٢ ص}}{-٠,٢} + ث$

$= \frac{١٢}{٥} هـ^{\frac{١}{٤}ص} + ٤٠ هـ^{-٠,٢ ص} + ث$

⑥ $\int (هـ^{ع} + هـ^{-ع})^{٢} ء ع = \int (هـ^{٢ع} + ٢ + هـ^{-٢ع}) ء ع$

$= \frac{هـ^{٢ع}}{٢} + ٢ ع + \frac{هـ^{-٢ع}}{-٢} + ث$

$= \frac{١}{٢} هـ^{٢ع} + ٢ ع - \frac{١}{٢} هـ^{-٢ع} + ث$

⑦ $\int \left(\frac{هـ^{س} + ٦}{هـ^{س}} \right) ء س = \int (١ + ٦ هـ^{-س}) ء س = س + \frac{٦ \times هـ^{-س}}{-١} + ث$

$= س - ٦ هـ^{-س} + ث$

مثال ٢

أوجد كلًا مما يأتى :

① $\int س^{٣} هـ^{س^{٤}} ء س$

② $\int (س - ١) هـ^{٣س^{٢} - ٦س + ٥} ء س$

③ $\int ما س \times هـ^{متا س} ء س$

④ $\int قا^{٢} س \, هـ^{طا س} ء س$

الحـــل

① بوضع د (س) = $س^{٤}$ ∴ د′ (س) = $٤ س^{٣}$

∴ $\int س^{٣} هـ^{س^{٤}} ء س = \frac{١}{٤} \int (٤ س^{٣}) هـ^{س^{٤}} ء س = \frac{١}{٤} هـ^{س^{٤}} + ث$

② بوضع د (س) = $٣ س^{٢} - ٦ س + ٥$ ∴ د′ (س) = $٦ س - ٦ = ٦ (س - ١)$

∴ $\int (س - ١) هـ^{٣س^{٢} - ٦س + ٥} ء س = \frac{١}{٦} \int ٦ (س - ١) هـ^{٣س^{٢} - ٦س + ٥} ء س$

$= \frac{١}{٦} هـ^{٣س^{٢} - ٦س + ٥} + ث$

③ بوضع د (س) = متا س

∴ د′ (س) = − ما س

∴ $\int ما س \times هـ^{متا س} ء س = - \int (- ما س) \times هـ^{متا س} ء س = - هـ^{متا س} + ث$

④ بوضع د (س) = طا س

∴ د′ (س) = $قا^{٢} س$

$\int قا^{٢} س \, هـ^{طا س} ء س = هـ^{طا س} + ث$

معلومة إثرائية

∵ $ا^{س} = هـ^{س لو_هـ ا}$

∴ $\int ا^{س} ء س = \int هـ^{س لو_هـ ا} ء س = \frac{هـ^{س لو_هـ ا}}{لو_هـ ا} + ث = \frac{ا^{س}}{لو_هـ ا} + ث$

أى أن : $\int ا^{س} ء س = \frac{ا^{س}}{لو_هـ ا} + ث$

مثال ٣

أوجد كلًا مما يأتى :

① $\int ٣^{س} ء س$

② $\int (س^{٥} هـ^{س^{٥}} + ٥ هـ^{س^{٥}}) ء س$

الحـــل

① $\int ٣^{س} ء س = \frac{٣^{س}}{لو_هـ ٣} + ث$

② $\int (س^{٥} هـ^{س^{٥}} + ٥ هـ^{س^{٥}}) ء س = \frac{س^{٥} هـ^{س^{٥}}}{٥} + \frac{٥ هـ^{س^{٥}}}{٥} + \frac{٥^{س}}{لو_هـ ٥} + ث$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

2

تكامل يتضمن الدالة اللوغاريتمية

$\because \frac{د}{د س}[\text{لو}_{هـ}|س|] = \frac{1}{س}$ حيث : $س \neq 0$

$\therefore \int \frac{1}{س} د س = \text{لو}_{هـ}|س| + ث$ حيث : $س \neq 0$

وبصفة عامة إذا كانت د دالة قابلة للإشتقاق ، د $(س) \neq 0$ فإن :

$\int \frac{د'(س)}{د(س)} د س = \text{لو}_{هـ}|د(س)| + ث$ حيث : ث ثابت اختياري.

مثال ٤

أوجد كلًا مما يأتى :

① $\int \frac{3}{س} د س$

② $\int \frac{9}{س \text{ لو}_{هـ} 2} د س$

③ $\int \frac{\text{لو}_{ء} هـ}{س} د س$

④ $\int \frac{\text{لو}_{هـ} س^{4}}{س \text{ لو}_{هـ} س^{5}} د س$

⑤ $\int \frac{(4س - 1)^{2}}{2س} د س$

⑥ $\int \left(\frac{3هـ}{س} + \frac{س}{3هـ}\right) د س$

⑦ $\int \frac{س^{2} - 25}{س^{2} - 5س} د س$

⑧ $\int \frac{س + 2}{س^{2} + 4س + 3} د س$

الحل

① $\int \frac{3}{س} د س = 3 \int \frac{1}{س} د س = 3 \text{ لو}_{هـ}|س| + ث$

② $\int \frac{9}{س \text{ لو}_{هـ} 2} د س = \frac{9}{\text{لو}_{هـ} 2} \int \frac{1}{س} د س$

$= \frac{9}{\text{لو}_{هـ} 2} \times \text{لو}_{هـ}|س| + ث$

$= 9 \text{ لو}_{2}|س| + ث$

③ $\int \frac{\text{لو}_{ء} هـ}{س} د س = \text{لو}_{ء} هـ \int \frac{1}{س} د س$

$= \text{لو}_{ء} هـ \times \text{لو}_{هـ}|س| + ث$

$= \text{لو}_{ء}|س| + ث$

تذكر أن :

$\frac{\text{لو}_{هـ} ا}{\text{لو}_{هـ} ب} = \text{لو}_{ب} ا$

لاحظ أن

$\text{لو}_{ب} ا \times \text{لو}_{ا} حـ = \text{لو}_{ب} حـ$

④ $\int \frac{\text{لو}_{هـ} س^{4}}{س \text{ لو}_{هـ} س^{5}} د س = \int \frac{4 \text{ لو}_{هـ} س}{5 س \text{ لو}_{هـ} س} د س = \frac{4}{5} \int \frac{1}{س} د س$

$= \frac{4}{5} \text{ لو}_{هـ}|س| + ث$

⑤ $\int \frac{(4س - 1)^{2}}{2س} د س = \int \frac{16س^{2} - 8س + 1}{2س} د س$

$= \int \left(8س - 4 + \frac{1}{2س}\right) د س$

$= 4س^{2} - 4س + \frac{1}{2} \text{ لو}_{هـ}|س| + ث$

⑥ $\int \left(\frac{3هـ}{س} + \frac{س}{3هـ}\right) د س = 3هـ \text{ لو}_{هـ}|س| + \frac{1}{6هـ} س^{2} + ث$

⑦ $\int \frac{س^{2} - 25}{س^{2} - 5س} د س = \int \frac{(س + 5)(س - 5)}{س(س - 5)} د س$

$= \int \frac{س + 5}{س} د س = \int \left(1 + \frac{5}{س}\right) د س$

$= س + 5 \text{ لو}_{هـ}|س| + ث$

⑧ $\because$ د $(س) = س^{2} + 4س + 3$ ، د' $(س) = 2س + 4 = 2(س + 2)$

$\int \frac{س + 2}{س^{2} + 4س + 3} د س = \frac{1}{2} \int \frac{2(س + 2)}{س^{2} + 4س + 3} د س$

$= \frac{1}{2} \text{ لو}_{هـ}|س^{2} + 4س + 3| + ث$

مثال ٥

أوجد كلًا مما يأتى :

① $\int \text{ظا}س د س$

② $\int \text{ظتا}س د س$

③ $\int \text{قا}س د س$

④ $\int \text{قتا}س د س$

الحل

① $\because \int \text{ظا}س د س = \int \frac{\text{جا}س}{\text{جتا}س} د س = -\int \frac{(-\text{جا}س)}{\text{جتا}س} د س$

$= -\text{لو}_{هـ}|\text{جتا}س| + ث = \text{لو}_{هـ}|\text{قا}س| + ث$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

② $\int$ ظتا س ء س = $\int \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$ ء س «لاحظ أن البسط هو تفاضل المقام»

= لو$_{هـ}$ |جا س| + ث

③ $\int$ ق س ظا س ء س = $\int \frac{\text{ق س ظا س (ق س + ط س)}}{\text{(ق س + ط س)}}$ ء س «بالضرب بسطًا ومقامًا فى (ق س + ط س)»

= $\int \frac{\text{ق س ظا س ط س + ق}^{2}\text{ س}}{\text{(ق س + ط س)}}$ ء س «لاحظ أن البسط هو تفاضل المقام»

= لو$_{هـ}$ |ق س + ط س| + ث

④ $\int \frac{\text{ف ا س (ف ا س + ط ا س)}}{\text{ف ا س + ط ا س}}$ ء س

«بالضرب بسطًا ومقامًا فى (ف ا س + ط ا س)»

= $\int \frac{\text{ف ا س ط ا س + ف ا}^{2}\text{ س}}{\text{ف ا س + ط ا س}}$ ء س

= − $\int \frac{-\text{ف ا س ط ا س − ف ا}^{2}\text{ س}}{\text{ف ا س + ط ا س}}$ ء س «لاحظ أن البسط هو تفاضل المقام»

= − لو$_{هـ}$ |ف ا س + ط ا س| + ث

مثال ٦

إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة عليه (س ، ص) يساوى $\frac{٥\text{ س} + ٣}{\text{س}}$ وكان المنحنى يمر بالنقطة (هـ ، ٥ هـ + ٧) أوجد معادلة المنحنى.

الحل

∵ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{٥\text{ س} + ٣}{\text{س}}$

∴ $\int \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ ء س = $\int \frac{٥\text{ س} + ٣}{\text{س}}$ ء س = $\int \left(٥ + \frac{٣}{\text{س}}\right)$ ء س

∴ ص = ٥ س + ٣ لو$_{هـ}$ |س| + ث

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (هـ ، ٥ هـ + ٧)

∴ ٥ هـ + ٧ = ٥ هـ + ٣ لو$_{هـ}$ هـ + ث ∴ ث = ٤

∴ معادلة المنحنى هى : ص = ٥ س + ٣ لو$_{هـ}$ |س| + ٤

مثال ٧

إذا كان معدل التغير فى مساحة سطح صفيحة م (بالسنتيمتر المربع) بالنسبة للزمن ن (بالثانية) يتعين بالعلاقة $\frac{\text{ء م}}{\text{ء ن}} = \text{هـ}^{-٠,٠٢\text{ ن}}$ وكانت مساحة الصفيحة عند بداية التغير تساوى ١٤٠ سم^{٢}

أوجد مساحة سطح الصفيحة بعد $\frac{١}{٣}$ دقيقة.

الحل

∵ $\frac{\text{ء م}}{\text{ء ن}} = \text{هـ}^{-٠,٠٢\text{ ن}}$

∴ $\int \frac{\text{ء م}}{\text{ء ن}}$ ء ن = $\int \text{هـ}^{-٠,٠٢\text{ ن}}$ ء ن ∴ م = − ٥٠ هـ$^{-٠,٠٢\text{ ن}}$ + ث

عند بداية التغير ن = صفر ، م = ١٤٠ ∴ ث = ١٤٥

∴ م = − ٥٠ هـ$^{-٠,٠٢\text{ ن}}$ + ١٤٥ بعد $\frac{١}{٣}$ دقيقة أى ٢٠ ثانية

م = (− ٥٠ هـ$^{-٤}$ + ١٤٥) سم^{٢}

مثال ٨

أوجد كلًا مما يأتى :

① $\int \frac{\text{جتا س − جا س}}{\text{جتا س + جا س}}$ ء س

② $\int \frac{٦}{\text{س لو}_{هـ}\text{ س}^{٣}}$ ء س

③ $\int \frac{٦}{\text{س}}$ (لو$_{هـ}$ س)^{٥} ء س

④ $\int \frac{\sqrt{٥ + \text{لو}_{هـ}\text{ س}}}{\text{س}}$ ء س

⑤ $\int \left(\frac{\text{لو س}}{\text{س}}\right)$ ء س

الحل

① نضع د (س) = جتا س + جا س

∴ د′ (س) = − جا س + جتا س = جتا س − جا س

∴ $\int \frac{\text{جتا س − جا س}}{\text{جتا س + جا س}}$ ء س = لو$_{هـ}$ |جتا س + جا س| + ث

لاحظ أن

البسط هو تفاضل المقام

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

② $\int \frac{٦}{س \text{ لو}_{هـ} س}$ د س $= \int \frac{٦}{٣ س \text{ لو}_{هـ} س}$ د س $= ٢ \int \frac{١}{س \text{ لو}_{هـ} س}$ د س

ويوضع د (س) = لو$_{هـ}$ س $\quad \therefore$ د (س) $= \frac{١}{س}$

$\therefore$ التكامل $= ٢ \int \frac{\frac{١}{س}}{\text{لو}_{هـ} س}$ د س $= ٢ \text{ لو}_{هـ} |\text{لو}_{هـ} س| + ث$

③ بوضع د (س) = لو$_{هـ}$ س $\quad \therefore$ د (س) $= \frac{١}{س}$

$\therefore \int \frac{٦}{س} (\text{لو}_{هـ} س)^{٥}$ د س $= ٦ \int \frac{١}{س} (\text{لو}_{هـ} س)^{٥}$ د س

$= \frac{٦ (\text{لو}_{هـ} س)^{٦}}{٦} + ث = (\text{لو}_{هـ} س)^{٦} + ث$

④ بوضع د (س) = ٥ + لو$_{هـ}$ س $\quad \therefore$ د (س) $= \frac{١}{س}$

$\therefore \int \frac{\sqrt{٥ + \text{لو}_{هـ} س}}{س}$ د س $= \int \frac{١}{س} (٥ + \text{لو}_{هـ} س)^{\frac{١}{٢}}$ د س

$= \frac{٢}{٣} (٥ + \text{لو}_{هـ} س)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

⑤ $\because \text{لو}_{س} = \frac{\text{لو}_{هـ} س}{\text{لو}_{هـ} ١٠}$

$\therefore \int \frac{\text{لو}_{س}}{س}$ د س $= \int \frac{\text{لو}_{هـ} س}{س \text{ لو}_{هـ} ١٠}$ د س $= \frac{١}{\text{لو}_{هـ} ١٠} \int \frac{\text{لو}_{هـ} س}{س}$ د س

$= \frac{١}{\text{لو}_{هـ} ١٠} \times \frac{١}{٢} (\text{لو}_{هـ} س)^{٢} + ث = \frac{١}{٢ \text{ لو}_{هـ} ١٠} (\text{لو}_{هـ} س)^{٢} + ث$

على تكامل يتضمن الدوال الأسية واللوغاريتمية

اختبار تفاعلي

فهم • تطبيق • مستويات عليا ∴ من أسئلة الكتاب المدرسي

١ أوجد كلًا مما يأتي :

① $\int هـ^{٤س}$ د س
② $\int هـ^{-س}$ د س
③ $\int هـ^{-\frac{٣}{٤} ص}$ د ص
④ $\int -٦ هـ^{٠,٢ ص}$ د ص
⑤ $\int ٣ \sqrt{٢} هـ^{-\sqrt{٢} ن}$ د ن
⑥ $\int - هـ^{-٥ ع}$ د ع
⑦ $\int \pi هـ^{س}$ د س
⑧ $\int هـ^{١ - ٣س}$ د س
⑨ $\int \frac{٧}{٣} هـ^{٣س - ٤}$ د س
⑩ $\int هـ^{٧ - ٤س}$ د س
⑪ $\int ٥^{س}$ د س
⑫ $\int ٢^{-٥س}$ د س

٢ أوجد كلًا مما يأتي :

① $\int (٤ س - ٢ هـ^{س})$ د س
② $\int (٣ س^{٢} - ٤ هـ^{٢س})$ د س
③ $\int (١ + ٤ هـ^{-٣ هـ})$ د س
④ $\int (هـ^{٢ ك} + ٤ ك)$ د ك
⑤ $\int (٢ س^{٢} + جا ٢ س - ٤ هـ^{٣س})$ د س
⑥ $\int (هـ^{٣س} + ٣ جتا س - ٤ س^{٣} + ٢)$ د س
⑦ $\int \left(\frac{هـ^{س} + هـ^{-س}}{٢} \right)$ د س
⑧ $\int \left(\frac{هـ^{س} + ٣}{هـ^{س}} \right)$ د س
⑨ $\int \left(\frac{هـ^{س} + هـ^{-س}}{هـ^{س}} \right)$ د س
⑩ $\int \left(\frac{٣ هـ^{س} - ٢ هـ^{٢س}}{٢ هـ^{س}} \right)$ د س
⑪ $\int \left(\frac{هـ^{٣س} + ٢ هـ^{٢س} + ٤}{هـ^{س}} \right)$ د س
⑫ $\int \left(هـ^{س} + \frac{١}{هـ^{س}} \right)^{٢}$ د س
⑬ $\int ٢ هـ^{س} (هـ^{س} + ١)^{٢}$ د س
⑭ $\int \left(\frac{هـ^{٢س} - ٢ هـ^{س} - ٨}{هـ^{س} - ٤} \right)$ د س
⑮ $\int (س^{٢} هـ + هـ^{٣س})$ د س
⑯ $\int (\pi^{١} + \pi^{س})$ د س

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٣ أوجد كلًا مما يأتي :

(١) $\int ٢ س \, هـ^{س^٢ + ١٠} \, د س$

(٢) $\int ٤ س \, هـ^{س^٢ + ١} \, د س$

(٣) $\int س^٢ \, هـ^{س^٣ + ١٠} \, د س$

(٤) $\int (س - ٣) \, هـ^{س^٢ - ٦ س + ٥} \, د س$

(٥) $\int س^٢ (٤ س - ٣) \, هـ^{س^٤ - ٣ س^٢} \, د س$

(٦) $\int (١ + \ln س) \, هـ^{(س + \ln س)} \, د س$

(٧) $\int \ln س \times هـ^{\ln س} \, د س$

(٨) $\int (\ln س \, هـ^{\ln س} + ٣ س^٢) \, د س$

(٩) $\int \frac{هـ^{\sqrt{س}}}{\sqrt{س}} \, د س$

(١٠) $\int \frac{د س}{\sqrt{س} \, هـ^{\sqrt{س}}}$

(١١) $\int \frac{هـ^{س}}{\sqrt{١ + ٢ هـ^{س}}} \, د س$

(١٢) $\int ٩ (هـ^{س} + ١)^٨ \times هـ^{س} \, د س$

(١٣) $\int ٢ \ln س \ln س \, د س$

(١٤) $\int ٧ \ln س \ln س \, د س$

٤ أوجد كلًا مما يأتي :

(١) $\int \frac{٢}{س} \, د س$

(٢) $\int \frac{١}{٣ س} \, د س$

(٣) $\int \frac{١}{س + ١} \, د س$

(٤) $\int (س + \frac{١}{س}) \, د س$

(٥) $\int (\frac{٤}{س} - هـ^{-س}) \, د س$

(٦) $\int (\frac{٣}{س} + ٤ هـ^{-٢ س}) \, د س$

(٧) $\int \frac{٤}{٣ س \log_{هـ} ٥} \, د س$

(٨) $\int \frac{\log_{هـ} ٣}{س} \, د س$

(٩) $\int \frac{\log_{هـ} س^٢}{س \log_{هـ} س^٣} \, د س$

(١٠) $\int \frac{\log_{هـ} س}{س \log_{هـ} \sqrt{س}} \, د س$

(١١) $\int (\frac{٢ هـ^{س}}{س} + \frac{س}{هـ^{س}}) \, د س$

(١٢) $\int (\frac{هـ^{س}}{س} + س \log_{هـ} ٣) \, د س$

(١٣) $\int (٣ هـ^{-س} + \frac{\pi}{س}) \, د س$

(١٤) $\int (٣ س^٢ + \frac{٥}{س}) \, د س$

(١٥) $\int (س^٦ + ٥ هـ^{س} + \frac{١}{س}) \, د س$

(١٦) $\int (\ln س - \frac{٢}{س} + هـ^{س}) \, د س$

(١٧) $\int (هـ^{س} + ٣ س + \frac{١}{س}) \, د س$

(١٨) $\int (\frac{٥ س + ٧}{س} + هـ^{س}) \, د س$

(١٩) $\int (\frac{-٣}{س} + ٤ هـ^{-٠,٠١ س} + هـ^{٠,١}) \, د س$

(٢٠) $\int \frac{٦ س^٢ - ٥}{٣ س} \, د س$

(٢١) $\int \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ - ٢ س} \, د س$

(٢٢) $\int (\sqrt{س} - \frac{٣}{\sqrt{س}})^٢ \, د س$

(٢٣) $\int \frac{(٢ س - ١)^٢}{٣ س} \, د س$

(٢٤) $\int \frac{٤ هـ^{س} + س هـ^{س^٢}}{س هـ^{س}} \, د س$

٥ أوجد كلًا مما يأتي :

(١) $\int \frac{٤}{١ + ٢ س} \, د س$

(٢) $\int \frac{د س}{٤ س - ١}$

(٣) $\int \frac{س}{س^٢ + ١} \, د س$

(٤) $\int \frac{٣ س}{س^٢ - ١} \, د س$

(٥) $\int \frac{٩ + ٦ س}{س^٢ + ٣ س} \, د س$

(٦) $\int \frac{س + ١}{س^٢ + ٢ س + ٧} \, د س$

(٧) $\int \frac{٢ س + ٣}{س^٢ + ٣ س - ٢} \, د س$

(٨) $\int \frac{٣ س^٢ - ٥}{س^٣ - ٥ س + ١} \, د س$

(٩) $\int \frac{٣ س^٢ + س}{٢ س^٣ + س^٢ - ١} \, د س$

(١٠) $\int \frac{س^٢ + ٢}{س^٣ + ٦ س + ١} \, د س$

(١١) $\int \frac{٢ س - ١}{س - ١} \, د س$

(١٢) $\int \frac{س^٢}{س + ١} \, د س$

(١٣) $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{س} + ٣} \, د س$

(١٤) $\int \frac{هـ^{٢ س} + ١}{هـ^{٢ س} - ١} \, د س$

٦ أوجد كلًا مما يأتي :

(١) $\int ظا س \, د س$

(٢) $\int ظتا س \, د س$

(٣) $\int قا س \, د س$

(٤) $\int قتا س \, د س$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٥) $\int \frac{\text{ظا}س}{٢ + \text{ظا}س}$ ء س

(٦) $\int \frac{\text{ظا}س}{١ + \text{ظا}س}$ ء س

(٧) $\int \frac{\text{ق}\text{ا}^{٢}س}{\text{ظا}س}$ ء س

(٨) $\int \frac{\text{ق}\text{ا}^{٢}س}{\text{ظا}س}$ ء س

(٩) $\int \frac{\text{ظا}س + \text{جتا}س}{\text{ظا}س - \text{جتا}س}$ ء س

(١٠) $\int \frac{١ - \text{ظا}س}{١ + \text{ظا}س}$ ء س

(١١) $\int \frac{\text{ق}\text{ا}س \text{ظا}س}{\text{ق}\text{ا}س - ١}$ ء س

(١٢) $\int \frac{\text{جا}٢س + ٢\text{جتا}س}{\text{جا}^{٢}س + ٢\text{جا}س - ١}$ ء س

(١٣) $\int \text{ظا}٦س$ ء س

(١٤) $\int \text{ظتا}^{٣}س$ ء س

(١٥) $\int \frac{١ + \text{ظا}س}{س + \text{لو}_{هـ} \text{ق}\text{ا}س}$ ء س

(١٦) $\int \frac{١ + \text{ظتا}س}{س + \text{لو}_{هـ} \text{جا}س}$ ء س

(١٧) $\int \frac{\text{جا}٢س}{\text{جا}٤س}$ ء س

(١٨) $\int \frac{س هـ^{-س - ١} + هـ^{-س - ١}}{س هـ^{-س} + هـ^{-س}}$ ء س

٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $\int ٤س هـ^{س^{٢}}$ ء س = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٢} هـ^{س^{٢}}$ (ب) $هـ^{س^{٢}}$

(جـ) $٢ هـ^{س^{٢}}$ (د) $٤ هـ^{س^{٢}}$

(٢) (دور أول ٢٠١٨) $\int \text{ظا}\theta$ ء θ = ... + ث

(أ) $-$ لو$_{هـ}$ |جتا θ| (ب) $-$ لو$_{هـ}$ جتا θ

(جـ) لو$_{هـ}$ جتا θ (د) |لو$_{هـ}$ جتا θ|

(٣) (دور أول ٢٠١٧) $\int \frac{\text{لو}_{هـ} س^{٢}}{\text{لو}_{هـ} س}$ ء س = ... + ث

(أ) $\frac{س}{٢}$ (ب) $\frac{١}{س}$

(جـ) ٢ س (د) لو$_{هـ}$ |س|

(٤) $\int \frac{١}{س \text{لو}_{هـ} س^{٢}}$ ء س = ... + ث

(أ) ٣ لو$_{هـ}$ |س| (ب) ٣ لو$_{هـ}$ |لو$_{هـ}$ س|

(جـ) $\frac{١}{٣}$ لو$_{هـ}$ |س| (د) $\frac{١}{٣}$ لو$_{هـ}$ |لو$_{هـ}$ س|

(٥) $\int هـ^{٢}$ ء س = ... + ث

(أ) $هـ^{٢س}$ (ب) $\frac{١}{٣} هـ^{٣}$ (جـ) $هـ^{٣}$ (د) $\frac{١}{٣} هـ^{٣س}$

(٦) $\int هـ^{\text{لو}_{هـ} س}$ ء س = ... + ث

(أ) $\frac{س^{٢}}{٢}$ لو$_{هـ}$ س (ب) لو$_{هـ}$ س

(جـ) $\frac{١}{٢} س^{٢}$ (د) $هـ^{س}$

(٧) $\int (١ + \text{ظا}^{٢}س) هـ^{١ + \text{ظا}س}$ ء س = ... + ث

(أ) $هـ^{\text{ظا}س}$ (ب) $هـ^{١ + \text{ظا}س}$ (جـ) $هـ^{١ + \text{ظا}س}$ (د) $هـ^{\text{ق}\text{ا}^{٢}س}$

(٨) إذا كان : د$'$ (س) = $\frac{١}{٢}$ [$هـ^{س} + هـ^{-س}$] ، د (٠) = ١ ، د$'$ (٠) = ٠

فإن : د (س) تساوى

(أ) $-$ د$'$ (س) (ب) د$'$ (س) (جـ) $-$ د (س) (د) د (س)

(٩) إذا كان ميل المماس لمنحنى عند أى نقطة عليه (س ، ص) يساوى ٤ $هـ^{٢س}$

، د (٠) = ٢ فإن : د (٢$-$) = ...

(أ) ٤ (ب) ٤ $هـ^{-٤}$ (جـ) ٢ $هـ^{-٤}$ (د) ٢ $هـ$

(١٠) (دور ثان ٢٠١٨) $\int \frac{س + ٢}{س + ١}$ ء س = ... + ث

(أ) ١ + لو$_{هـ}$ (س + ١) (ب) س $-$ لو$_{هـ}$ |س + ١|

(جـ) س + لو |س + ٢| (د) س + لو$_{هـ}$ |س + ١|

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(١١) $\int \frac{هـ^{2س}-1}{هـ^{س}-1}$ د س = ... + ث

(أ) $\frac{1}{2}هـ^{2س}+هـ^{س}+س$ (ب) $هـ^{2س}+هـ^{س}+1$

(جـ) $هـ^{2س}-هـ^{س}+1$ (د) $\frac{1}{3}هـ^{3س}-س$

(١٢) إذا كان : $\int$ هـ د (س) د س = $\frac{1}{2}س^{2}$ + ث فإن : د (س) يمكن أن تكون

(أ) س (ب) لو س (جـ) لو$_{هـ}$ س (د) $س^{2}$

(١٣) $\int \frac{لو_{هـ} س^{2}}{س}$ د س = ... + ث

(أ) لو$_{هـ}$ س (ب) لو$_{هـ}$ | لو$_{هـ}$ س |

(جـ) $\frac{1}{2}$ (لو$_{هـ}$ س)^{2} (د) (لو$_{هـ}$ س)^{2}

(١٤) $\int \left(\sum_{ن=0}^{\infty} \frac{س^{ن}}{|ن}\right)$ د س = ... + ث

(أ) هـ^{س} (ب) هـ^{س} س (جـ) $س^{2}$ هـ^{س} (د) هـ$^{س^{2}}$

(١٥) $\int \frac{1+لو_{هـ} س}{8+س\ لو_{هـ} س}$ د س = ... + ث

(أ) لو$_{هـ}$ | س لو$_{هـ}$ س | (ب) لو$_{هـ}$ | 8 + س لو$_{هـ}$ س |

(جـ) 8 + لو$_{هـ}$ | س | (د) لو$_{هـ}$ 8 + لو$_{هـ}$ | س |

(١٦) $\int \frac{6}{س+س\ لو_{هـ} س}$ د س = ... + ث

(أ) ٦ (١ + لو$_{هـ}$ س) (ب) ٦ لو$_{هـ}$ | ١ + لو$_{هـ}$ س |

(جـ) $\frac{6}{لو_{هـ} | 1+لو_{هـ} س |}$ (د) $\frac{6}{لو_{هـ} | س + لو_{هـ} س |}$

(١٧) $\int (٧^{2\ لو_{٧} جتا س} - ٥^{2\ لو_{٥} جا س})$ د س = ... + ث

(أ) س (ب) جتا س − جا س

(جـ) $\frac{1}{2}$ جا ٢ س (د) $-\frac{1}{2}$ جتا ٢ س

(١٨) إذا كانت : د (س) = $\int \frac{1-(لو_{هـ} س)^{2}}{س}$ د س

حيث د (١) = صفر فإن د (هـ) = ...

(أ) $-\frac{2}{3}$ (ب) $-\frac{1}{3}$ (جـ) $\frac{1}{3}$ (د) $\frac{2}{3}$

(١٩) (دور أول ٢٠٢١) $\int \frac{س}{س^{2}-2س+1}$ د س = ... + ث حيث ث ثابت.

(أ) لو$_{هـ}$ | س − ١ | − $\frac{1}{س-1}$

(ب) لو$_{هـ}$ | س − ١ | + $\frac{1}{س-1}$

(جـ) لو$_{هـ}$ | س − ١ | + (س − ١)^{2}

(د) لو$_{هـ}$ | $س^{2}$ − ٢ س + ١ | + $\frac{1}{س-1}$

(٢٠) (دور أول ٢٠٢١) إذا كانت : ع = د (ن) حيث ع ، ن ∈ ع$^{+}$ ، وكان معدل تغير ع بالنسبة لـ ن يتناسب عكسيًا مع ن ، وكانت د (١) = ٢٠٠ ، د $(\sqrt{هـ})^{2} = \frac{700}{3}$ ،

فإن : د (٣) = ...

(أ) ١٠٠ لو$_{هـ}$ (٣ هـ^{2}) (ب) ٢٠٠ لو$_{هـ}$ (٩ هـ)

(جـ) ١٠٠ لو$_{هـ}$ (هـ^{2} + ٣) (د) ٢٠٠ لو$_{هـ}$ (٩ + هـ)

(٢١) (دور أول ٢٠٢١) إذا كانت : س $\frac{د ص}{د س}$ − ص = ٣ ، وكانت س = ١ ، عندما ص = −٢

فإن العلاقة بين س ، ص هى

(أ) | ص | = | س + ٣ | (ب) | ص + ٣ | = | س |

(جـ) ص + س = −١ (د) ص + ٢ س = صفر

٨ إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة عليه (س ، ص) يساوى ٧ − ٢ هـ^{س} وكان د (لو$_{هـ}$ ٢) = ٣ أوجد : د (س)

∴ د (س) = ٧ س − ٢ هـ^{س} + ٧ لو$_{هـ}$ ٢

٩ إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة (س ، ص) يساوى ٢ هـ$^{\frac{1}{2}س}$ ، د (٠) = ١ أوجد : د (٣)

∴ د (س) = ٤ هـ$^{\frac{1}{2}س}$ − ٣

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

١٠ ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة عليه (س ، ص) يساوى $\frac{١}{٢ س - هـ^{س}}$ وكان د (٠) = $\frac{١}{٢}$ أوجد : د (٢ هـ) «$\frac{١}{٢}$(١ + لو$_{هـ}$٣)»

١١ منحنى ميل المماس له عند أى نقطة عليه (س ، ص) يساوى $\frac{٣ س + ٢}{س}$ أوجد معادلة المنحنى إذا علم أنه يمر بالنقطة (هـ ، ٣ هـ + ٥) «ص = ٣ س + ٢ لو$_{هـ}$ |س| + ٣»

١٢ إذا كان معدل التغير فى مساحة سطح صفيحة م (بالسنتيمتر المربع) بالنسبة للزمن ن (بالثانية) يتعين بالعلاقة $\frac{ء م}{ء ن} = هـ^{-٠,١ ن}$ وكانت مساحة الصفيحة عند بداية التغير تساوى ٨٠ سم^{٢} ، أوجد مساحة سطح الصفيحة بعد ١٠ ثوانٍ. «(٩٠ − ١٠ هـ$^{-١}$) سم^{٢}»

١٣ إذا كان معدل تغير مبيعات أحد المصانع يتناسب عكسيًا مع الزمن بالأسابيع، وكانت مبيعات المصنع بعد أسبوعين و٤ أسابيع هى على الترتيب ٢٠٠ ، ٣٠٠ وحدة أوجد مبيعات المصنع بعد ٨ أسابيع. «٤٠٠ وحدة»

١٤ إذا كان ميل المماس عند أى نقطة (س ، ص) على منحنى الدالة د يتناسب عكسيًا مع س وكان ميل المماس يساوى ٢ عند س = ٤ ، ص = ٢ أوجد ص بدلالة س «ص = ٨ لو$_{هـ}$ |س| + ٢ − ٨ لو$_{هـ}$٤»

١٥ أوجد كلًا مما يأتى :

(١) $\int \frac{١}{س \text{ لو}_{هـ} س}$ ء س

(٢) $\int \frac{٤}{س \text{ لو}_{هـ} ٣ س}$ ء س

(٣) $\int \frac{(\text{لو}_{هـ} س)^{٢}}{س}$ ء س

(٤) $\int \frac{(\text{لو} س)^{٢}}{س}$ ء س

(٥) $\int \frac{(١ + \text{لو}_{هـ} س)^{٢}}{س}$ ء س

(٦) $\int \frac{٢ س}{(س + ١)^{٢}}$ ء س

(٧) $\int \frac{\sqrt{١ + \text{لو}_{هـ} س}}{س}$ ء س

(٨) $\int \frac{س + ١}{س \sqrt{س + \text{لو}_{هـ} س}}$ ء س

مسائل تقيس مهارات التفكير

١٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\int \frac{د (س)}{س}$ ء س = لو$_{هـ}$ |س| + س^{٢} + ث فإن د (س) = ...

(أ) س^{٢} + س + ١ (ب) س^{٣} + س^{٢} + ١

(جـ) ٢ س^{٢} + ١ (د) س^{٢} + ١

(٢) $\int \frac{١}{س^{٣}}$ (لو$_{هـ}$ س)^{٢} ء س = ... + ث

(أ) $\frac{س^{٢}}{٣}$ (لو$_{هـ}$ س) + س (ب) $\frac{١}{٣}$ (لو$_{هـ}$ س)^{٣}

(جـ) ٣ لو$_{هـ}$ |لو$_{هـ}$ س| (د) $\frac{١}{س}$ (لو$_{هـ}$ س)^{٢}

(٣) $\int \frac{طا س}{١ − جتا س}$ ء س = ... + ث

(أ) لو$_{هـ}$ |١ − طا س| (ب) لو$_{هـ}$ |١ − جتا س|

(جـ) لو$_{هـ}$ |قا س − ١| (د) لو$_{هـ}$ |قا س − ١|

١٧ أوجد كلًا مما يأتى :

(١) $\int \frac{١}{س}$ جتا (لو$_{هـ}$ س) ء س

(٢) $\int$ ٢$^{\text{لو}_{١} س}$ ء س

(٣) $\int \left(\frac{٣}{س} − \frac{٢ س − ١}{س^{٢} − س + ٢} \right)$ ء س

(٤) $\int \frac{٤ س^{٢} + س + ١}{س^{٣} − ١}$ ء س

(٥) $\int \frac{١}{س}$ لو$_{هـ}$ (جا (لو$_{هـ}$ س)) طا (لو$_{هـ}$ س) ء س

(٦) $\int$ (س^{٣} + ٢ س + هـ^{س} . ٢^{س} + جا ٢) ء س

(٧) $\int$ (هـ$^{س \text{ لو}_{هـ} ٢}$ + هـ$^{٢ \text{ لو}_{هـ} س}$ + هـ$^{٢ \text{ لو} ٢}$) ء س

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الوحدة 3

سلوك الدالة ورسم المنحنيات

الدرس 1 تزايد وتناقص الدوال.

الدرس 2 القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة.

الدرس 3 القيم القصوى لدالة على فترة مغلقة.
«القيم العظمى والصغرى المطلقة»

الدرس 4 التحدب لأعلى والتحدب لأسفل ونقط الانقلاب.

الدرس 5 رسم المنحنيات.

الدرس 6 تطبيقات على القيم العظمى والصغرى.



يمكنك حل الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان

الدرس 1

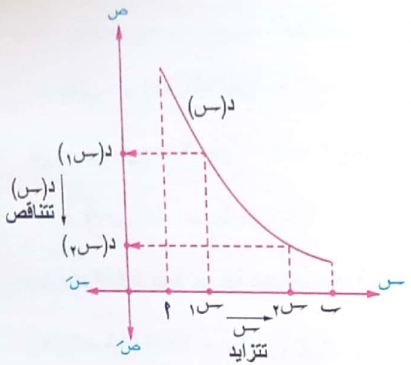
تزايد وتناقص الدوال

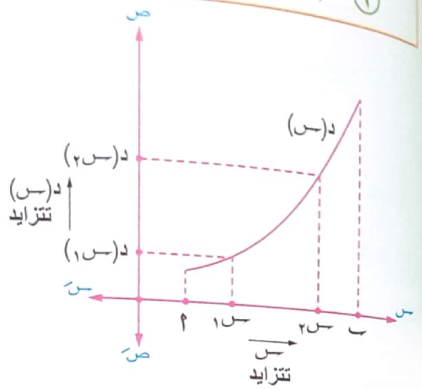
تعريف

* إذا كانت الدالة د معرفة فى الفترة]أ ، ب[ولكل س١ < س٢ فى هذه الفترة كان :

① د (س١) < د (س٢) فإن الدالة تكون متزايدة.

② د (س١) > د (س٢) فإن الدالة تكون متناقصة.





أى أن : الدالة تكون متزايدة فى فترة ما إذا كانت قيمتها تتزايد بتزايد س ، وتكون متناقصة إذا كانت قيمتها تتناقص بتزايد س فى هذه الفترة.

استخدام المشتقة الأولى لبحث تزايد وتناقص الدالة

نظرية «بدون برهان»

① إذا كان : د' (س) > ٠ لكل س ∈]أ ، ب[فإن الدالة متزايدة فى هذه الفترة.

② إذا كان : د' (س) < ٠ لكل س ∈]أ ، ب[فإن الدالة متناقصة فى هذه الفترة.

ملاحظة

* الدالة تتزايد فى فترة ما إذا كان ميل المماس لمنحناها فى هذه الفترة موجبًا أى إذا كان المماس يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

* الدالة تتناقص فى فترة ما إذا كان ميل المماس لمنحناها فى هذه الفترة سالبًا أى إذا كان المماس يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

• النقط الحرجة لها أهمية كبيرة فى بحث سلوك الدالة حيث أنها تفصل بين فترات تزايد وتناقص الدالة كما يوجد عندها أكبر أو أصغر قيمة للدالة فى فترة ما.

تعريف النقط الحرجة

يكون للدالة د المتصلة على الفترة]أ ، ب[نقطة حرجة (حـ ، د (حـ)) حيث حـ ∈]أ ، ب[

إذا كان : دَ (حـ) = صفر أو دَ (حـ) غير موجودة

فمثلاً :

① إذا كانت : د (س) = س^{٣} − ٣ س

فإن : دَ (س) = ٣ س^{٢} − ٣ = ٣ (س^{٢} − ١) = ٣ (س − ١) (س + ١)

∴ دَ (س) = ٠ عندما س = ١ ، س = −١

∴ الدالة لها نقط حرجة عند س = ١ ، س = −١

∵ د (١) = −٢ ، د (−١) = ٢

∴ النقط الحرجة هى (١ ، −٢) (−١ ، ٢)

② إذا كانت : ر (س) = س$^{\frac{١}{٣}}$ فإن : رَ (س) = $\frac{١}{٣}$ س$^{\frac{-٢}{٣}}$ = $\frac{١}{٣ \sqrt[٣]{س^{٢}}}$

∴ رَ (س) تكون غير معرفة عند س = ٠ ∴ الدالة لها نقطة حرجة عند س = ٠

∵ د (٠) = ٠ ∴ النقطة الحرجة هى (٠ ، ٠)

تأكيد هام

النقطة الحرجة عند س = أ لابد وأن تنتمى لمجال الدالة د أى أن : د (أ) تكون معرفة.

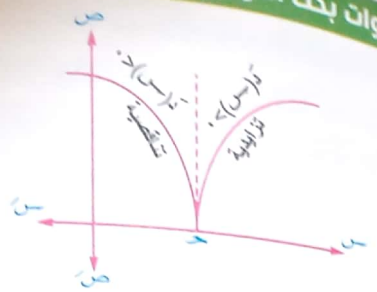
فمثلاً :

إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{\sqrt[٣]{س - ١}}$ فإن : دَ (س) = −$\frac{١}{٣}$ (س − ١)$^{\frac{-٤}{٣}}$

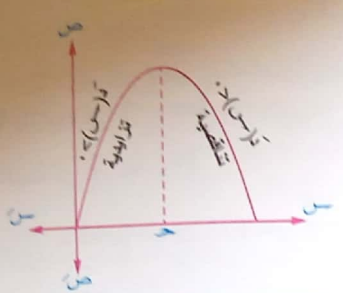
وبالرغم من أن دَ (١) غير معرفة إلا أن الدالة ليس لها نقطة حرجة عند س = ١

وذلك لأن : [د (١) غير معرفة لأن س = ١ لا تنتمى إلى مجال الدالة]

خطوات بحث التزايد والتناقص باستخدام المشتقة الأولى



توجد نقطة حرجة عند س = حـ
لأن دَ (حـ) غير معرفة



توجد نقطة حرجة عند س = حـ
لأن دَ (حـ) = ٠

① نحدد مجال الدالة.

② نوجد دَ (س)

③ نوجد النقط الحرجة أى [النقط التى يكون عندها دَ (س) = ٠ أ، دَ (س) غير موجودة]

④ نحدد الفترات التى ينقسم إليها مجال الدالة بهذه النقط.

⑤ نعين إشارة دَ (س) فى كل فترة من هذه الفترات وبذلك يتم تعيين فترات التزايد حيث [دَ (س) > ٠] وفترات التناقص حيث [دَ (س) < ٠]

مثال ①

أوجد النقط الحرجة ثم ابحث فترات التزايد والتناقص للدالة د : د (س) = س^{٢} − ٤ س + ٥

الحـــل

∵ د (س) = س^{٢} − ٤ س + ٥ ∴ مجال الدالة هو ح

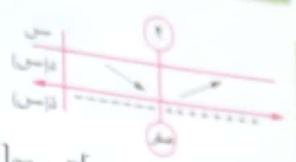
، دَ (س) = ٢ س − ٤ وبوضع دَ (س) = ٠

∴ ٢ س − ٤ = ٠ ∴ س = ٢

، ∵ د (٢) = ١ ∴ توجد نقطة حرجة هى (٢ ، ١)

∴ س = ٢ تقسم المجال إلى فترتين كما يلى :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



∴ الدالة متزايدة فى $]٢ ، \infty[$

، ومتناقصة فى $]-\infty ، ٢[$

حل آخر : ∵ د (س) = $س^{٢} - ٤س + ٥$

∴ د' (س) = $٢س - ٤$

• لإيجاد فترات التزايد نحل المتباينة : د' (س) > ٠

∴ $٢س - ٤ > ٠$ ∴ $س > ٢$ ∴ الدالة متزايدة فى $]٢ ، \infty[$

• لإيجاد فترات التناقص نحل المتباينة : د' (س) < ٠

∴ $٢س - ٤ < ٠$ ∴ $س < ٢$ ∴ الدالة متناقصة فى $]-\infty ، ٢[$

مثال ٢

أوجد النقط الحرجة ثم ابحث فترات التزايد والتناقص للدالة د : د (س) = $س^{٣} - \frac{٣}{٢}س^{٢}$

الحل

∵ د (س) = $س^{٣} - \frac{٣}{٢}س^{٢}$ ∴ مجال الدالة هو ح

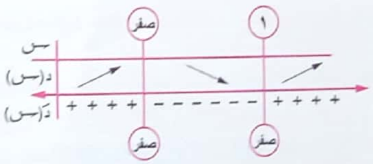
، د' (س) = $٣س^{٢} - ٣س = ٣س(س - ١)$

وبوضع د' (س) = ٠ ∴ $٣س(س - ١) = ٠$

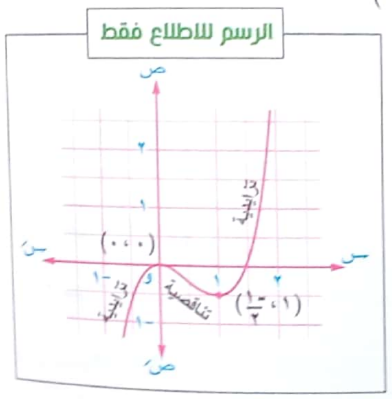
∴ س = ٠ أ، س = ١

، ∵ د (٠) = ٠ ، د (١) = $-\frac{١}{٢}$

∴ النقطة الحرجة هى : $(٠ ، ٠)$ ، $(١ ، -\frac{١}{٢})$



∴ الدالة متزايدة فى كل من $]-\infty ، ٠[$ ، $]١ ، \infty[$ ومتناقصة فى $]٠ ، ١[$



نعلم أن الدالة التربيعية د (س) = $أس^{٢} + ب س + ج$ تكون إشارتها مثل إشارة أ

(معامل $س^{٢}$) إلا فى الحالة التى يكون للدالة جذران حقيقيان وتقع س بين هذين الجذرين فتكون إشارة الدالة حينئذ مخالفة لإشارة أ

ففى المثال السابق : د' (س) = ٣ س (س - ١)

نجد أن إشارة د' (س) تكون موجبة إلا فى الفترة بين س = ٠ ، س = ١ فتكون إشارتها سالبة

أى أن : د' (س) موجبة لكل س $\in]-\infty ، ٠[\cup]١ ، \infty[$ (أى الدالة تزايدية)

، د' (س) سالبة لكل س $\in]٠ ، ١[$ (أى الدالة تناقصية)

مثال ٣

أوجد النقط الحرجة ثم ابحث فترات التزايد والتناقص للدالة د : د (س) = $(س^{٢} - ٤)^{\frac{٢}{٣}}$

الحل

∵ د (س) = $(س^{٢} - ٤)^{\frac{٢}{٣}}$

∴ مجال الدالة هو ح

، د' (س) = $\frac{٢}{٣}(س^{٢} - ٤)^{-\frac{١}{٣}} \times ٢س$

$= \frac{٤س}{٣(س^{٢} - ٤)^{\frac{١}{٣}}}$

∴ د' (س) = ٠

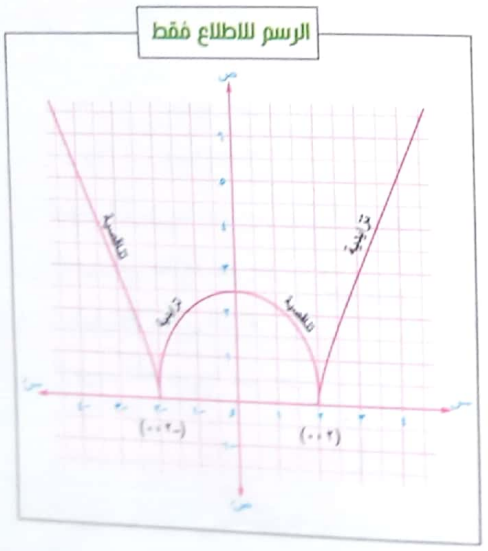
عندما ٤ س = ٠ أى س = ٠

، ∵ د (٠) = $\sqrt[٣]{١٦}$

∴ توجد نقطة حرجة عند س = ٠

هى $(٠ ، \sqrt[٣]{١٦})$

، د' (س) غير معرفة عندما $س^{٢} - ٤ = ٠$ أى أن : (س - ٢) (س + ٢) = ٠



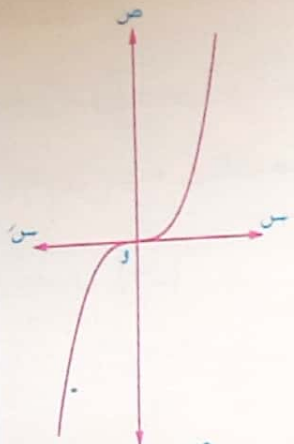
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

معلومة إثرائية

① تتحقق النظرية السابقة للدالة د المتصلة على الفترة]أ ، ب[حتى إذا احتوت الفترة على عدد من النقاط المتباعدة بحيث يكون المماس للمنحنى عندها أفقيًا «دَ (س) = ٠» أو يكون المماس عندها رأسيًا «دَ (س) غير موجودة»

فمثلاً :

* الدالة د : د (س) = س^{٣}



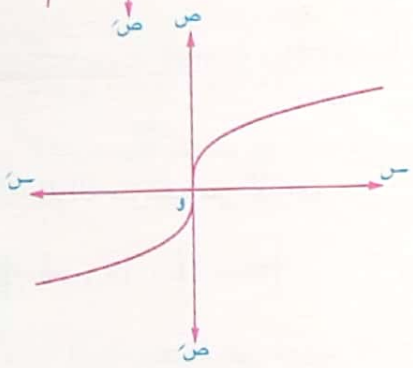
واضح من الرسم أن : الدالة متصلة ومتزايدة على ح

على الرغم من أن : دَ (س) = ٣ س^{٢}

أى أن : دَ (س) > ٠ لكل س ≠ ٠

، دَ (س) = ٠ عند س = ٠

* الدالة د : د (س) = $\sqrt[٣]{س}$



واضح من الرسم أن :

الدالة متصلة ومتزايدة على ح

على الرغم من أن :

دَ (س) = $\frac{١}{٣}$ س$^{-\frac{٢}{٣}}$ = $\frac{١}{٣\sqrt[٣]{س^{٢}}}$

أى أن : دَ (س) > ٠ لكل س ≠ ٠ ، دَ (س) غير موجودة عند س = ٠

وبالتالى نستنتج أن :

* إذا كانت د دالة متصلة فى الفترة]أ ، ب[

وكانت {ح$_{١}$ ، ح$_{٢}$ ، ... ، ، ح$_{ن}$} ⊂]أ ، ب[

دَ (س) > ٠ لكل س ∈]أ ، ب[- {ح$_{١}$ ، ح$_{٢}$ ، ... ، ح$_{ن}$}

، دَ (س) = ٠ أو غير معرفة لكل س ∈ {ح$_{١}$ ، ح$_{٢}$ ، ... ، ح$_{ن}$}

فإن الدالة د تكون متزايدة على الفترة]أ ، ب[

② إذا كانت : دَ (س) = صفر لكل س ∈]أ ، ب[فإن الدالة تكون ثابتة فى هذه الفترة مع ملاحظة أن : س ∈]أ ، ب[حيث أنه لا معنى للحديث عن ثبوت أو تزايد أو تناقص عند نقطة واحدة.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٥

أوجد النقط الحرجة ثم ابحث فترات التزايد والتناقص للدالة د :

د (س) = س^{٣} − ٦ س^{٢} + ١٢ س − ٥

الحـــل

∵ د (س) = س^{٣} − ٦ س^{٢} + ١٢ س − ٥ ∴ مجال الدالة هو ح

، د′ (س) = ٣ س^{٢} − ١٢ س + ١٢ = ٣ (س^{٢} − ٤ س + ٤) = ٣ (س − ٢)^{٢}

وبوضع د′ (س) = ٠ ∴ (س − ٢)^{٢} = ٠ ∴ س = ٢

، ∵ د (٢) = ٣ ∴ النقطة الحرجة هى : (٢ ، ٣)



∴ الدالة متزايدة فى كل من :

]− ∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

، ∵ الدالة متصلة عند س = ٢

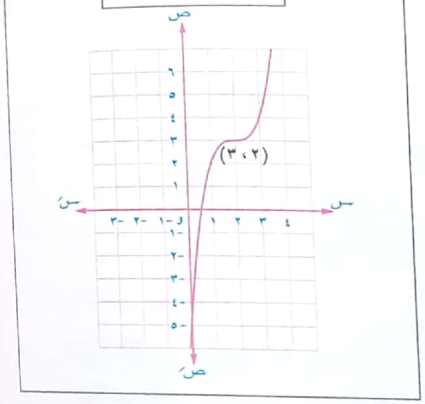
∴ الدالة متزايدة على ح

لاحظ أن : د′ (س) = ٣ (س − ٢)^{٢} > ٠

لجميع قيم س ∈ ح − {٢}

، ∵ الدالة متصلة عند س = ٢ ∴ الدالة متزايدة على ح

الرسم للاطلاع فقط



مثال ٦

أوجد النقط الحرجة ثم ابحث فترات التزايد والتناقص للدالة د : د (س) = $\frac{\text{س}}{\text{س} - ٢}$ ، س ≠ ٢

الحـــل

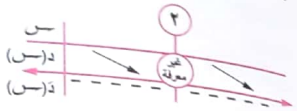
∵ د (س) = $\frac{\text{س}}{\text{س} - ٢}$ ، س ≠ ٢ ∴ مجال الدالة هو ح − {٢}

، د′ (س) = $\frac{(\text{س} - ٢) - \text{س}}{(\text{س} - ٢)^{٢}} = \frac{-٢}{(\text{س} - ٢)^{٢}}$

∴ د′ (س) غير معرفة عند س = ٢

، ∵ ٢ ∉ لمجال الدالة

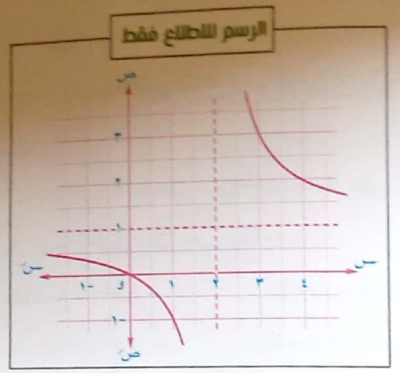
∴ لا توجد نقط حرجة للدالة.



∴ الدالة تناقصية فى كل من]− ∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

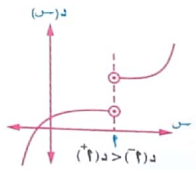
لاحظ أن : بالرغم من أن الدالة تناقصية على كل من الفترتين]− ∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[إلا أننا لا نستطيع أن نقول أنها تناقصية على مجالها ح − {٢} لأن هذه الدالة غير متصلة عند س = ٢

الرسم للاطلاع فقط

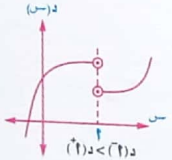


ملاحظـــة

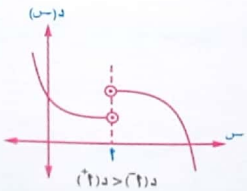
فى حالة أن الدالة غير متصلة عند س = ا فإن :



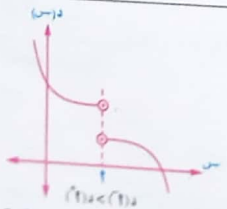
د متزايدة فى ح − {ا}



د متزايدة فى]− ∞ ، ا[،]ا ، ∞[



د متناقصة فى]− ∞ ، ا[،]ا ، ∞[



د متناقصة فى ح − {ا}

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٧

ابحث تزايد وتناقص الدالة د : د (س) = ما س + منا س فى الفترة]٠ ، ٢ π[

الحل

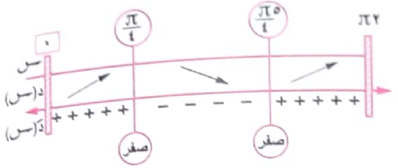
∵ د (س) = ما س + منا س متصلة على الفترة]٠ ، ٢ π[

، ∵ دَ (س) = منا س − ما س

ويوضع دَ (س) = ٠ ∴ منا س − ما س = ٠

∴ منا س = ما س ∴ ظا س = ١

∴ س = $\frac{\pi}{٤}$ أ، $\frac{\pi\ ٥}{٤}$



∴ الدالة متزايدة فى كل من :]٠ ، $\frac{\pi}{٤}$ [،] $\frac{\pi\ ٥}{٤}$ ، ٢ π[ومتناقصة فى] $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi\ ٥}{٤}$ [

مثال ٨

أوجد النقط الحرجة ثم ابحث فترات التزايد والتناقص للدالة : د : د (س) = هـ^س − س

الحل

∵ د (س) = هـ^س − س

∴ مجال الدالة هو ح

، دَ (س) = هـ^س − ١

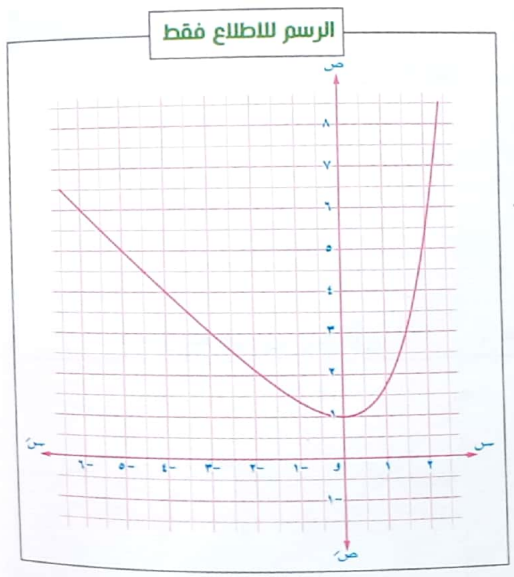
بوضع دَ (س) = ٠ ∴ هـ^س − ١ = ٠

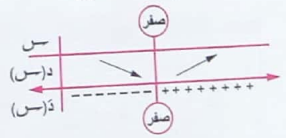
∴ هـ^س = ١ ∴ س = ٠

∴ توجد نقطة حرجة عند س = ٠

، ∵ د (٠) = ١

∴ (٠ ، ١) نقطة حرجة





∴ الدالة د متناقصة فى]−∞ ، ٠[ومتزايدة فى]٠ ، ∞[

مثال ٩

أوجد النقط الحرجة ثم ابحث فترات التزايد والتناقص للدالة : د : د (س) = س^٢ − ٢ لو_هـ س

الحل

∵ د (س) = س^٢ − ٢ لو_هـ س

∴ مجال الدالة هو ح^+

، دَ (س) = ٢ س − $\frac{٢}{س}$

بوضع دَ (س) = ٠ ∴ ٢ س − $\frac{٢}{س}$ = ٠

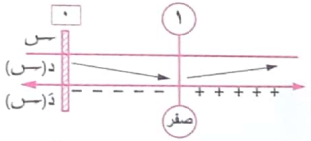
∴ ٢ س^٢ = ٢ ∴ س^٢ = ١

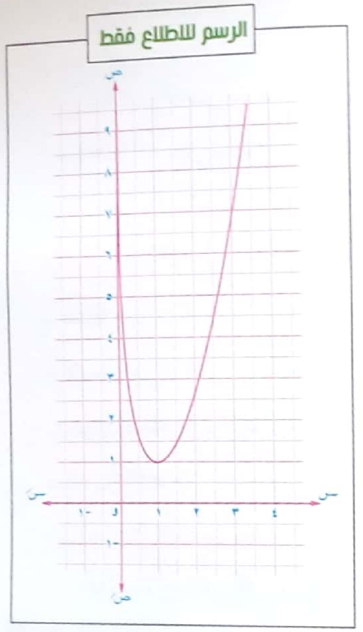
∴ س = ١ أ، س = −١ (مرفوض لأن −١ ∉ ح^+)

∴ توجد نقطة حرجة عند س = ١

، ∵ د (١) = ١

∴ (١ ، ١) نقطة حرجة.





∴ الدالة د متناقصة فى]٠ ، ١[ومتزايدة فى]١ ، ∞[

مثال ١٠

أوجد النقط الحرجة ثم عين فترات التزايد والتناقص للدالة د : د (س) = س | س − ٢ |

الحل

∵ د (س) = $\begin{cases} س\ (س - ٢) & ، س \leq ٢ \\ -س\ (س - ٢) & ، س > ٢ \end{cases}$ = $\begin{cases} س^{٢} - ٢ س & ، س \leq ٢ \\ -س^{٢} + ٢ س & ، س > ٢ \end{cases}$

∴ مجال الدالة هو ح

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

① بدراسة قابلية الاشتقاق للدالة عند س = ٢

∵ د′(٢⁺) = نهـا (د(٢ + هـ) − د(٢)) / هـ = −٢

، د′(٢⁻) = نهـا (د(٢ + هـ) − د(٢)) / هـ = ٢

∴ د′(٢⁺) ≠ د′(٢⁻)

∴ د′(٢) غير موجودة.

، ∵ د(٢) = ٠

∴ (٢ ، ٠) نقطة حرجة.

، د′(س) = { ٢س − ٢ ، س > ٢ ؛ غير موجودة ، س = ٢ ؛ −٢س + ٢ ، س < ٢ }

② بوضع د′(س) = ٠

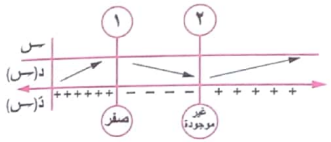
* عندما س > ٢ ∴ ٢س − ٢ = ٠ ∴ س = ١ (مرفوض)

* عندما س < ٢ ∴ −٢س + ٢ = ٠ ∴ س = ١

∴ توجد نقطة حرجة عند س = ١

، ∵ د(١) = ١

∴ (١ ، ١) نقطة حرجة.



∴ الدالة متزايدة فى كل من]−∞ ، ١[،]٢ ، ∞[ومتناقصة فى]١ ، ٢[

ملاحظة

نعلم أن النقط الحرجة كما بالتعريف تُدرس داخل فترة مفتوحة ولكن توجد فى بعض المسائل نقط طرفية (حدية) عند طرفى الفترة المغلقة يكون عندها د′(س) غير موجودة وسوف نسمى هذه النقط «النقط الحرجة الحدية»

وهى خارج نطاق هذا المنهج.

فمثلاً : إذا كانت : د(س) = √(٤ − س²)

فإن : د′(س) = −٢س / (٢√(٤ − س²)) = −س / √(٤ − س²)

وبوضع د′(س) = صفر ∴ س = ٠ ∴ توجد نقطة حرجة عند س = ٠

، د′(س) غير موجودة عند س = ± ٢ ∴ توجد نقط حرجة حدية عند س = ± ٢

على تزايد وتناقص الدوال

اختبار تفاعلى

فهم • تطبيق • مستويات عليا — من أسئلة الكتاب المدرسى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① تكون مشتقة الدوال التناقصية

(أ) موجبة. (ب) سالبة. (جـ) صفر (د) غير ذلك.

② إذا كانت الدالة د متصلة على ح وكانت للدالة د نقطة حرجة عند س = أ

فيمكن أن يكون

(أ) د′(أ) = ٠ (ب) د′(أ) غير معرفة.

(جـ) د′(أ⁺) ≠ د′(أ⁻) (د) كل ما سبق.

③ الدالة د : د(س) = − − س² تكون تزايدية فى الفترة

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٠[(جـ) ح − {٠} (د) ح

④ الدالة د : د(س) = − − |س| + ١ تكون متناقصة فى الفترة

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٠[(جـ)]١ ، ∞[(د)]−∞ ، ٠[

⑤ الدالة د : د(س) = س³ + ٤س + ٢ متزايدة عندما س ∈

(أ)]−٤ ، ∞[(ب) ح (جـ)]−∞ ، −٤/٣[(د)]−٤/٣ ، ∞[

⑥ (دور ثان ٢٠١٤) تكون الدالة د : د(س) = (س − ٣)² + ٢

تزايدية فى الفترة

(أ)]٢ ، ∞[(ب)]٣ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٣[(د)]٠ ، ∞[

⑦ (دور أول ٢٠١٤) تكون الدالة د : د(س) = س³ − ١٢س تناقصية فى الفترة

(أ) [−٢ ، ٢] (ب)]−٢ ، ٢[(جـ)]٠ ، ١٢[(د)]٤ ، ∞[

⑧ (دور ثان ٢٠١٨) إذا كان لمنحنى الدالة د : د(س) = أس² + ١٢س + ١

نقطة حرجة عند س = ٢ فإن : أ = ...

(أ) ١٢ (ب) −٣ (جـ) −١ (د) ٣

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٩) إذا كان للدالة د : د (س) = س^{٢} + $\frac{ب}{س}$ نقطة حرجة عند س = ٢
فإن : ب = ...
(أ) -١٦ (ب) ١٦ (جـ) -٤ (د) ٢

(١٠) إذا كانت د : د (س) = أ س^{٢} + ب س + ٢ لها نقطة حرجة (١ ، ٤)
فإن : أ - ب = ...
(أ) ٢ (ب) صفر (جـ) -٦ (د) -٨

(١١) جميع الدوال التالية متزايدة على مجالها ما عدا الدالة د : د (س) = ...
(أ) ٢ س - ١٧ (ب) هـ^{س} (جـ) (س - ٣)^{٢} (د) س^{٣}

(١٢) إذا كانت : د (س) = $\sqrt[٣]{س - حـ}$ وكان لها نقطة حرجة عند (حـ ، صفر)
فإن : د' (حـ) = ...
(أ) غير معرفة. (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١}{٣\sqrt[٣]{حـ^{٢}}}$

(١٣) إذا كانت د (س) = س لو$_{هـ}$ س فإن الدالة د (س) لها نقطة حرجة عند
س = ...
(أ) صفر (ب) ١ (جـ) هـ (د) $\frac{١}{هـ}$

(١٤) الدالة د : د (س) = هـ$^{س^{٢} - ٢س}$ تكون متزايدة فى الفترة
(أ)]-∞ ، ١[(ب)]-∞ ، ٢[(جـ)]٢ ، ∞[(د)]١ ، ∞[

(١٥) إذا كانت د دالة كثيرة حدود من الدرجة الرابعة ومجالها ح فإن أكبر عدد ممكن للنقط الحرجة للدالة د (س) هو
(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٦) (دور ثان ٢٠١٧) إذا كانت د :]-١ ، ٤[⟵ ح ، د (س) = س^{٣} - ٣ س
فإن عدد النقط الحرجة للدالة د يساوى
(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(١٧) (دور أول ٢٠١٨) إذا كان : د (س) = س (أ - لو$_{هـ}$ س) حيث أ ثابت وكان لمنحنى الدالة نقطة حرجة عند س = هـ فإن : أ = ...
(أ) ١ (ب) صفر (جـ) هـ (د) ٢

(١٨) الدالة د : د (س) = $\frac{س}{لو_{هـ} س}$ متزايدة فى الفترة
(أ)]٠ ، ∞[(ب)]٠ ، هـ[(جـ)]هـ ، ∞[(د) غير ذلك.

(١٩) (دور أول ٢٠١٩) إذا كانت : د دالة حيث : د (س) = $\frac{س^{٤} + ١}{س^{٢}}$
فإن الدالة تكون تناقصية فى
(أ)]-∞ ، -١[فقط (ب)]-١ ، ٠[،]١ ، ∞[
(جـ)]٠ ، ١[فقط (د)]-∞ ، -١[،]٠ ، ١[

(٢٠) (دور ثان ٢٠١٩) إذا كانت د دالة حيث : د (س) = (س^{٢} - ٤)$^{\frac{٢}{٣}}$
فإن الدالة تكون تناقصية فى
(أ)]-∞ ، -٢[،]٠ ، ٢[(ب)]-٢ ، ٠[،]٢ ، ∞[
(جـ)]-∞ ، -٢[فقط (د)]٠ ، ٢[فقط

(٢١) الدالة د : د (س) = لو$_{هـ}$ (س^{٢} - ٤) فإن عدد النقاط الحرجة = ...
(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

١ أوجد النقط الحرجة ثم عين فترات التزايد والتناقص لكل من الدوال الآتية :

(١) ص = س^{٢} - ٦ س + ٧
(٢) ص = ١ - ٤ س - س^{٢}
(٣) د (س) = س^{٣} - ١٢ س + ٧
(٤) د (س) = س^{٣} - ٦ س^{٢} + ٥
(٥) ص = (س - ٢)^{٢}
(٦) د (س) = (س + ٤)^{٣}
(٧) د (س) = س^{٣} - ٩ س^{٢} + ٢٤ س - ٤
(٨) د (س) = ٩ س - س^{٣}
(٩) (دور أول ٢٠٠٥) د (س) = س (س - ٣)^{٢}
(١٠) د (س) = س^{٤} + ٤ س
(١١) د (س) = س^{٤} - ٨ س^{٢} + ١٦
(١٢) د (س) = س^{٥} - ٥ س^{٤} + ١
(١٣) د (س) = (س^{٢} - ٩)^{٢}
(١٤) د (س) = س^{٢} (س - ١)^{٢}
(١٥) د (س) = (س + ٢) (س - ١)^{٢}
(١٦) د (س) = ٥ س^{٦} - ٦ س^{٥} + ١
(١٧) د (س) = س^{٤} + ٢ س^{٣} - ٣ س^{٢} - ٤ س

٢ أوجد النقط الحرجة ثم عين فترات التزايد والتناقص لكل من الدوال الآتية :

(١) د (س) = $\frac{س}{س + ٢}$
(٢) د (س) = $\frac{س^{٢}}{س - ٢}$
(٣) د (س) = $\frac{١}{س - ٣}$
(٤) د (س) = $\sqrt[٣]{٢س - ٣}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٥) د (س) = $\sqrt{٤ - س}$

(٦) د (س) = $\sqrt{س - ١}$

(٧) د (س) = $\sqrt{٢ - س}$

(٨) ص = $\frac{١}{٣}$ س − $\sqrt{س}$

(٩) د (س) = $س^{\frac{٢}{٣}}$

(١٠) د (س) = $\sqrt{(س - ٢)^{٢}}$

(١١) د (س) = $\sqrt{(س^{٢} - ١)^{٢}}$

(١٢) د (س) = ٢ − ٣ $(س - ٢)^{\frac{٢}{٣}}$

(١٣) د (س) = ١ − $\frac{١}{س}$

(١٤) د (س) = س + $\frac{١}{س}$

(١٥) د (س) = $\sqrt{س}$ − $\frac{١}{\sqrt{س}}$

(١٦) د (س) = $\frac{س^{٢} + س - ٢}{س^{٢} - ١}$

(١٧) د (س) = $\frac{س}{س^{٢} + ١}$

(١٨) د (س) = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$

(١٩) د (س) = $\sqrt{س^{٢} - ٤س + ٣}$

(٢٠) د (س) = | س − ٣ | + ٢

(٢١) د (س) = ٣ − | س − ٢ |

(٢٢) د (س) = ٢ − $\sqrt{س^{٢} + ٦س + ٩}$

(٢٣) د (س) = س | س |

(٢٤) د (س) = $س^{٢}$ | س |

(٢٥) د (س) = س | س − ٢ |

(٢٦) د (س) = $\frac{\sqrt{س - ١}}{س}$

(٢٧) د (س) = | $س^{٢}$ − ٥ س + ٦ |

(٢٨) د (س) = $س^{٢}$ $\sqrt{٧ - س^{٢}}$

٤ أوجد النقط الحرجة وعين فترات التزايد والتناقص لكل من الدوال الآتية فى المجال المعطى أمام كل منهما :

(١) د (س) = ١ − جا س ، ٠ < س < ٢ π

(٢) د (س) = س + ٢ جا س ، ٠ < س < ٢ π

(٣) د (س) = س − ٢ جتا س فى [٠ ، ٢ π]

(٤) د (س) = جا ٢ س فى [٠ ، π]

(٥) د (س) = جا س + $جا^{٢}$ س فى [٠ ، ٢ π]

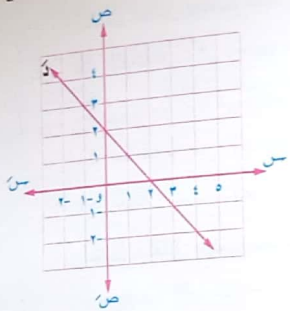
(٦) د (س) = ٤ س − ظا س فى [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : د' (س) = (س − ١) (س − ٣) فإن الدالة د تكون متناقصة فى الفترة

(أ)]١ ، ٣[(ب)]٢ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٢[(د) ح −]١ ، ٢[

(٢) الشكل المقابل يمثل د' فإن الدالة د تكون متزايدة فى الفترة



(أ)]٠ ، ∞[

(ب)]−∞ ، ٠[

(جـ)]٢ ، ∞[

(د)]−∞ ، ٢[

(٣) إذا كانت د : ح ⟵ ح حيث د (س) = $س^{٣}$ − ٢٧ س + ٥

فإن الدالة د تكون تزايدية عندما

(أ) س < − ٣ (ب) | س | > ٣ (جـ) س ≥ −٣ (د) | س | < ٣

(٤) إذا كانت الدالة د : د (س) = ٢ − أ $س^{٣}$ متناقصة على مجالها فإن :

(أ) أ ≥ ٠ (ب) أ > ٠ (جـ) أ ≤ ٠ (د) أ < ٠

(٥) إذا كانت د : ح* ⟵ ح حيث د (س) = لو$_{هـ}$ | س | + أ $س^{٢}$ + ب س وكانت د لها نقطتان حرجتان عند س = −١ ، س = ٢ فإن : أ + ب = ...

(أ) − $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) − $\frac{١}{٢}$

(٦) إذا كانت ر دالة تزايدية على ح ، ل دالة تناقصية على ح وكانت د (س) = ٤ ر (س) − ٣ ل (س) فإن الدالة د تكون على ح

(أ) تزايدية (ب) تناقصية (جـ) ثابتة (د) صفرية

(٧) إذا كان كل من د ، ر دوال تزايدية على ح أى من الدوال الآتية تكون تزايدية دائمًا على مجالها ؟

(أ) د + ر (ب) د − ر (جـ) د . ر (د) $\frac{د}{ر}$

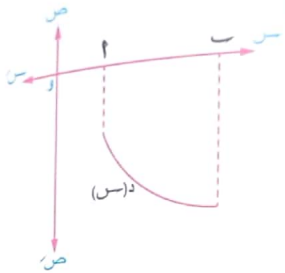
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٨) إذا كانت الدالة د تزايدية على مجالها فأى من الدوال الآتية ليست بالضرورة تزايدية على مجالها ؟

(أ) ص = $\sqrt[٣]{\text{د}(\text{س})}$ (ب) ص = $\sqrt[٣]{\text{د}(\text{س})}$

(جـ) ص = [د (س)]^{٣} (د) ص = $\text{هـ}^{\text{د}(\text{س})}$

(٩) الشكل المقابل يوضح منحنى دالة د مجالها [أ ، ب]



فإن الدالة م : م (س) = س د (س)

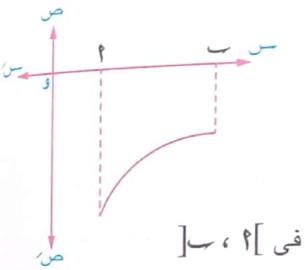
تكون فى الفترة]أ ، ب[

(أ) متناقصة (ب) متزايدة

(جـ) ثابتة (د) لا يمكن تحديد أطرادها

(١٠) الشكل المقابل يوضح منحنى دالة

د حيث د : [أ ، ب] ← ح



فإن الدالة تكون تزايدية

دائما على الفترة]أ ، ب[

(أ) [د (س)]^{٢} (ب) س × د (س)

(جـ) [د (س)]^{٣} (د) ٢ س – د (س)

(١١) إذا كانت الدالة د : د (س) = $\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}+١}$ تزايدية فى]أ ، ب[

فإن : ب – أ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(١٢) إذا كانت د : ح ← ح حيث د (س) = $\sqrt[٣]{\text{س}^{٣}}$ (٣ س – ٧) تزايدية لكل س ∈]–∞ ، أ] ، س ∈ [ب ، ∞[فإن : ٧ أ + ١٥ ب = ...

(أ) ٧ (ب) ١٤ (جـ) ٢١ (د) ٢٢

(١٣) إذا كانت الدالة د معرفة فى]٣ ، ٨[حيث د (س$_{١}$) > د (س$_{٢}$) لكل س$_{٢}$ > س$_{١}$

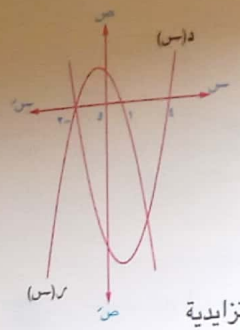
وكانت الدالة د معرفة فى]–٣ ، ٢[حيث د (س$_{١}$) – د (س$_{٢}$) < ٠

لكل س$_{١}$ < س$_{٢}$ فإن كل العبارات الآتية صحيحة ما عدا

(أ) دَ (٤) > دَ (–٢) (ب) $\frac{\text{د}(٥)-\text{د}(٧)}{\text{دَ}(٠)}$ < صفر

(جـ) دَ (٦) > دَ (–١) (د) $\frac{\text{د}(٦)-\text{د}(٤)}{\text{دَ}(-١)}$ < ٠

(١٤) الشكل المقابل يوضح منحنى كل من الدالتين د ، م إذا كانت قَ (س) = دَ (س).م (س)



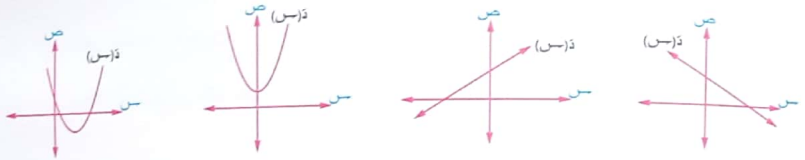
فإن ق تكون متزايدة فى

(أ)]–∞ ، –٢[(ب)]–٢ ، ١[

(جـ)]١ ، ٤[(د)]٤ ، ∞[

(١٥) إذا كان د : ح ← ح وكان لكل س ∈ ح تكون د دالة تزايدية

فإن الشكل الذى يمكن أن يمثل دَ (س) هو



(أ) (ب) (جـ) (د)

(٦) أثبت أن : د حيث د (س) = ط س – س متزايدة على الفترة]٠ ، $\frac{\pi}{٤}$[

(٧) إذا كانت د ، م دالتين قابلتين للاشتقاق ، دَ (س) > مَ (س) لكل س ∈ ح ، فأثبت أن الدالة ع حيث ع (س) = د (س) – م (س) متناقصة لكل س ∈ ح

(٨) حدد فترات التزايد والتناقص للدالة د فى كل مما يأتى :

(١) د (س) = س – هـ$^{\text{س}}$

(٢) د (س) = ٥ – ٢ هـ$^{٢\text{س}}$

(٣) د (س) = س + لو$_{\text{هـ}}$ س

(٤) د (س) = ٢ س – لو$_{\text{هـ}}$ س

(٥) د (س) = ٣ – لو$_{\text{هـ}}$ س^{٢}

(٦) م (س) = ٢ لو$_{\text{هـ}}$ س – س^{٢}

(٩) أوجد النقط الحرجة ثم عين فترات التزايد والتناقص لكل من الدوال الآتية :

(١) د (س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢}+٢ & ، \text{س} \geq ١ \\ ٢\text{س}+١ & ، \text{س} < ١ \end{cases}$

(٢) د (س) = $\begin{cases} ٧-٢\text{س} & ، \text{س} > ٣ \\ ٣\text{س}-٨ & ، \text{س} \leq ٣ \end{cases}$

(٣) د (س) = $\begin{cases} ٣-٤\text{س}-\text{س}^{٢} & ، \text{س} \geq ١ \\ ٢\text{س}-٤ & ، \text{س} < ١ \end{cases}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

④ د (س) = { ٣ س + ١ ، س ≥ ١ ؛ ٥ − س² ، س < ١ }

⑤ د (س) = { ٣ س + ٥ ، س < −١ ؛ س² + ١ ، −١ ≤ س < ٢ ؛ ٩ − س² ، س ≤ ٢ }

١٠ أوجد قيم أ ، ب ، حـ ، ء بحيث يحقق المنحنى :

د (س) = أ س³ + ب س² + حـ س + ء الشروط التالية معًا :

① يمر بنقطة الأصل. ② له نقطة حرجة عند س = ١

③ معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (٢ ، د (٢)) عليه هى : ٩ س + ص = ٢٠

١٠ ، −٩ ، ١٥ ، ..

١١ عين فترات التزايد والتناقص فى كل مما يأتى :

① د (س) = { ٣ − (س − ٢)² ، −٤ ≤ س ≤ ٢ ؛ ٣ ، ٢ < س ≤ ٤ ؛ ٧ − س ، ٤ ≤ س ≤ ٨ }

② د (س) = { ٢ س − س² ، س ≥ ١ ؛ ١ ، ١ < س ≤ ٤ ؛ س² − ٨ س + ١٧ ، س > ٤ }

مسائل تقيس مهارات التفكير

١٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت د دالة قابلة للإشتقاق على ح بحيث د′ (س) < ٠ لجميع قيم س ∈ ح

فإن

(أ) د (س) > د (س − ١) (ب) د (س) < د (س + ١)

(جـ) د (س) < د (س − ١) (د) د (س) + د (س + ١) = ١

② إذا كانت د دالة كثيرة حدود وكان د′ (س) = أ س² + ب س + حـ

فإن د تكون متناقصة على مجالها إذا كان

(أ) أ > ٠ ، ب² − ٤ أ حـ ≥ ٠ (ب) أ > ٠ ، ب² − ٤ أ حـ ≤ ٠

(جـ) أ < ٠ ، ب² − ٤ أ حـ ≥ ٠ (د) أ < ٠ ، ب² − ٤ أ حـ ≤ ٠

③ إذا كانت د (س) = س³ + أ س² + ٣ س − ٢ متزايدة على ح فإن : أ ∈

(أ)]٣ ، ∞[(ب)]−٣ ، ٣[

(جـ)]−∞ ، ٣[(د) ح

④ إذا كان للدالة د : د (س) = ل س³ + ٥ س نقطتان حرجتان

فإن : ل ∈

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]٠ ، ∞[

(جـ)]−∞ ، ٠[(د)]−∞ ، ٠[

⑤ إذا كان د دالة موجبة وتزايدية ، ر دالة موجبة وتناقصية

وكان ع (س) = د (س) / ر (س) فإن : ع تكون

(أ) سالبة وتزايدية. (ب) سالبة وتناقصية.

(جـ) موجبة وتزايدية. (د) موجبة وتناقصية.

⑥ إذا كانت الدالة د : د (س) = (س² + م س + ٤) / (س − ١) (حيث م ثابت) تزايدية

فإن : م ∈

(أ)]−∞ ، −٥[(ب) [−٥ ، ∞[

(جـ)]−٧ ، ٠[(د)]−١٠ ، ١٠[

⑦ إذا كانت د : ح ⟵ ح حيث د (س) = س³ + أ س² + ١٢ س + ١

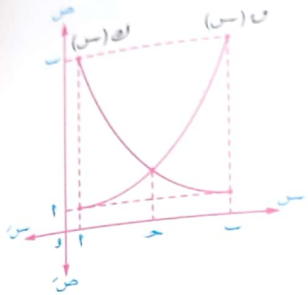
فإن قيم أ التى تجعل الدالة د ليس لها نقط حرجة هى

(أ) −٩ > أ > ٩ (ب) −٦ > أ > ٦

(جـ) −٣ > أ > ٣ (د) ٠ > أ > ٩

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٨) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالتين ن ، ق في الفترة [أ ، ب] فإذا كانت د دالة حيث د (س) = (ن ، ق) (س) فإن العبارة الصحيحة فيما يلى



(أ) الدالة د تناقصية فى الفترة]أ ، ب[

(ب) الدالة د تزايدية فى الفترة]أ ، ب[

(جـ) الدالة د تزايدية فى الفترة]أ ، حـ[فقط

(د) الدالة د تناقصية فى الفترة]أ ، حـ[فقط

(٩) فى الفترة]٠ ، ١[الدالة ر قابلة للاشتقاق مرتين وكان ر (س) < ٠ .
فإذا كانت د دالة حيث د (س) = ر (س) + ر (١ − س) ، فإن العبارة الصحيحة فيما يلى

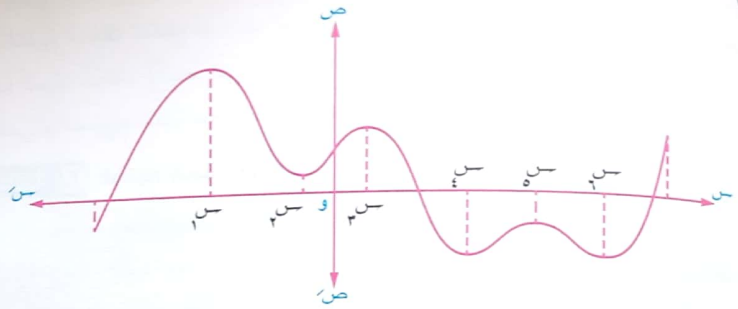
(أ) د تناقصية فى الفترة] $\frac{١}{٢}$ ، ١[(ب) د تزايدية فى الفترة] $\frac{١}{٢}$ ، ١[

(جـ) د تناقصية فى الفترة]٠ ، ١[(د) د تزايدية فى الفترة]٠ ، ١[

الدرس 2

القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة

• إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة ف ويمثلها الشكل البيانى التالى :



فإننا نلاحظ أن :

(١) عند النقطة س١ ∈]أ ، ب[تكون قيمة الدالة عندها أكبر من أى قيمة تقع على يمين أو يسار س١ مباشرة لذلك نقول إن للدالة «قيمة عظمى محلية عند س١» وكذلك النقط س٣ ، س٥

(٢) عند النقطة س٢ ∈]أ ، ب[تكون قيمة الدالة عندها أصغر من أى قيمة تقع على يمين أو يسار س٢ مباشرة لذلك نقول إن للدالة «قيمة صغرى محلية عند س٢» وكذلك النقط س٤ ، س٦

تعريف

* إذا كانت د دالة متصلة ، مجالها ف ، حـ ∈ ف فإنه يوجد للدالة د :

(١) قيمة عظمى محلية عند س = حـ إذا وجدت فترة مفتوحة]أ ، ب[⊂ ف تحوى حـ بحيث يكون د (س) ≥ د (حـ) لكل س ∈]أ ، ب[

(٢) قيمة صغرى محلية عند س = حـ إذا وجدت فترة مفتوحة]أ ، ب[⊂ ف تحوى حـ بحيث يكون د (س) ≤ د (حـ) لكل س ∈]أ ، ب[

وسوف نذكر فيما يلى بعض النظريات التى تساعد على دراسة القيم العظمى والصغرى المحلية.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

نظرية ١

إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة]أ ، ب[وكانت للدالة د قيمة عظمى أو صغرى محلية عند حـ ∈]أ ، ب[فإن : د' (حـ) = صفر أو د' (حـ) غير موجودة

من النظرية السابقة نستنتج أن : عند إيجاد القيم العظمى أو الصغرى المحلية لابد أن نوجد النقط الحرجة للدالة د [النقط التى عندها د' (س) = ٠ أ، د' (س) غير موجودة] لأن القيم العظمى أو الصغرى المحلية توجد فقط عند النقط الحرجة.

نظرية ٢ (اختبار المشتقة الأولى)

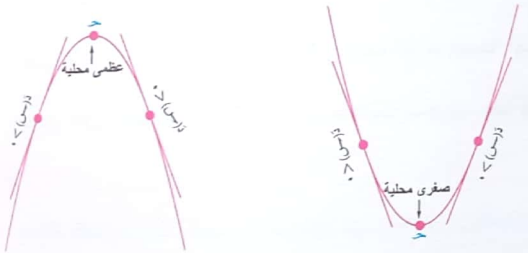
إذا كانت (حـ ، د (حـ)) نقطة حرجة للدالة د المتصلة عند حـ ووجدت فترة مفتوحة حول حـ بحيث :

① د' (س) > ٠ عندما س < حـ ، د' (س) < ٠ عندما س > حـ ، فإن د (حـ) قيمة عظمى محلية.

② د' (س) < ٠ عندما س < حـ ، د' (س) > ٠ عندما س > حـ ، فإن د (حـ) قيمة صغرى محلية.

③ إذا لم يحدث تغيير فى إشارة د' (س) على جانبى حـ ، فإنه لا يوجد للدالة د قيم عظمى أو صغرى محلية عند حـ

والأشكال التالية توضح ذلك :



نظرية ٣ (اختبار المشتقة الثانية)

إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق مرتين على فترة مفتوحة تحوى حـ حيث د' (حـ) = ٠ وكانت

① د'' (حـ) < ٠ فإن د (حـ) قيمة عظمى محلية.

② د'' (حـ) > ٠ فإن د (حـ) قيمة صغرى محلية.

③ د'' (حـ) = ٠ فإن اختبار المشتقة الثانية يفشل فى تحديد نوع النقطة (حـ ، د (حـ)) من حيث كونها عظمى محلية أو صغرى محلية ولذلك نلجأ إلى اختبار المشتقة الأولى.

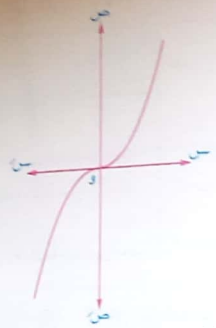
ملاحظات

① عكس نظرية ① غير صحيح أى أن إذا كان د' (س١) = صفر لدالة قابلة للاشتقاق عند س١ فليس بالضرورة وجود قيمة عظمى أو صغرى محلية عند هذه النقطة

فمثلاً : الدالة د : د (س) = س٣ فيها

د' (صفر) = صفر ومع ذلك فإن الدالة ليس لها قيمة صغرى أو عظمى محلية عند س = ٠

حيث إن الدالة متزايدة على ح (كما بالشكل المقابل)

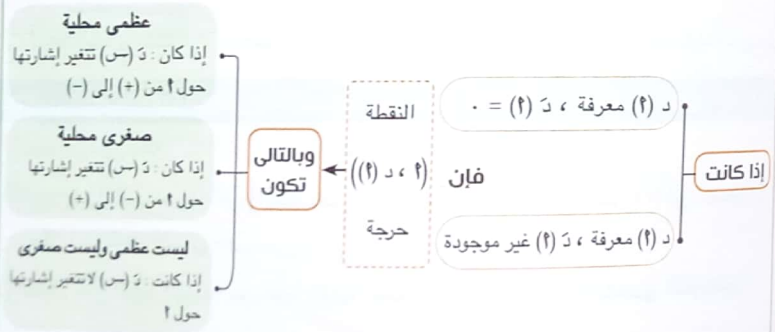


لاحظ أن : (الدالة لها نقطة حرجة عند س = ٠)

② نقط القيم العظمى والصغرى المحلية تكون نقط حرجة ولكن العكس غير صحيح.

أى أن : (النقط الحرجة قد تكون عظمى أو صغرى محلية أو ليست عظمى وليست صغرى).

والمخطط التالى يوضح ذلك.



② إذا كانت الدالة د تزايدية (أو تناقصية) فقط فى فترة ما فليس لهذه الدالة قيم عظمى (أو صغرى) محلية فى هذه الفترة.

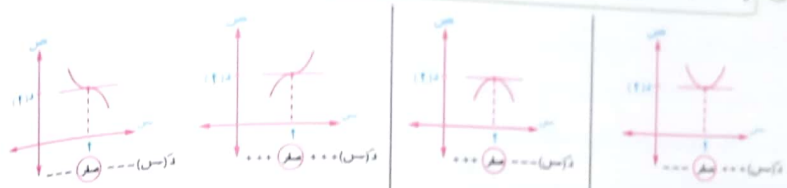
④ النقطة الحرجة التى عندها المشتقة الأولى = صفر أى المماس للمنحنى عندها يكون أفقى يطلق عليها أحيانًا نقطة التوقف.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بعض الأشكال التى توضح العلاقة بين النقط الحرجة والقيم العظمى والصغرى المحلية للدالة

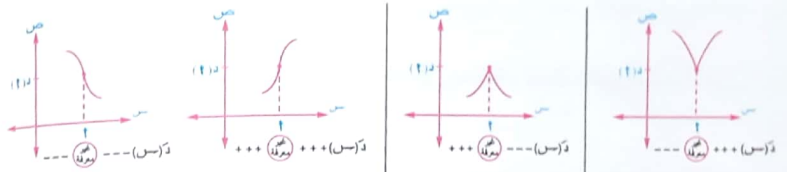
[حيث د (أ) معرفة]

① إذا كان : دَ (أ) = صفر أى أن : المماس أفقى



∴ د (أ) قيمة صغرى محلية | ∴ د (أ) قيمة عظمى محلية | ∴ د (أ) ليست قيمة عظمى محلية وليست قيمة صغرى محلية

② إذا كان : دَ (أ) غير معرفة



∴ د (أ) قيمة صغرى محلية | ∴ د (أ) قيمة عظمى محلية | ∴ د (أ) ليست قيمة عظمى محلية وليست قيمة صغرى محلية

خطوات بحث وجود القيم العظمى والصغرى المحلية للدوال المتصلة غير المشتملة على دالة ثابتة

① نحدد مجال الدالة. ② نوجد دَ (س)

③ نوجد قيم النقط الحرجة أى [النقط التى يكون عندها دَ (س) = صفر أ ، غير موجودة]

وليكن إحداثيها السينى س$_1$

④ اختبار نوع النقط الحرجة من حيث كونها عظمى أو صغرى محلية بإحدى الطريقتين :

(أ) باستخدام إشارة دَ (س) حول النقطة الحرجة كما يلى :

إذا كان

- دَ (س) > ٠ على يسار س$_1$ ، دَ (س) < ٠ على يمين س$_1$
 أى أن : دَ (س) تتغير إشارتها حول س$_1$ من الموجب إلى السالب
 فإن ← (س$_1$ ، د (س$_1$)) نقطة قيمة عظمى محلية
- دَ (س) < ٠ على يسار س$_1$ ، دَ (س) > ٠ على يمين س$_1$
 أى أن : دَ (س) تتغير إشارتها حول س$_1$ من السالب إلى الموجب
 فإن ← (س$_1$ ، د (س$_1$)) نقطة قيمة صغرى محلية

(ب) باستخدام إشارة دَ (س) كما يلى :

إذا كان

- دَ (س$_1$) = صفر ، دَ (س$_1$) < صفر (سالبة)
 فإن ← (س$_1$ ، د (س$_1$)) نقطة قيمة عظمى محلية
- دَ (س$_1$) = صفر ، دَ (س$_1$) > صفر (موجبة)
 فإن ← (س$_1$ ، د (س$_1$)) نقطة قيمة صغرى محلية

* لاحظ أن الطريقة الثانية لا تصلح لبحث القيم العظمى والصغرى المحلية

إذا كانت دَ (س) = صفر

مثال ①

أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د : د (س) = ٢ س^3 − ٣ س^2 − ٣٦ س + ١٤

الحل

∵ د (س) = ٢ س^3 − ٣ س^2 − ٣٦ س + ١٤

∴ مجال الدالة هو ح

، دَ (س) = ٦ س^2 − ٦ س − ٣٦

= ٦ (س^2 − س − ٦)

= ٦ (س + ٢) (س − ٣)

وبوضع دَ (س) = ٠

∴ س = − ٢ أ ، س = ٣

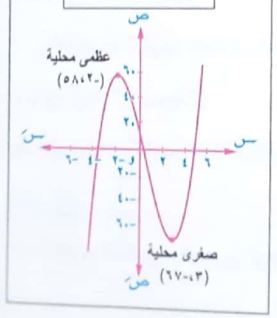
∴ توجد نقطة حرجة عند س = − ٢

، س = ٣

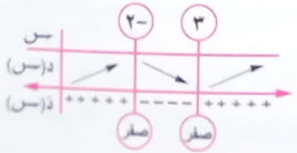
لاحظ أن

الحل باستخدام اختبار المشتقة الأولى

الرسم للاطلاع فقط



* باستخدام اختبار المشتقة الأولى نحدد إشارة دَ (س) كما يلى :



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

∵ حول س = −٢ تتغير إشارة د′ (س) من الموجب إلى السالب

∴ عند س = −٢ توجد قيمة عظمى محلية للدالة ، القيمة العظمى = د (−٢) = ٥٨

∵ حول س = ٣ تتغير إشارة د′ (س) من السالب إلى الموجب

∴ عند س = ٣ توجد قيمة صغرى محلية للدالة ، القيمة الصغرى = د (٣) = −٦٧

مثال ٢

أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د : د (س) = س⁴ − ١٨ س²

الحل

∵ د (س) = س⁴ − ١٨ س²

∴ مجال الدالة هو ح

لاحظ أن

الحل باستخدام اختبار المشتقة الثانية

، د′ (س) = ٤ س³ − ٣٦ س = ٤ س (س² − ٩) = ٤ س (س − ٣) (س + ٣)

ويوضع د′ (س) = ٠ ∴ س = ٠ أ، س = ٣ أ، س = −٣

، ∵ د″ (س) = ١٢ س² − ٣٦ ∴ د″ (٠) = −٣٦ (سالب)

∴ عند س = ٠ توجد نقطة للدالة عندها قيمة عظمى محلية ، القيمة العظمى = د (٠) = ٠

، د″ (٣) = ٧٢ (موجب)

∴ عند س = ٣ توجد نقطة للدالة عندها قيمة صغرى محلية ، القيمة الصغرى = د (٣) = −٨١

، د″ (−٣) = ٧٢ (موجب)

∴ عند س = −٣ توجد نقطة للدالة عندها قيمة صغرى محلية ، القيمة الصغرى = د (−٣) = −٨١

مثال ٣

أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د : د (س) = س⁴ + ١

الحل

∵ د (س) = س⁴ + ١ ∴ مجال الدالة هو ح

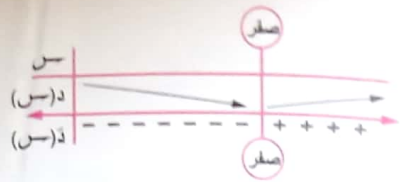
، د′ (س) = ٤ س³ ، د″ (س) = ١٢ س²

، يوضع د′ (س) = ٠ ∴ س = ٠

، ∵ د″ (س) = ١٢ س² ∴ د″ (٠) = صفر

∴ يشمل اختبار المشتقة الثانية ولذلك نستخدم اختبار المشتقة الأولى ونبحث إشارة د′ (س)

على يسار ويمين س = ٠ كما يلي :



∴ عند س = ٠ توجد قيمة صغرى محلية للدالة ، والقيمة الصغرى = د (٠) = ١

مثال ٤

أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د : د (س) = س⁴ − س³

الحل

∵ د (س) = س⁴ − س³

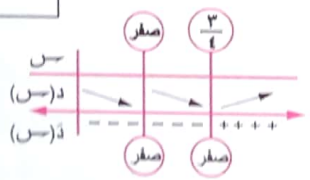
∴ مجال الدالة هو ح

، د′ (س) = ٤ س³ − ٣ س² = س² (٤ س − ٣)

، يوضع د′ (س) = ٠

∴ س = ٠ أ، س = ٣/٤

∴ توجد نقطة حرجة عند س = ٠ أ، س = ٣/٤

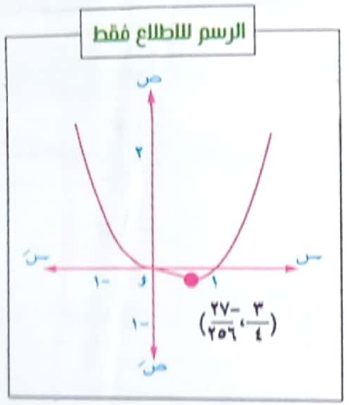


∴ حول س = ٠ لا تتغير إشارة د′ (س)

∴ عند س = ٠ لا توجد قيمة عظمى أو صغرى محلية للدالة

، حول س = ٣/٤ تتغير إشارة د′ (س) من السالب إلى الموجب

∴ عند س = ٣/٤ توجد قيمة صغرى محلية للدالة ، القيمة الصغرى = د (٣/٤) = −٢٧/٢٥٦



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٥

أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة : ص = $\frac{١ - س^{٢}}{١ + س^{٢}}$

الحل

∵ ص = $\frac{١ - س^{٢}}{١ + س^{٢}}$ ∴ $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{-٢ س (١ + س^{٢}) - ٢ س (١ - س^{٢})}{(١ + س^{٢})^{٢}} = \frac{-٤ س}{(١ + س^{٢})^{٢}}$

، $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} = \frac{-٤ (١ + س^{٢})^{٢} + ٤ س \times ٢ (١ + س^{٢}) \times ٢ س}{(١ + س^{٢})^{٤}}$

∴ $\frac{ء ص}{ء س} = ٠$ عندما $-٤ س = ٠$ أى عندما س = ٠

، $\left[\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}\right]_{س = ٠} = \frac{-٤ + \text{صفر}}{١} = -٤ < ٠$

∴ عند س = ٠ توجد نقطة للدالة عندها قيمة عظمى محلية والقيمة العظمى = د (٠) = ١

تنبيه هام عندما تكون د (س) دالة كسرية – كما فى المثال السابق – ولنفترض أن :

د (س) = $\frac{هـ (س)}{ر (س)}$ وأن د (س) = ٠ عندما س = $س_{١}$

أى أن : هـ ($س_{١}$) = ٠ ... (١) ، ر (س) كمية موجبة

، ∵ د (س) = $\frac{ر (س) \cdot هـ' (س) - هـ (س) \cdot ر' (س)}{[ر (س)]^{٢}}$

ولاختبار النقطة $س_{١}$ نبحث إشارة د' ($س_{١}$) فنجد أن :

د' ($س_{١}$) = $\frac{ر ($س_{١}$) \cdot هـ' ($س_{١}$) - هـ ($س_{١}$) \cdot ر' ($س_{١}$)}{[ر ($س_{١}$)]^{٢}}$

، ∵ هـ ($س_{١}$) = ٠ من (١) ، $[ر ($س_{١}$)]^{٢}$ كمية موجبة

، ∵ د' ($س_{١}$) = $\frac{هـ' ($س_{١}$) \times [\text{موجب}] - \text{صفر}}{\text{كمية موجبة}}$

∴ إشارة د'($س_{١}$) هى نفس إشارة الحد الأول فى بسط د' ($س_{١}$) وهو هـ' ($س_{١}$) لأن الحد الثانى فى البسط = صفر والمقام كمية موجبة ولذلك أثناء الحل نكتفى بهذا الحد توفيرًا للوقت والجهد.

مثال ٦

أوجد نقط القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د : د (س) = $\frac{٣ - س}{س^{٢} - س - ٢}$

حيث س ≠ ٢ ، س ≠ – ١

الحل

∵ د (س) = $\frac{٣ - س}{س^{٢} - س - ٢}$

∴ د' (س) = $\frac{- (س^{٢} - س - ٢) - (٢ س - ١) (٣ - س)}{(س^{٢} - س - ٢)^{٢}}$

= $\frac{- س^{٢} + س + ٢ + ٢ س^{٢} - ٧ س + ٣}{(س^{٢} - س - ٢)^{٢}}$

= $\frac{س^{٢} - ٦ س + ٥}{(س^{٢} - س - ٢)^{٢}} = \frac{(س - ١) (س - ٥)}{(س^{٢} - س - ٢)^{٢}}$

حيث س ≠ ٢ ، س ≠ –١

، د'' (س) = $\frac{(٢ س - ٦) (س^{٢} - س - ٢)^{٢} - ٢ (س^{٢} - س - ٢) (٢ س - ١) (س^{٢} - ٦ س + ٥)}{(س^{٢} - س - ٢)^{٤}}$

، س ≠ ٢ ، س ≠ – ١

∵ د' (س) = ٠ عندما (س – ١) (س – ٥) = ٠ أى عندما س = ١ أ، س = ٥

∴ توجد نقط حرجة عند س = ١ ، س = ٥

∴ د'' (١) = $\frac{(٢ - ٦) \times (\text{موجب}) - \text{صفر}}{\text{كمية موجبة}}$ = كمية سالبة

∴ س = ١ نقطة للدالة عندها قيمة عظمى محلية = د (١) = –١

∴ النقطة التى عندها قيمة عظمى محلية هى (١ ، –١)

، د'' (٥) = $\frac{(١٠ - ٦) \times (\text{موجب}) - \text{صفر}}{\text{كمية موجبة}}$ = كمية موجبة

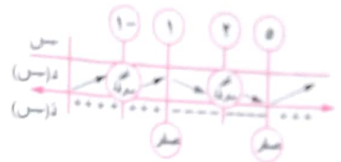
∴ س = ٥ نقطة للدالة عندها قيمة صغرى محلية = د (٥) = $-\frac{١}{٩}$

∴ النقطة التى عندها قيمة صغرى محلية هى $\left(٥ ، -\frac{١}{٩}\right)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

طريقة أخرى (بدون استخدام المشتقة الثانية)

نبحث إشارة د' (س) بجوار النقط الحرجة كما يلى :



∴ عند س = ١ توجد قيمة عظمى محلية

، عند س = ٥ توجد قيمة صغرى محلية.

لاحظ أن

يفضل أن تحل بطريقة بحث إشارة د' (س) على يمين ويسار النقط الحرجة فى الدوال الكسرية.

مثال ٧

أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د : د (س) = س + $\frac{١}{س}$ حيث س ≠ صفر

الحل

∵ د (س) = س + $\frac{١}{س}$

∴ مجال الدالة هو ح − {٠}

، د' (س) = ١ − $\frac{١}{س^٢}$

، د' (س) = $\frac{٢}{س^٢}$

ويوضع د' (س) = ٠

∴ ١ − $\frac{١}{س^٢}$ = ٠

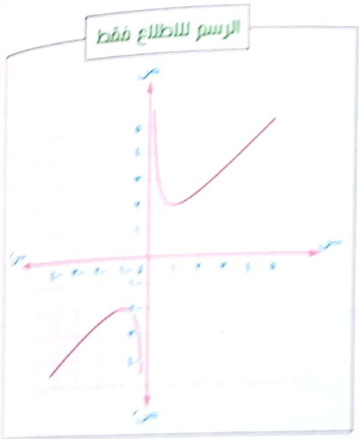
∴ س^٢ = ١

∴ س = ± ١

∴ توجد نقط حرجة عند س = ١ ، س = −١

، ∵ د'' (١) = ٢ > ٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية للدالة عند س = ١



القيمة الصغرى = د (١) = ٢

∵ د' (−١) = − ٢ < ٠ ∴ توجد قيمة عظمى محلية للدالة عند س = −١

، القيمة العظمى = د (−١) = − ٢

ملاحظة

من المثال السابق نلاحظ أن

القيمة العظمى المحلية (− ٢) < القيمة الصغرى المحلية (٢)

وبالتالى نستنتج أنه :

يمكن أن تكون «القيمة العظمى المحلية» أقل من «القيمة الصغرى المحلية» لدالة ما.

مثال ٨

أوجد نقط القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د : د (س) = س$^{\frac{١}{٣}}$

الحل

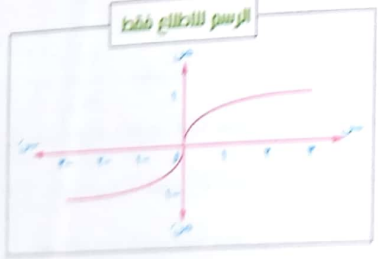
∵ د (س) = س$^{\frac{١}{٣}}$

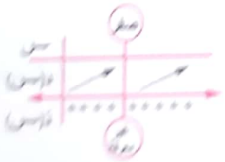
∴ مجال الدالة هو ح

∵ د' (س) = $\frac{١}{٣}$ س$^{-\frac{٢}{٣}}$ = $\frac{١}{٣\sqrt[٣]{س^٢}}$

∵ د' (س) غير معرفة عند س = ٠

∴ توجد نقطة حرجة عند س = ٠





∵ لا تتغير إشارة د' (س) على يمين ويسار س = ٠

∴ س = ٠ ليست نقطة للدالة عندها قيمة عظمى أو صغرى محلية.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٩

أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د : د (س) = ٢ س − ٣ س$^{\frac{٢}{٣}}$

الحل

∵ د (س) = ٢ س − ٣ س$^{\frac{٢}{٣}}$

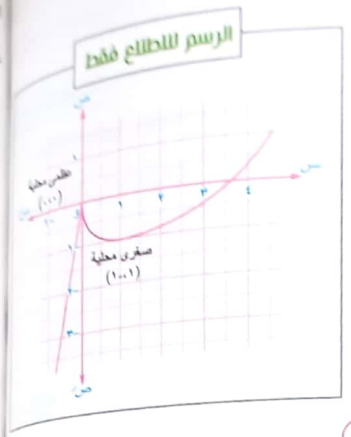
∴ مجال الدالة هو ح

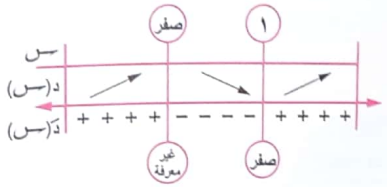
د′ (س) = ٢ − ٢ س$^{-\frac{١}{٣}}$ = $\frac{٢ (س^{\frac{١}{٣}} - ١)}{س^{\frac{١}{٣}}}$

وبوضع د′ (س) = ٠ ∴ س$^{\frac{١}{٣}}$ = ١ ∴ س = ١

، د′ (س) غير معرفة عند س = ٠

∴ توجد نقطة حرجة عند س = ٠ ، س = ١





∴ عند س = ٠ تتغير إشارة د′ (س) من الموجب إلى السالب

∴ عند س = ٠ توجد قيمة عظمى للدالة ، القيمة العظمى = د (٠) = ٠

، ∵ عند س = ١ تتغير إشارة د′ (س) من السالب إلى الموجب

∴ عند س = ١ توجد قيمة صغرى للدالة ، القيمة الصغرى = د (١) = −١

مثال ١٠

أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٢ س + س^{٢} & ، س \geq ٠ \\ ٢ س - س^{٢} & ، س < ٠ \end{cases}$

الحل

∵ د متصلة عند س = ٠ ، د (٠) = ٠

، د′ (س) = ٢ + ٢ س لجميع س < ٠

د′ (س) = ٢ − ٢ س لجميع س > ٠

يبحث قابلية الاشتقاق عند س = ٠ نجد أن :

د′ (٠$^{-}$) = ٢ ، د′ (٠$^{+}$) = ٢ ∴ د′ (٠) = ٢

∴ د′ (س) = $\begin{cases} ٢ + ٢ س & ، س < ٠ \\ ٢ & ، س = ٠ \\ ٢ - ٢ س & ، س > ٠ \end{cases}$

∴ د′ (س) = ٠ عندما ٢ + ٢ س = ٠ ∴ س = −١ (تحقق حيث س < ٠)

∴ س = ١ (تحقق حيث س > ٠)

∴ ٢ − ٢ س = ٠

∴ توجد نقط حرجة عند س = −١ ، س = ١

∴ د′ (س) = ٢ لجميع س < ٠ ∴ د′ (−١) = ٢ > ٠ .

∴ س = −١ نقطة للدالة عندها قيمة صغرى محلية ، القيمة الصغرى = د (−١) = −١

∴ د′ (س) = −٢ لجميع س > ٠ ∴ د′ (١) = −٢ < ٠ .

∴ س = ١ نقطة للدالة عندها قيمة عظمى محلية ، القيمة العظمى = د (١) = ١

مثال ١١

أوجد نقط القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د : د (س) = $\begin{cases} س + ١ & ، س \geq -١ \\ س^{٢} - ١ & ، س < -١ \end{cases}$

الحل

∵ د متصلة عند س = −١ ، د (−١) = ٠

، د′ (س) = ١ لجميع قيم س < −١

، د′ (س) = ٢ س لجميع قيم س > −١

يبحث قابلية الاشتقاق عند س = −١ نجد أن : د′ (−١$^{-}$) = ١ ، د′ (−١$^{+}$) = −٢

∴ د′ (−١$^{-}$) ≠ د′ (−١$^{+}$)

∴ د′ (−١) ليس لها وجود ∴ د′ (س) = $\begin{cases} ١ & ، س < -١ \\ \text{غير موجودة} & ، س = -١ \\ ٢ س & ، س > -١ \end{cases}$

، ∵ د′ (س) = ٠ عندما ٢ س = ٠ ∴ س = ٠ (تحقق حيث س > −١)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

∵ د (س) غير موجودة عند س = ١ ∴ توجد نقطة حرجة عند س = ١ ، س = ٠



∴ عند س = ٠ توجد قيمة صغرى محلية للدالة ، د (٠) = ١-

∴ نقطة القيمة الصغرى = (٠ ، ١-)

، عند س = ١- توجد قيمة عظمى محلية للدالة ، د (١-) = ٠

∴ نقطة القيمة العظمى = (١- ، ٠)

مثال ١٢

أوجد نقط القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د : د (س) = | س - ١ |

الحل

$$\because د(س) = |س - ١| = \begin{cases} س - ١ & ، س \geq ١ \\ -س + ١ & ، س < ١ \end{cases}$$

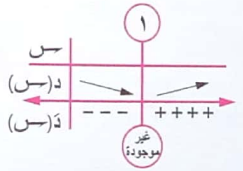
∵ د دالة متصلة عند س = ١ ، د (١) = ٠

، ∵ د' (س) = ١ لكل س > ١

، د' (س) = ١- لكل س < ١

، د' (١$^+$) = ١ ، د' (١$^-$) = ١- ∴ د' (١) غير موجودة

$$\therefore د'(س) = \begin{cases} ١ & ، س < ١ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ١ \\ ١- & ، س > ١ \end{cases}$$



∴ عند س = ١ توجد قيمة صغرى محلية للدالة ، د (١) = ٠ ∴ نقطة القيمة الصغرى = (١ ، ٠)

مثال ١٣

أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د : د (س) = $\sqrt{٩ - س^٢}$

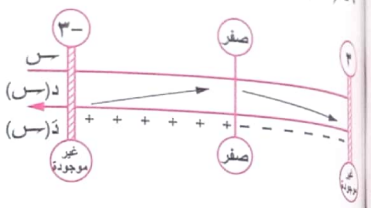
الحل

∵ د (س) = $\sqrt{٩ - س^٢}$ ∴ مجال الدالة هو [- ٣ ، ٣]

∴ د' (س) = $\frac{-٢س}{٢\sqrt{٩ - س^٢}} = \frac{-س}{\sqrt{٩ - س^٢}}$

بوضع د' (س) = ٠ ∴ س = ٠

، د' (س) غير معرفة عند س = - ٣ ، س = ٣



∴ عند س = ٠ توجد قيمة عظمى محلية

للدالة والقيمة العظمى = د (٠) = ٣

، عند س = -٣ توجد نقطة حرجة (حدية)

، وعند س = ٣ توجد نقطة حرجة (حدية)

ملاحظة

يوجد عدم اتفاق بين الكتب والمراجع العلمية على اعتبار النقط الطرفية عندها قيم عظمى أو صغرى محلية أم لا حيث أن الأكثر شيوعًا هو دراسة نقط القيم العظمى والصغرى المحلية داخل فترة مفتوحة وبالتالى فى هذا المثال يكون عند س = -٣ نقطة حرجة (حدية) وعند س = ٣ نقطة حرجة (حدية) ولا نطلق عليهم نقط عظمى أو صغرى محلية وسوف نطلق عليهم قيم صغرى مطلقة فى الدرس القادم.

ملاحظة

إذا كانت الدالة د كثيرة حدود من الدرجة ن فإن لها (ن - ١) على الأكثر من القيم العظمى والصغرى المحلية.

فمثلًا : إذا كانت : د (س) = س^٣ + ٥ س^٢ + ٦ س (من الدرجة الثالثة)

فإن : د (س) لها قيمتان على الأكثر من القيم العظمى أو الصغرى المحلية.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

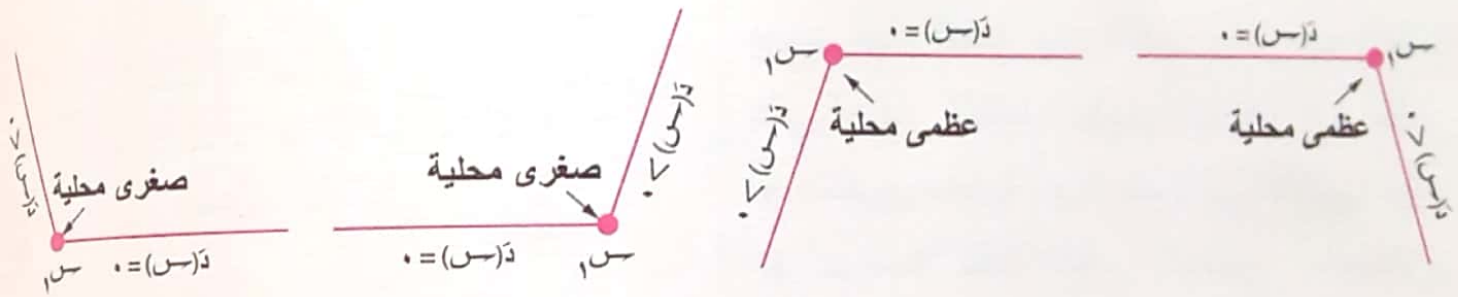
معلومة إثرائية

* عند بحث القيم العظمى والصغرى المحلية لدالة معرفة عند جزء من مجالها كدالة ثابتة وإذا كان الإحداثى السينى لكل من النقط الحرجة للدالة د هو $س_1$ وكان :

١ إذا كان : $د'(س) \geq 0$ على يسار $س_1$ ، $د'(س) \leq 0$ على يمين $س_1$
أى أن : $د'(س)$ تتغير إشارتها حول $س_1$
من [الموجب أو (الصفر)] إلى [السالب أو (الصفر)]
فإن ← $(س_1 ، د(س_1))$ نقطة قيمة عظمى محلية

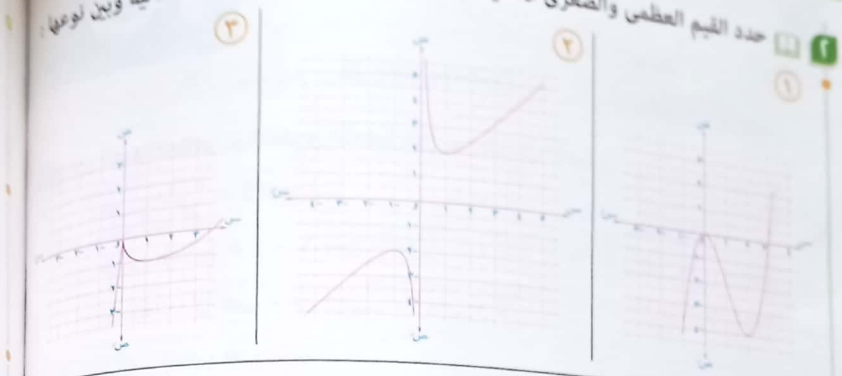
٢ إذا كان : $د'(س) \geq 0$ على يسار $س_1$ ، $د'(س) \leq 0$ على يمين $س_1$
أى أن : $د'(س)$ تتغير إشارتها حول $س_1$
من [السالب أو (الصفر)] إلى [الموجب أو (الصفر)]
فإن ← $(س_1 ، د(س_1))$ نقطة قيمة صغرى محلية

والأشكال التالية توضح ذلك :



* إذا كانت الدالة المتصلة د فى الفترة]أ ، ب[ثابتة فإن جميع النقط $س_1 \in$]أ ، ب[تعتبر نقط حرجة لأن عندها $د'(س) = 0$ وبالتالى تكون د $(س_1)$ قيمة عظمى محلية وفى نفس الوقت تعتبر قيمة صغرى محلية أيضًا.

٢ جد القيم العظمى والصغرى المحلية (إن وجدت) للدالة د فى الأشكال التالية وبين نوعها :



٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت الدالة د كثيرة حدود لها قيمة عظمى محلية عند النقطة (أ ، ب)

فإن : د' (أ) = ...

(أ) ب (ب) صفر (جـ) $\frac{-ب}{أ}$ (د) غير معرفة.

(٢) المنحنى : ص = $س^{٢}$ − ٦ س + ٧ له قيمة صغرى محلية عند س = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) صفر

(٣) إذا كان منحنى الدالة د فيه : د (٥) = ٧ ، د' (٥) = صفر ، د'' (٥) = − ٤

فإن النقطة (٥ ، ٧) عندها قيمة

(أ) عظمى محلية. (ب) صغرى محلية. (جـ) غير معرفة. (د) صفرية.

(٤) يكون للدالة د قيمة صغرى محلية إذا كانت د (س) تساوى

(أ) ٢ س − ١ (ب) $س^{٢}$ + ١ (جـ) $س^{٣}$ (د) − $س^{٣}$

(٥) يكون للدالة د قيمة عظمى محلية إذا كانت : د (س) تساوى

(أ) $س^{٢}$ − ٣ (ب) $س^{٣}$ + ١ (جـ) $س^{٣}$ + ٣ س (د) $س^{٤}$ − $٣س^{٢}$

(٦) إذا كانت الدالة د : د (س) = $س^{٢}$ + ل س + م لها قيمة صغرى = ٣ عند س = ١

فإن : ل − م = ...

(أ) ٦ (ب) ٤ (جـ) − ٤ (د) − ٦

(٧) (دور أول ٢٠١٥) إذا كان للدالة د : د (س) = س + $\frac{أ}{س}$ قيمة عظمى محلية عند

س = − ٢ فإن : أ = ...

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) − ٢ (د) − ٤

(٨) (دور أول ٢٠١٩) إذا كانت د دالة حيث : د (س) = $\frac{س}{لو_{هـ} س}$ فإن القيمة الصغرى المحلية

للدالة د تساوى

(أ) هـ (ب) $\frac{١}{هـ}$ (جـ) لو_{هـ} هـ (د) − هـ

(٩) الدالة د : ح ← ح حيث د (س) = ٢ س + جتا س فإن : د

(أ) لها قيمة صغرى عند س = π (ب) لها قيمة عظمى عند س = ٠

(جـ) دالة تناقصية. (د) دالة تزايدية.

(١٠) إذا كانت د دالة فردية متصلة على ح وكان للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٢

فإن للدالة يوجد

(أ) قيمة عظمى محلية عند س = − ٢ (ب) قيمة صغرى محلية عند س = − ٢

(جـ) د' (٢) > د' (− ٢) (د) د' (٢) < د' (− ٢)

(١١) للمنحنى ص = س $هـ^{س}$ عند محلية.

(أ) س = − ١ تكون نقطة قيمة صغرى (ب) س = − ١ تكون نقطة قيمة عظمى

(جـ) س = ٠ تكون نقطة قيمة صغرى (د) س = ٠ تكون نقطة قيمة عظمى

(١٢) إذا كان : د' (س) = (س − أ) (س − ب) حيث أ > ب

فإن جميع العبارات الآتية صحيحة ما عدا

(أ) عند س = أ يوجد للدالة د قيمة صغرى محلية.

(ب) د' (أ) = د' (ب)

(جـ) عند س = ب يوجد للدالة د قيمة عظمى محلية.

(د) د' (أ) < د' (ب)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(١٣) إذا كانت : س $\in \left]0 ، \frac{\pi}{2}\right[$ فإن : د (س) = ما $\left(س + \frac{\pi}{٦}\right)$ + ما $\left(س + \frac{\pi}{٦}\right)$ لها قيمة عظمى عند س = ...

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{\pi}{٦}$ (جـ) $\frac{\pi}{١٢}$ (د) $\frac{\pi}{٨}$

(١٤) إذا كانت : د' (−١) = د' (٣) = صفر وكانت د' (س) > صفر لكل س $\in$]−٢ ، ٢[

فإن :

(أ) د (−١) قيمة عظمى محلية. (ب) د (−١) قيمة صغرى محلية.

(جـ) د (٣) قيمة عظمى محلية. (د) د (٣) قيمة صغرى محلية.

(١٥) (دور أول ٢٠١٩) الدالة د : د (س) = $س^{٤} - ٤ س^{٢}$ لها

(أ) قيمة صغرى محلية وقيمتان عظمى محلية.

(ب) قيمتان مختلفتان صغرى محلية وقيمة عظمى محلية.

(جـ) قيمتان صغرى محلية وليس لها قيم عظمى محلية.

(د) قيمتان متساويتان صغرى محلية وقيمة عظمى محلية.

(١٦) إذا كانت د (س) = ط ا س − م ق ا س لها قيمة عظمى محلية عند س = $\frac{\pi}{٤}$

فإن قيمة الثابت م = ...

(أ) $-\sqrt{٢}$ (ب) −١ (جـ) ١ (د) $\sqrt{٢}$

(١٧) الدالة د حيث د (س) = (س − أ)^{٢} + (س − ب)^{٢} لها قيمة صغرى محلية عند س = ...

(أ) $\frac{أ + ب}{٢}$ (ب) $\sqrt{أ ب}$ (جـ) $\frac{٢}{أ + ب}$ (د) $\frac{٢ أ ب}{أ + ب}$

(١٨) إذا كان منحنى الدالة د له قيمة صغرى محلية عند س = أ وكان د (س) < ٠ لجميع قيم س فأى المنحنيات الآتية لها قيمة صغرى عند س = أ ؟

(أ) د (س) + ك (ب) د (س + ك) (جـ) − د (س) (د) [د (س)]^{٢}

٤ أوجد قيم س التى توجد عندها القيم العظمى والصغرى المحلية لكل من الدوال الآتية [حيث المقام ≠ ٠]

(١) د (س) = س + $\frac{١}{س}$

(٢) د (س) = $س^{٢} - \frac{١}{س^{٢}}$

(٣) د (س) = $س^{٣} + \frac{٤٨}{س}$

(٤) د (س) = $س^{٢} + \frac{١٦}{س}$

(٥) د (س) = س + $\frac{٤}{س - ١}$

(٦) د (س) = $\frac{٣}{س - ٢}$

(٧) د (س) = $\frac{٢ س}{س^{٢} + ١}$

(٨) د (س) = $\frac{س^{٢}}{١ - س}$

(٩) د (س) = $\frac{١ + س}{١ - س}$

(١٠) د (س) = $\frac{س^{٢} - ٣}{س - ٢}$

(١١) د (س) = $\frac{٤ س - ٣}{س^{٢} - ١}$

(١٢) د (س) = $\frac{٥ - س}{س^{٢} - ٩}$

(١٣) د (س) = $\frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} + ١}$

(١٤) د (س) = $\frac{٣ س^{٢} + ٥ س + ٢٥}{س + ٢}$

٥ أوجد نقط القيم العظمى والصغرى المحلية لكل من الدوال الآتية :

(١) د (س) = $٣ - س^{\frac{٢}{٣}}$

(٢) د (س) = $(س + ٢)^{\frac{٢}{٣}}$

(٣) د (س) = $\sqrt[٣]{س - ٢}$

(٤) د (س) = $\sqrt[٣]{(س - ٢)^{٢}}$

(٥) د (س) = $٢ - \sqrt[٣]{(٣ - س)^{٢}}$

(٦) د (س) = $\sqrt[٣]{٢٧ - ٨ س^{٣}}$

(٧) د (س) = $\sqrt[٣]{(س^{٢} - ٩ س)^{٢}}$

(٨) د (س) = $(س - ١)^{\frac{٤}{٣}}$

(٩) د (س) = $\sqrt[٣]{س (س - ٤)^{٢}}$

(١٠) د (س) = $\sqrt{س - ٣}$

(١١) د (س) = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$

(١٢) د (س) = $\sqrt{س^{٢} - ٩}$

(١٣) د (س) = $\sqrt[٣]{س^{٢} - ٤}$

(١٤) د (س) = $س^{\frac{٢}{٣}} (٢ س - ٥)$

(١٥) د (س) = $س \sqrt[٣]{س + ٣}$

(١٦) د (س) = $س^{٢} \sqrt{س + ٥}$

(١٧) د (س) = $س \sqrt{٨ - س^{٢}}$

(١٨) د (س) = $س^{٢} \sqrt{٣ - س^{٢}}$

٦ أثبت أن : للدالة د حيث د (س) = $\sqrt[٣]{س^{٢}}$ قيمة صغرى محلية.

٧ هل للدالة د حيث د (س) = $س^{٣} + ٣ س - ٤$ قيم عظمى وصغرى محلية ؟ فسر إجابتك.

٨ أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية لكل من الدوال الآتية :

(١) د (س) = س + ٢ ما س حيث س $\in$]٠ ، ٢ π[

(٢) د (س) = ٢ س − ط ا س حيث س $\in \left]0 ، \frac{\pi}{٢}\right[$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

② د (س) = ما س + جتا س ، حيث س ∈]٠ ، ٢π[

③ د (س) = ما س جتا س + ٥ ، حيث س ∈]٠ ، π[

④ ص = ما س (١ + جتا س) ، حيث س ∈]٠ ، π/٢[

٩ أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية لكل من الدوال الآتية :

① د (س) = ٤ هـ^س − س^٢

② د (س) = هـ^س (٣ − س)

③ د (س) = هـ^س + هـ^−س

④ د (س) = س − لو_هـ س

⑤ د (س) = ٨ لو_هـ س − س^٢

١٠ أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية لكل من الدوال الآتية :

① د (س) = |س + ٣| − ١

② د (س) = ٥ − |س − ٣|

③ د (س) = |٢ س − ٥| + ٤

④ د (س) = س |س − ٤|

⑤ د (س) = ١/٣ س^٢ |س|

⑥ د (س) = س^٢ |س − ٣|

١١ أوجد نقط القيم العظمى والصغرى المحلية لكل من الدوال الآتية :

① د (س) = { س^٢ + ١ ، س ≥ ٠ ; ٢ س + ١ ، س < ٠ }

② د (س) = { س + ٢ ، س ≥ ٣ ; ٨ − س ، س < ٣ }

③ د (س) = { ٣ س − ٥ ، س ≤ ٢ ; ٣ − س ، س > ٢ }

④ د (س) = { ٣ س^٢ + ٤ ، س ≤ ١ ; ٦ س + ١ ، س > ١ }

⑤ د (س) = { س + ٤ ، س ≥ ٠ ; س^٢ − ٥ س + ٤ ، س < ٠ }

⑥ د (س) = { ٣ − ٤ س − س^٢ ، س ≥ ١ ; ٢ س − ٤ ، س < ١ }

① د (س) = { ٣ س^٢ − ٢ س − ٥ ، س ≥ ١ ; س^٢ − ٥ ، س < ١ }

② د (س) = { س^٢ − ٢ س^٢ ، س ≥ ٠ ; س^٢ − ٢ س ، س < ٠ }

١٢ إذا كان منحنى الدالة ص = أ س^٣ + ب س^٢ + حـ س + ء يمر بالنقطتين (٣ ، ٠) ، (٠ ، ٦) وله نقطة حرجة عند (٢ ، ٢)

فأوجد : أ ، ب ، حـ ، ء وبيّن نوع النقطة الحرجة.

∴ −١ ، ٥ ، −٨ ، ٦ ، نقطة قيمة عظمى محلية.

١٣ إذا كانت النقطتان (−٣ ، ٣) ، (−١ ، −١)

نقطتين حرجتين للدالة ص = أ س^٣ + ب س^٢ + حـ س + ء

فأوجد : أ ، ب ، حـ ، ء وبيّن نوع كل من النقطتين الحرجتين.

∴ ١٠ ، ٦ ، ٩ ، ٣ ، عظمى محلية ، صغرى محلية.

١٤ أوجد قيم أ ، ب ، حـ ، ء إذا علم أن المنحنى الذى معادلته :

ص = أ س^٣ + ب س^٢ + حـ س + ء يمر بنقطة الأصل وله نقطة حرجة عند س = ٣

وقيمة عظمى محلية = د (٢) والمماس له عند س = ١ معادلته هى :

١٢ س − ٣ ص + ١١ = ٠

∴ ٢/٣ ، −٥ ، ١٢ ، ٠

مسائل تقيس مهارات التفكير

١٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الدالة د : د (س) = س^س لها نقطة توقف عند س = ...

(أ) هـ (ب) ١/هـ (جـ) ١ (د) √هـ

② إذا كانت د : ح* ← ح حيث د (س) = س + ١/س

وكانت للدالة د قيمة عظمى محلية عند س = أ وقيمة صغرى محلية عند س = ب

فإن

(أ) د (أ) > د (ب) (ب) د (أ) < د (ب)

(جـ) أ > ب (د) د' (أ) > د' (ب)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٣ الدرس

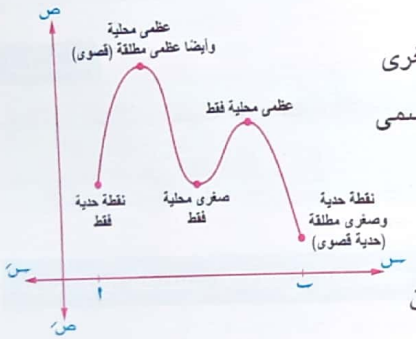
«القيم العظمى والصغرى المطلقة»

تعريف

إذا كانت د دالة معرفة على الفترة المغلقة [أ ، ب] وكانت حـ ∈ [أ ، ب] فإن :

① د (حـ) هى قيمة صغرى مطلقة على الفترة [أ ، ب] عندما يكون د (حـ) ≤ د (س) لكل س ∈ [أ ، ب]

② د (حـ) هى قيمة عظمى مطلقة على الفترة [أ ، ب] عندما يكون د (حـ) ≥ د (س) لكل س ∈ [أ ، ب]



* القيمة العظمى المطلقة لدالة على فترة مغلقة هى أكبر قيمة فى مدى الدالة د والقيمة الصغرى المطلقة هى أصغر قيمة فى مدى الدالة د وتسمى هذه القيم بالقيم القصوى للدالة.

* القيمة القصوى يمكن أن تكون عند أى نقطة داخل الفترة أو على حدود الفترة وعندما تكون عند حدود الفترة تسمى نقطة حدية قصوى.

* القيمة العظمى (أو الصغرى) المحلية لدالة هى قيمة عظمى (أو صغرى) للدالة فى جوار صغير أى فى جزء صغير من فترة تعريف الدالة بينما القيمة العظمى (أو الصغرى) المطلقة لدالة هى قيمة عظمى (أو صغرى) للدالة فى كل فترة تعريف الدالة.

* القيمة العظمى المطلقة لدالة متصلة فى الفترة [أ ، ب] هى إحدى القيم العظمى المحلية للدالة فى هذه الفترة أو إحدى قيم النقط الحدية إلا أنها أكبر هذه القيم جميعًا.

وكذلك القيمة الصغرى المطلقة لدالة متصلة فى الفترة [أ ، ب] هى إحدى القيم الصغرى المحلية للدالة فى هذه الفترة أو إحدى قيم النقط الحدية إلا أنها أصغر هذه القيم جميعًا.

٣ الدرس

③ إذا كانت د : ع ← ع حيث د(س) = ظا س ، س ∈ ع - {(ن + ½) π : ن ∈ ص}
فأى من العبارات الآتية غير صحيح ؟
(أ) تزايدية على الدوام.
(ب) د لها عدد لا نهائى من النقط الحرجة.
(جـ) د ليس لها قيم عظمى أو صغرى محلية.
(د) د لها عدد لا نهائى من القيم العظمى أو الصغرى المحلية.

④ إذا كانت د : ع ← ع حيث
د(س) = (س - ٢٠١٩) (س - ٢٠٢٠)^٢ (س - ٢٠٢١)^٣ (س - ٢٠٢٢)^٤
وكانت ق : ع ← ع^+ حيث د (س) = لو ق (س)
فإن الدالة ق لها قيمة عظمى محلية عند س = ...
(أ) ٢٠١٩ (ب) ٢٠٢٠ (جـ) ٢٠٢١ (د) ٢٠٢٢

١٦ أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية لكل مما يأتى :

① د (س) = | س^٢ - ٨ س + ١٥ |

② د (س) = { س^٢ - ٤ س + ٣ ، س ≥ ٣ ؛ ٢ (س - ٣) ، ٣ > س > ٤ ؛ |س - ٦| ، س ≤ ٤ }

③ د (س) = { ٣ س - ١ ، س > ١ ؛ ٢ ، ١ ≥ س > ٤ ؛ ٦ - س ، س ≤ ٤ }

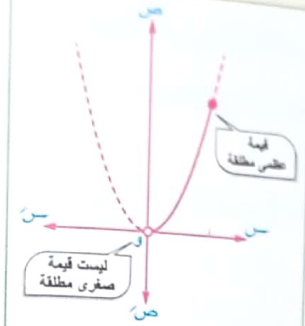
④ د (س) = { ٢ + س^٢ ، س > -١ ؛ ٣ ، -١ ≥ س > ٢ ؛ ٤ س - ٥ ، س ≤ ٢ }

١٧ إذا كانت : د١ (س) = س^٢ - ٤ س + ٣ ، د٢ (س) = ٨ س - ٢ س^٢ - ٩
أثبت أن منحنى الدالتين متماسان وأوجد نقطة التماس ثم أثبت أنها نقطة عظمى محلية للدالة د٢ وهى فى نفس الوقت نقطة صغرى محلية للدالة د١

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

• الأشكال التالية توضح القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة د : د (س) = س٢

حسب المجال المعطى لها :

المجال =]٠ ، ∞[	المجال =]٠ ، ٢[	المجال =]٠ ، ٢[
		

نظريـة

إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [أ ، ب] فإن للدالة د قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على الفترة [أ ، ب]

بحث القيم العظمى والصغرى المطلقة فى فترة مغلقة [أ ، ب]

* إذا كانت : د دالة متصلة على الفترة [أ ، ب]

① نعين النقط الحرجة التى عندها دَ (س) = صفر أو غير موجودة والتى تنتمى للفترة [أ ، ب]

② نوجد قيم الدالة عند النقط الحرجة وقيمتى النقط الحدية د (أ) ، د (ب)

③ نقارن بين القيم السابقة كلها فتكون أكبر هذه القيم هى القيمة العظمى المطلقة فى [أ ، ب]

، أصغر هذه القيم هى القيمة الصغرى المطلقة فى [أ ، ب]

مثال ①

أوجد القيم القصوى للدالة : د : د (س) = ٢ س٤ − س٢ + ١ فى الفترة [−١ ، ١]

الحـل

① نوجد قيم س والتى يوجد عندها نقط حرجة (عندها دَ (س) = ٠ أ، غير موجودة) :

∵ د (س) = ٢ س٤ − س٢ + ١

∴ دَ (س) = ٨ س٣ − ٢ س = ٢ س (٤ س٢ − ١)

= ٢ س (٢ س − ١) (٢ س + ١)

∴ دَ (س) = ٠ عندما س = ٠ أ، س = $\frac{١}{٢}$ أ، س = −$\frac{١}{٢}$

، ∵ جميع النقط ∈ [−١ ، ١] ∴ النقط الحرجة عند س = ٠ ، $\frac{١}{٢}$ ، −$\frac{١}{٢}$

② نحسب قيم الدالة عند النقط الحرجة التى تنتمى للفترة وعند طرفى الفترة [−١ ، ١] :

د (−١) = ٢ − ١ + ١ = ٢ ، د (١) = ٢ − ١ + ١ = ٢

، د (−$\frac{١}{٢}$) = $\frac{١}{٨}$ − $\frac{١}{٤}$ + ١ = $\frac{٧}{٨}$ ، د ($\frac{١}{٢}$) = $\frac{١}{٨}$ − $\frac{١}{٤}$ + ١ = $\frac{٧}{٨}$ ، د (٠) = ١

∴ القيمة العظمى المطلقة = ٢ وتبلغها الدالة عند س = ١ أو −١

، والقيمة الصغرى المطلقة = $\frac{٧}{٨}$ وتبلغها الدالة عند س = $\frac{١}{٢}$ أو −$\frac{١}{٢}$

مثال ②

أوجد القيمة العظمى المطلقة والصغرى المطلقة للدالة :

د : د (س) = ١ + ١٢ س − س٣ فى الفترة [١ ، ٣]

الحـل

∵ د (س) = ١ + ١٢ س − س٣

∴ دَ (س) = ١٢ − ٣ س٢ = ٣ (٤ − س٢) = ٣ (٢ − س) (٢ + س)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

∴ د′(س) = ٠ عندما س = ٢ ، س = −٢

∴ النقط الحرجة عند س = ٢ أو، س = −٢

، ∵ س = −٢ ∉ [١ ، ٣]

∴ نعتبر فقط النقطة الحرجة داخل الفترة المعطاة أى عند س = ٢ ، ونوجد قيم الدالة عندها

وعند طرفى الفترة :

∴ د (٢) = ١ + ٢٤ − ٨ = ١٧ ، د (١) = ١ + ١٢ − ١ = ١٢ ، د (٣) = ١ + ٣٦ − ٢٧ = ١٠

∴ القيمة العظمى المطلقة = ١٧ وتبلغها الدالة عند س = ٢

، القيمة الصغرى المطلقة = ١٠ وتبلغها الدالة عند س = ٣

مثال ٣

أوجد القيم القصوى للدالة د : د (س) = $\frac{\text{س}}{\text{س} - ١}$ فى الفترة [٢ ، ٤]

الحل

∵ د (س) = $\frac{\text{س}}{\text{س} - ١}$ ، س ≠ ١ ∴ د′(س) = $\frac{(\text{س} - ١) - \text{س}}{(\text{س} - ١)^{٢}} = \frac{-١}{(\text{س} - ١)^{٢}}$

، ∵ د′(س) < ٠ ومعرفة لجميع قيم س ∈ [٢ ، ٤]

∴ لا توجد نقط حرجة لهذه الدالة فى هذه الفترة

لذلك نكتفى بإيجاد قيمتى الدالة عند طرفى الفترة :

∴ د (٢) = $\frac{٢}{٢ - ١}$ = ٢ ، د (٤) = $\frac{٤}{٤ - ١} = \frac{٤}{٣}$

∴ القيمة العظمى المطلقة = ٢ وتبلغها الدالة عند س = ٢

، القيمة الصغرى المطلقة = $١\frac{١}{٣}$ وتبلغها الدالة عند س = ٤

مثال ٤

أوجد القيمتين العظمى والصغرى المطلقة للدالة : د (س) = $\frac{\sqrt[٣]{\text{س} - ٢}}{\text{س}}$ فى الفترة [١ ، ١٠]

الحل

∵ د (س) = $\frac{(\text{س} - ٢)^{\frac{١}{٣}}}{\text{س}}$ ∴ د′(س) = $\frac{\text{س} \times \frac{١}{٣}(\text{س} - ٢)^{-\frac{٢}{٣}} - (\text{س} - ٢)^{\frac{١}{٣}} \times ١}{\text{س}^{٢}}$

∴ د′(س) = $\frac{\frac{١}{٣}\text{س}(\text{س} - ٢)^{-\frac{٢}{٣}} - (\text{س} - ٢)^{\frac{١}{٣}} \times ١}{\text{س}^{٢}}$

$= \frac{\frac{١}{٣}(\text{س} - ٢)^{-\frac{٢}{٣}} \times [\text{س} - ٣(\text{س} - ٢)]}{\text{س}^{٢}} = \frac{\text{س} - ٣\text{س} + ٦}{٣\text{س}^{٢}(\text{س} - ٢)^{\frac{٢}{٣}}}$

∴ د′(س) = $\frac{٦ - ٢\text{س}}{٣\text{س}^{٢}(\text{س} - ٢)^{\frac{٢}{٣}}}$

∴ د′(س) = ٠ عندما ٦ − ٢ س = ٠ أى عندما س = ٣

∴ س = ٣ ∋ [١ ، ١٠] عندها نقطة حرجة للدالة

، ∵ د′(س) غير موجودة عندما س = ٠ أو، س = ٢

، د (س) غير معرفة عند س = ٠

∴ س = ٢ ∋ [١ ، ١٠] عندها نقطة حرجة للدالة

لذلك نبحث قيم الدالة عند النقطتين الحرجتين س = ٣ ، س = ٢

وعند طرفى الفترة س = ١ ، س = ١٠ :

∴ د (٣) = $\frac{\sqrt[٣]{٣ - ٢}}{٣} = \frac{١}{٣}$ ، د (٢) = $\frac{\sqrt[٣]{٢ - ٢}}{٢}$ = صفر

، د (١) = $\frac{\sqrt[٣]{١ - ٢}}{١} = -١$ ، د (١٠) = $\frac{\sqrt[٣]{١٠ - ٢}}{١٠} = \frac{٢}{١٠} = \frac{١}{٥}$

∴ القيمة العظمى المطلقة = $\frac{١}{٣}$ وتبلغها الدالة عند س = ٣

، القيمة الصغرى المطلقة = −١ وتبلغها الدالة عند س = ١

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

3

مثال ٥

احسب القيم القصوى للدالة د : د (س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٣ س^{٢} & ، س \geq ٠ \\ س^{٢} - ٢ س & ، س < ٠ \end{cases}$ فى الفترة [-٣ ، ٢]

الحل

• نبحث الاشتقاق عند س = ٠ :

د' (٠$^{+}$) = $\lim_{هـ \to ٠^{+}} \frac{د (٠ + هـ) - د (٠)}{هـ}$ = $\lim_{هـ \to ٠^{+}} \frac{(٠ + هـ)^{٢} - ٢ (٠ + هـ) - ٠}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to ٠^{+}}$ (هـ - ٢) = -٢

، د' (٠$^{-}$) = $\lim_{هـ \to ٠^{-}} \frac{د (٠ + هـ) - د (٠)}{هـ}$ = $\lim_{س \to ٠^{-}} \frac{(٠ + هـ)^{٣} + ٣ (٠ + هـ^{٢}) - ٠}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to ٠^{-}}$ (هـ^{٢} + ٣ هـ) = صفر

∴ د' (٠) غير موجودة ∴ عند س = ٠ يوجد نقطة حرجة للدالة

∴ د' (س) = $\begin{cases} ٣ س^{٢} + ٦ س & ، س < ٠ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ٠ \\ ٢ س - ٢ & ، س > ٠ \end{cases}$

، عند س > ٠ :

∴ د' (س) = ٠ عندما ٣ س^{٢} + ٦ س = ٠

أى عندما ٣ س (س + ٢) = ٠ أى عندما س = ٠ (مرفوض) أ، س = -٢

، عند س > ٠ :

∴ ٢ س - ٢ = ٠ ∴ ٢ (س - ١) = ٠

∴ س = ١

∴ النقط الحرجة للدالة هى عند س = -٢ أ، ٠ أ، ١

∴ نوجد قيم الدالة عندها وكذلك عند طرفى الفترة :

∴ د (-٢) = (-٢)^{٣} + ٣ (-٢)^{٢} = -٨ + ١٢ = ٤

، د (٠) = ٠ ، د (١) = (١)^{٢} - ٢ × ١ = ١ - ٢ = -١

، د (-٣) = (-٣)^{٣} + ٣ (-٣)^{٢} = -٢٧ + ٢٧ = ٠

، د (٣) = (٣)^{٢} - ٢ × ٣ = ٩ - ٦ = ٣

∴ القيمة العظمى المطلقة = ٤ وتبلغها الدالة عند س = -٢

، القيمة الصغرى المطلقة = -١ وتبلغها الدالة عند س = ١

مثال ٦

أوجد القيم القصوى للدالة د : د (س) = س^{٢} هـ^{س} فى الفترة [-٣ ، ١]

الحل

∵ د (س) = س^{٢} هـ^{س}

∴ د' (س) = س^{٢} هـ^{س} + هـ^{س} × ٢ س = س هـ^{س} (س + ٢)

، ∵ د' (س) = ٠ عندما س = ٠ أ، س = -٢

، ∵ {٠ ، -٢} ⊂ [-٣ ، ١]

∴ توجد نقط حرجة عند س = ٠ ، س = -٢

* نحسب قيم الدالة عند النقط الحرجة وعند طرفى الفترة [-٣ ، ١]

، ∵ د (٠) = صفر ، د (-٢) = (-٢)^{٢} هـ$^{-٢}$ ≃ ٠,٥٤

، د (-٣) = ٠,٤٥ ، د (١) = هـ ≃ ٢,٧

∴ القيمة العظمى المطلقة = هـ وتبلغها الدالة عند س = ١

، القيمة الصغرى المطلقة = صفر وتبلغها الدالة عند س = صفر

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٦

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة د : د (س) = $\sqrt{٢٥ - س^٢}$

الحل

∵ د (س) = $\sqrt{٢٥ - س^٢}$

∴ مجال الدالة هو [−٥ ، ٥]

، ∵ د′ (س) = $\frac{-٢س}{٢\sqrt{٢٥ - س^٢}} = \frac{-س}{\sqrt{٢٥ - س^٢}}$

وبوضع د′ (س) = ٠ ∴ س = ٠

، د′ (س) غير موجودة عند س = −٥ ، س = ٥ (نقط حدية)

∴ توجد نقطة حرجة عند س = ٠ وتوجد نقط حرجة حدية عند س = ٥ ، س = −٥

* نحسب قيم الدالة عند النقط الحرجة وعند طرفى الفترة [−٥ ، ٥]

∴ د (٠) = ٥ ، د (−٥) = ٠ ، د (٥) = ٠

∴ القيمة العظمى المطلقة للدالة = ٥ وتبلغها عند س = صفر

، القيمة الصغرى المطلقة للدالة = صفر وتبلغها عند س = ± ٥

لاحظ أن

عند س = ٥ ، س = −٥ يوجد نقط حرجة حدية وهى ليست قيم عظمى أو صغرى محلية ولكنها نقط قيمة صغرى مطلقة.

ملاحظة

إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة [أ ، ب] وكانت :

① د′ (س) > ٠

أى أن : الدالة تزايدية على نفس الفترة. فإن
* القيمة الصغرى المطلقة = د (أ)
* القيمة العظمى المطلقة = د (ب)

② د′ (س) < ٠

أى أن : الدالة تناقصية على نفس الفترة. فإن
* القيمة الصغرى المطلقة = د (ب)
* القيمة العظمى المطلقة = د (أ)

على القيم القصوى لدالة على فترة مغلقة
القيم العظمى والصغرى المطلقة.

اختبر تفاعلك

• فهم • تطبيق • مستويات عليا من أسئلة الكتاب المدرسى

١ أوجد القيم القصوى لكل من الدوال الآتية فى الفترة المذكورة أمام كل منها :

① د (س) = س^٢ − ٦ س + ١٢ [−١ ، ٥]

② د (س) = ٣ − ٥ س − س^٢ [−٤ ، ٣]

③ ص = س^٢ − ٩ [٠ ، ٢]

④ د (س) = س^٤ + ٢ [−١ ، ٢]

⑤ (دور أول ٢٠١٨) د (س) = س (س^٢ − ١٢) [−١ ، ٤]

⑥ (دور ثان ٢٠٠٨) د (س) = س^٣ − ٣ س^٢ [١ ، ٤]

⑦ (دور ثان ٢٠٠٥) د (س) = س^٣ − ٩ س^٢ + ٢٤ س − ١ [٠ ، ٥]

⑧ (دور ثان ٢٠٠٠) د (س) = س^٣ − ٩ س^٢ + ١٥ س [−٢ ، ٤]

⑨ (دور أول ٢٠٠٣) د (س) = س^٣ + س^٢ − ٥ س − ٥ [−$\sqrt{٥}$ ، ٠]

⑩ ص = ٢ س^٣ + ٣ س^٢ − ١٢ س + ١ [−١ ، ٥]

⑪ ص = ٢ س^٣ + ٣ س^٢ + ١ [−١٠ ، ١٢]

⑫ د (س) = (س − ١) (س − ٢)^٢ [٠ ، ٥]

⑬ د (س) = ٢ س − ٣ س$^{\frac{٢}{٣}}$ [−١ ، ٣]

⑭ (دور أول ٢٠١٧) د (س) = ٣ س^٤ − ٤ س^٣ [−١ ، ٢]

⑮ د (س) = ٢ س^٤ − س^٢ + ١ [−١ ، ١]

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة [أ ، ب] ، وكانت د' (س) < ٠ على نفس الفترة فإن قيمة د (س) العظمى المطلقة على هذه الفترة = ...

(أ) د (أ) (ب) د (ب) (جـ) أ (د) ب

(٢) إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة [أ ، ب] ، وكانت د' (س) > ٠ على نفس الفترة فإن قيمة د (س) الصغرى المطلقة على هذه الفترة = ...

(أ) د (أ) (ب) د (ب) (جـ) أ (د) ب

(٣) (دور ثان ٢٠١٩) إذا كان للدالة د : د (س) = ٢ أ س^{٢} + ب س + ٣ قيمة قصوى محلية عند (١ ، ٢) فإن : أ + ب = ...

(أ) −١ (ب) $\frac{٥}{٢}$ (جـ) $\frac{-٣}{٢}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

(٤) إذا كانت س ∈ [٠ ، π] ، فإن الدالة د : د (س) = س جا س + جتا س لها قيمة صغرى مطلقة عند س = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) π (د) $\frac{١}{٢}$ π

(٥) القيمة العظمى للدالة د : د (س) = ٣ − جا س هى حيث س ∈ ح

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٦) إذا كانت د : ح ⟵ ح حيث د (س) = س^{٣} + ٣ س^{٢} − ٩ س وكانت أ ، ب هما القيمتان الصغرى المطلقة والعظمى المطلقة للدالة د فى الفترة [−٢ ، ٢] فإن : ب − أ = ...

(أ) ١٧ (ب) −١٧ (جـ) ٢٧ (د) −٢٧

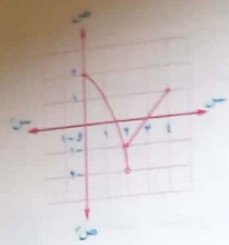
(٧) إذا كانت د : د (س) = جا س حيث س ∈ [$\frac{-\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi ٥}{٢}$] لها قيمة عظمى مطلقة ، فعدد مرات الوصول لها

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٨) إذا كانت الدالة د : [−٣ ، −١] ⟵ ح حيث د (س) = س + $\frac{أ}{س}$ وكانت القيمة العظمى المطلقة للدالة د تساوى −٢ والدالة تزايدية فى الفترة]−٣ ، −١[فإن أ = ...

(أ) −٢ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٢

(٩) الدالة فى الشكل المقابل



(أ) لها قيمة صغرى مطلقة وقيمة عظمى مطلقة.

(ب) لها قيمة صغرى مطلقة وليس لها قيمة عظمى مطلقة.

(جـ) لها قيمة عظمى مطلقة وليس لها قيمة صغرى مطلقة.

(د) ليس لها قيمة عظمى أو صغرى مطلقة.

٣ إذا كانت د' (س) = أ س + ب حيث أ < ٠ ، ابحث وجود قيمة قصوى للدالة د مبينًا نوعها إن وجدت.

٤ أوجد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة لكل من الدوال الآتية فى الفترة المذكورة أمام كل منها :

(١) ص = $\frac{س}{س - ١}$ [٢ ، ٤]

(٢) (دور أول ٢٠١٢) د (س) = $\frac{س^{٢} + ٩}{س}$ [١ ، ٦]

(٣) (دور ثان ٢٠١٨) د (س) = $\frac{٤ س}{س^{٢} + ١}$ [−١ ، ٣]

(٤) د (س) = س + $\frac{١}{س + ٢}$ [٠ ، ٣]

(٥) (دور أول ٢٠٠٤) د (س) = س + $\frac{١}{س}$ [$\frac{١}{٢}$ ، ٣]

(٦) د (س) = $\frac{س^{٢} + س + ١}{س^{٢} - س + ١}$ [−٢ ، ٢]

٥ أوجد القيم القصوى لكل من الدوال الآتية فى الفترة المذكورة أمام كل منها :

(١) د (س) = جا س [$\frac{\pi ٥}{٦}$ ، $\frac{\pi ١١}{٦}$]

(٢) د (س) = جا س + جتا س [٠ ، ٢π]

(٣) د (س) = ٢ جا س + جتا ٢ س [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

(٤) د (س) = س هـ$^{-س}$ [٠ ، ٢]

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الوحدة 3

• تذكر • تدريب • معلومات علمية

(٥) [] د (س) = ١٠ س هـ^{-س} ، [٠ ، ٤]

(٦) د (س) = س هـ^{س} ، [-٣ ، ١]

(٧) د (س) = س^{٢} هـ^{-س} ، [-١ ، ٣]

٦ أوجد القيم القصوى لكل من الدوال الآتية فى الفترة المذكورة أمام كل منها :

(١) [] د (س) = $\sqrt{س - ١}$ ، [٢ ، ٥]

(٢) د (س) = $\sqrt{س}$ ، [-٨ ، ٨]

(٣) د (س) = $\sqrt{١٦ - س^{٢}}$ ، [-٤ ، ٣]

(٤) د (س) = $\sqrt{(س - ١)^{٢}}$ ، [٠ ، ٩]

(٥) د (س) = س $\sqrt{١ - س}$ ، [-١ ، ١]

(٦) د (س) = س - $\sqrt{س}$ ، [٠ ، ٩]

(٧) د (س) = $\sqrt{٨ س - س^{٢}}$ ، [٠ ، ٨]

(٨) د (س) = $\sqrt[٣]{س^{٢} - ٤}$ ، [-١ ، ٤]

(٩) د (س) = $\frac{س}{\sqrt{س - ١}}$ ، [$\frac{٥}{٤}$ ، ٥]

(١٠) د (س) = $\frac{\sqrt[٣]{س - ٢}}{س}$ ، [١ ، ٤]

٧ أوجد القيم القصوى لكل من الدوال الآتية فى الفترة المذكورة أمام كل منها :

(١) د (س) = $\begin{cases} ٢ س + ٣ & ، س < ١ \\ س^{٢} + ٤ & ، س \leq ١ \end{cases}$ ، [-٢ ، ٢]

(٢) د (س) = $\begin{cases} (س + ٣)^{٢} & ، س < ٠ \\ (س - ٣)^{٢} & ، س \leq ٠ \end{cases}$ ، [-٢ ، ٢]

(٣) د (س) = $\begin{cases} س^{٢} + س - ٢ & ، س \geq ٢ \\ ٥ س - ٦ & ، س < ٢ \end{cases}$ ، [-١ ، ٣]

(٤) [دور ثان ٢٠٠٢] د (س) = $\begin{cases} ٥ - س^{٢} & ، س \geq ٢ \\ س^{٢} - ٣ & ، س < ٢ \end{cases}$ ، [-٣ ، ٣]

(٥) [] د (س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٣ س^{٢} & ، س \geq ٠ \\ س^{٢} - ٢ س & ، س < ٠ \end{cases}$ ، [-٣ ، ٣]

(٦) [دور ثان ٢٠١٢] د (س) = $\begin{cases} ٣ س^{٢} + ١٢ س - ١ & ، -١ \leq س \leq ٢ \\ ٣٧ - س & ، ٢ < س \leq ٣ \end{cases}$ ، [-١ ، ٣]

(٧) د (س) = | س | + ٢ ، [-١ ، ٢]

(٨) د (س) = ٣ - | س - ١ | ، [٠ ، ٣]

(٩) [دور أول ٢٠٠٩] د (س) = (س - ٤) | س | ، [١ ، ٤]

(١٠) [دور ثان ٢٠١٣] د (س) = س | س - ٢ | ، [$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$]

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

4 التحدب لأعلى والتحدب لأسفل ونقط الانقلاب

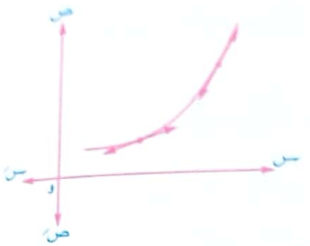
الدرس

* يقال لجزء متصل من منحنى إنه :

① محدب إلى أعلى «مقعر لأسفل» إذا كان المنحنى يقع أسفل جميع مماساته.



② محدب إلى أسفل «مقعر لأعلى» إذا كان المنحنى يقع أعلى جميع مماساته.



تعريف

* إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق على الفترة]أ ، ب[يكون منحنى الدالة د

① محدبًا لأسفل ، إذا كانت د' متزايدة على]أ ، ب[

② محدبًا لأعلى ، إذا كانت د' متناقصة على]أ ، ب[

مع ملاحظة أن : إذا كانت د' متزايدة فإن مشتقتها تكون موجبة أى د'' (س) > ٠

وإذا كانت د' متناقصة فإن مشتقتها تكون سالبة أى د'' (س) < ٠

وبالتالى نحدد فترات التحدب لأعلى ولأسفل لمنحنى الدالة د من خلال دراسة تزايد وتناقص المشتقة الأولى د' ومن ذلك يمكن استنتاج النظرية التالية :

نظرية «اختبار المشتقة الثانية لتحدب المنحنيات»

* إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق مرتين على الفترة]أ ، ب[

① إذا كان : د'' (س) > ٠ لجميع قيم س ∈]أ ، ب[

فإن منحنى د يكون محدبًا لأسفل على الفترة]أ ، ب[

② إذا كان : د'' (س) < ٠ لجميع قيم س ∈]أ ، ب[

فإن منحنى د يكون محدبًا لأعلى على الفترة]أ ، ب[

تعريف نقطة الانقلاب

إذا كانت د دالة متصلة على الفترة المفتوحة]أ ، ب[، حـ ∈]أ ، ب[وكان لمنحنى الدالة مماس عند النقطة (حـ ، د (حـ)) فإن هذه النقطة تسمى نقطة انقلاب لمنحنى الدالة د إذا تغير تحدب منحنى الدالة عند هذه النقطة من محدب لأسفل إلى محدب لأعلى أو من محدب لأعلى إلى محدب لأسفل.

من التعريف السابق نستنتج أن :

النقطة (حـ ، د (حـ)) تكون نقطة انقلاب لمنحنى الدالة د إذا تحقق ما يلى :

① منحنى الدالة د متصل عند حـ

② يمكن رسم مماس وحيد لمنحنى الدالة د عند حـ

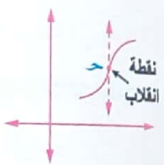
أى أن : [د' (حـ) ∈ ح أى المماس مائل أو أفقى

أ، د' (حـ) = ± ∞ (انعدام مقام د' عند حـ) أى المماس رأسى]

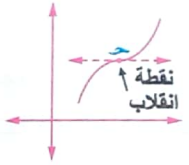
③ تتغير إشارة د' (س) قبل وبعد النقطة حـ

أى أن : [د' (حـ) = صفر أ، غير موجودة]

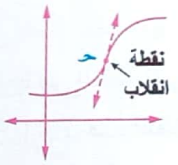
والأشكال التالية توضح ذلك :



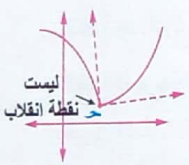
شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)



شكل (٤)

* توجد نقط انقلاب فى شكل (١) ، (٢) ، (٣) وذلك لأنها منحنيات لدوال متصلة لها مماس عند حـ ويتغير اتجاه تحدب المنحنى قبل وبعد النقطة حـ

* لا توجد نقطة انقلاب فى شكل (٤) وذلك لعدم وجود مماس وحيد عند النقطة حـ

تأكيد هام

نقطة الانقلاب عند س = أ لا بد وأن تنتمى لمجال الدالة د **أى أن :** د (أ) تكون معرفة.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ملاحظات

① نقط الانقلاب هى النقط التى تفصل بين مناطق التحدب لأعلى ومناطق التحدب لأسفل.

② المماس عند نقطة الانقلاب يقطع منحنى الدالة

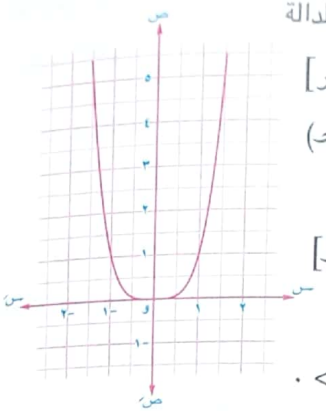
③ [إذا كانت : (حـ ، د (حـ)) هى نقطة انقلاب لمنحنى الدالة

فإن : دً (حـ) فى حالة وجودها تكون مساوية للصفر]

ولكن العكس غير صحيح ذلك لأنه : [إذا كان : دً (حـ)

موجودة وتساوى الصفر فإن النقطة لا تكون نقطة

انقلاب إلا إذا تغيرت إشارة دً (س) قبل وبعد النقطة حـ]



فمثلًا : د (س) = س^{٤}

نجد أن : دَ (س) = ٤ س^{٣} ، دً (س) = ١٢ س^{٢} > ٠

لكل س ∈ ح – {٠} ∴ المنحنى محدب لأسفل دائمًا

∴ لا يوجد للمنحنى أى نقطة انقلاب على الرغم من أن دً (٠) = صفر

④ النقطة الحرجة للدالة د هى النقطة التى عندها دَ (س) = صفر أو غير موجودة

وإذا تغيرت إشارة دَ (س) حول هذه النقطة فإنها تكون عظمى أو صغرى محلية

كذلك نجد أن :

النقطة الحرجة للدالة دَ هى النقطة التى عندها دً (س) = صفر أو غير موجودة وإذا تغيرت إشارة دً (س) حول هذه النقطة فإنها تكون انقلاب للدالة د.

⑤ نقط الانقلاب للدالة د القابلة للاشتقاق مرتين هى نقط عظمى أو صغرى محلية للدالة دَ

⑥ إذا كانت النقطة (حـ ، هـ) ∈ لمنحنى دالة قابلة للاشتقاق مرتين وكانت :

(أ) (حـ ، هـ) نقطة انقلاب فإن : دً (حـ) = صفر ، د (حـ) = هـ

(ب) (حـ ، هـ) نقطة عظمى محلية أو صغرى محلية أو حرجة فإن :

دَ (حـ) = صفر ، د (حـ) = هـ

⑦ الدوال كثيرات الحدود تكون قابلة للاشتقاق على جميع نقاط مجالها وبالتالى يكون لها مماس عند أى نقطة عليها.

خطوات بحث فترات

① نوجد دً (س) ثم نوجد قيم س التى تجعل دً (س) = صفر أو غير موجودة.

② نعين إشارة دً (س) لتعيين فترات التحدب لأعلى حيث [دً (س) > ٠] وفترات التحدب لأسفل حيث [دً (س) < ٠]

③ نحدد نقط الانقلاب من النقط التى حصلنا عليها حيث تتغير إشارة دً (س) على يمين ويسار كل نقطة من هذه النقط.

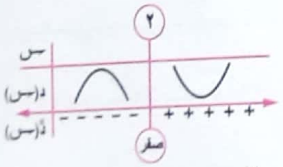
وإذا لم تتغير إشارة دً (س) حول أى من هذه النقط فإنها لا تكون نقطة انقلاب.

مثال ١

أوجد مناطق التحدب لأعلى ومناطق التحدب لأسفل ونقط الانقلاب لمنحنى الدالة د :

د (س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} – ٢ س^{٢} + ٤ س – ٥

الحل



∵ د (س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} – ٢ س^{٢} + ٤ س – ٥

∴ دَ (س) = س^{٢} – ٤ س + ٤ ، دً (س) = ٢ س – ٤

نضع دً (س) = ٠ ∴ ٢ س – ٤ = ٠ ∴ س = ٢

∴ المنحنى محدب لأعلى فى]– ∞ ، ٢[، المنحنى محدب لأسفل فى]٢ ، ∞[

، ∵ إشارة دً (س) تتغير قبل وبعد س = ٢ ∴ توجد نقطة انقلاب عند س = ٢

، ∵ د (٢) = $\frac{-٧}{٣}$ ∴ نقطة الانقلاب هى : (٢ ، $\frac{-٧}{٣}$)

مثال ٢

ادرس تحدب منحنى الدالة د : د (س) = س^{٢} – ٢ وأوجد نقط الانقلاب (إن وجدت)

الحل

∵ د (س) = س^{٢} – ٢ ∴ دَ (س) = ٢ س ، دً (س) = ٢

∴ دً (س) > ٠ لجميع قيم س ∈ ح ∴ منحنى الدالة محدب لأسفل دائمًا.

، ∵ المنحنى لا يغير تحدبه عند أى نقطة. ∴ لا توجد نقط انقلاب لهذا المنحنى.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٢

ادرس تحدب منحنى الدالة د : د (س) = س^{٤} + س^{٣} − ٣ س^{٢} + ١

وأوجد نقط الانقلاب.

الحل

∵ د (س) = س^{٤} + س^{٣} − ٣ س^{٢} + ١

∴ د′ (س) = ٤ س^{٣} + ٣ س^{٢} − ٦ س

، د″ (س) = ١٢ س^{٢} + ٦ س − ٦

نضع د′ (س) = ٠

∴ ١٢ س^{٢} + ٦ س − ٦ = ٠

∴ ٢ س^{٢} + س − ١ = ٠

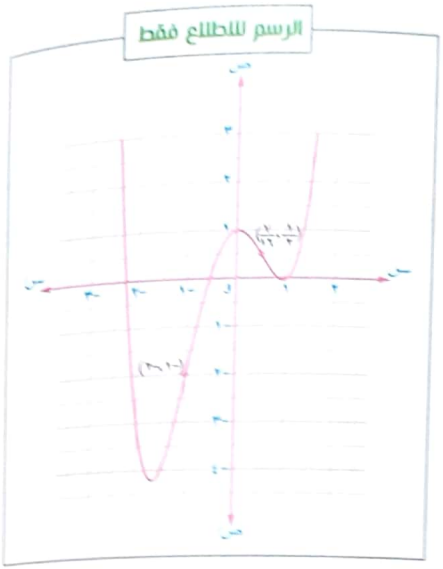
∴ (٢ س − ١) (س + ١) = ٠

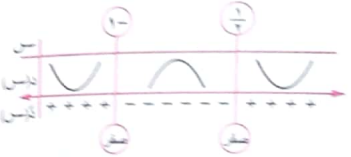
∴ س = $\frac{١}{٢}$ أ ، س = −١

∴ المنحنى محدب لأعلى فى]−١ ، $\frac{١}{٢}$[

، المنحنى محدب لأسفل فى]−∞ ، −١[

،]$\frac{١}{٢}$ ، ∞[





∵ إشارة د′ (س) تتغير قبل وبعد كل من س = −١ ، س = $\frac{١}{٢}$

∴ توجد نقطتان انقلاب عند س = −١ ، س = $\frac{١}{٢}$

، د (−١) = −٢ ، د ($\frac{١}{٢}$) = $\frac{٧}{١٦}$

∴ نقط الانقلاب هى : (−١ ، −٢) ، ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٧}{١٦}$)

مثال ٣

ادرس تحدب منحنى الدالة د : د (س) = $\sqrt[٣]{س - ٣}$ وأوجد نقط الانقلاب.

الحل

∵ د (س) = $\sqrt[٣]{س - ٣}$ = (س − ٣)$^{\frac{١}{٣}}$

∴ د′ (س) = $\frac{١}{٣}$ (س − ٣)$^{-\frac{٢}{٣}}$

، د″ (س) = $\frac{-٢}{٩}$ (س − ٣)$^{-\frac{٥}{٣}}$

= $\frac{-٢}{٩} \times \frac{١}{\sqrt[٣]{(س - ٣)^{٥}}}$

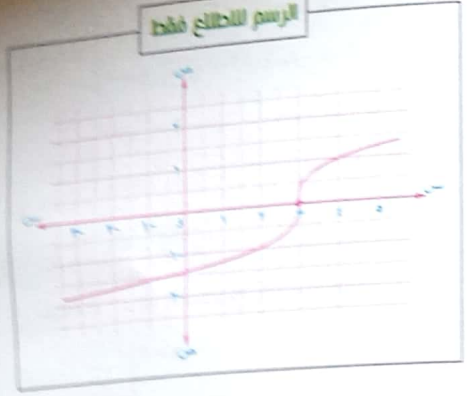
د″ (س) غير معرفة عندما

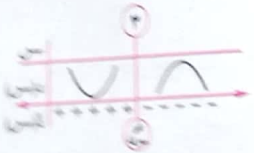
س − ٣ = ٠

∴ س = ٣

∴ المنحنى محدب لأعلى فى]٣ ، ∞[

، المنحنى محدب لأسفل فى]−∞ ، ٣[





∵ إشارة د′ (س) تتغير قبل وبعد س = ٣

∴ توجد نقطة انقلاب عند س = ٣

، د (٣) = صفر

∴ نقطة الانقلاب هى : (٣ ، ٠)

لاحظ أن

ميل المماس للمنحنى المتصل عند س = ٣ يكون غير معرف

أى أن : يوجد مماس رأسى عند س = ٣

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٥

ادرس قابلية اشتقاق الدالة د : د (س) = س | س − ٢ |

وأوجد نقطة الانقلاب (إن وجدت)

الحل

$$د(س) = \begin{cases} س(س-٢) & ، س \leq ٢ \\ -س(س-٢) & ، س > ٢ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} س^{٢} - ٢س & ، س \leq ٢ \\ -س^{٢} + ٢س & ، س > ٢ \end{cases}$$

∴ د′ (٢⁺) ≠ د′ (٢⁻)

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢

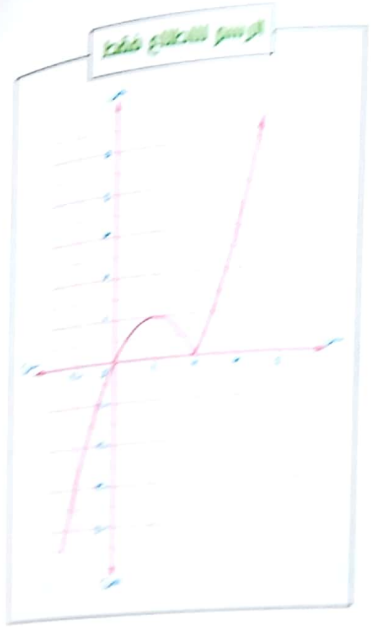
$$∴ د′(س) = \begin{cases} ٢س - ٢ & ، س < ٢ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ٢ \\ -٢س + ٢ & ، س > ٢ \end{cases}$$

$$د″(س) = \begin{cases} ٢ & ، س < ٢ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ٢ \\ -٢ & ، س > ٢ \end{cases}$$

∴ المنحنى محدب لأعلى في]−∞ ، ٢[

، المنحنى محدب لأسفل في]٢ ، ∞[

الرسم للاستئناس فقط





ملحوظة

على الرغم من أن إشارة د″ (س) تتغير قبل وبعد س = ٢

إلا أنه لا توجد نقطة انقلاب عند س = ٢

وذلك لأن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢

لأن [د′ (٢⁺) ≠ د′ (٢⁻)]

أي لا نستطيع رسم مماس للدالة عند س = ٢

مثال ٦

عين الثوابت أ ، ب ، جـ ، ء بحيث يحقق منحنى الدالة د :

د (س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ء الشروط الآتية :

(١) يمر بالنقطة (١ ، ٢)

(٢) له نقطة انقلاب عند (٠ ، ١)

(٣) المماس له عند نقطة الانقلاب يكون أفقيًا.

الحل

∵ د (س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ء

∴ د′ (س) = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س + جـ

∴ المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٢)

∴ د′′ (س) = ٦ أ س + ٢ ب

∴ المنحنى له نقطة انقلاب عند (٠ ، ١)

∴ د′′ (٠) = ١

∴ ٨ أ + ٤ ب + ٢ جـ + ء = ١

∴ د′ (٠) = صفر

∴ ١٢ أ + ٢ ب = ٠

∴ ٦ أ + ب = صفر

∴ المماس عند (٠ ، ١) أفقي

∴ د′ (٠) = صفر

∴ ١٢ أ + ٤ ب + جـ = ٠

بجمع (١) ، (٤) وطرح (٢) ∴ ٥ أ + ب = ١

بطرح (٥) من (٣) ∴ أ = −١

، من (٥) ∴ ب = ٦

ومن (١) ∴ ٨ (−١) + ٤ (٦) + جـ = ٠ ∴ جـ = −١٢

، من (٢) ∴ ء = ٩

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمارين 12

على التحدب لأعلى والتحدب لأسفل ونقط الانقلاب

لختبار تفاعلي

فهم • تطبيق • مستويات عليا — من أسئلة الكتاب المدرسي

١ عين فترات التحدب لأعلى وفترات التحدب لأسفل ونقط الانقلاب (إن وجدت) :

١) د (س) = س^{٢} − ٤ س + ٢

٢) د (س) = (س − ١)^{٢}

٣) د (س) = ٤ − ٦ س − ٣ س^{٢}

٤) (دور ثان ٢٠١٠) ص = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − ٩ س + ٢

٥) (دور أول ٢٠٠٩) د (س) = ١ + ٦ س − ٢ س^{٣}

٦) (دور أول ٢٠٠١) ص = س (س^{٢} − ١)

٧) (دور أول ٢٠٠٦) د (س) = س^{٣} − س^{٢}

٨) د (س) = س^{٣} − ٦ س^{٢} + ٩

٩) د (س) = ٢ س^{٣} − ٣ س^{٢} − ١٢ س + ١

١٠) د (س) = ١٥ س + ٦ س^{٢} − س^{٣}

١١) د (س) = (س − ٢)^{٣} − ١

١٢) د (س) = (س − ١)^{٤} + ٣

١٣) د (س) = (س − ١)^{٢} (س − ٢)

١٤) د (س) = (س^{٢} − ٤)^{٢}

١٥) د (س) = ٤ − س − ٣ س^{٤}

١٦) (دور ثان ٢٠١٥) ص = س^{٤} − ٤ س^{٣} + ٦ س^{٢} + ٥

١٧) د (س) = س^{٤} − ٢٤ س^{٢} + ٤

١٨) (دور ثان ٢٠٠٧) ص = س^{٤} − ٦ س^{٢}

١٩) د (س) = ٦ س^{٣} − س^{٤}

٢٠) د (س) = س^{٤} − ٨ س^{٢} + ١٦

٢١) (دور ثان ٢٠٠٢) ص = − $\frac{١}{٤}$ س^{٤} + س^{٢}

٢٢) د (س) = −٣ س^{٥} + ٥ س^{٣}

١ عين فترات التحدب لأعلى وفترات التحدب لأسفل ونقط الانقلاب (إن وجدت) :

١) د (س) = س^{٢} − $\frac{٨}{س}$

٢) (دور أول ٢٠١٢) د (س) = $\frac{س^{٢} + ٩}{س}$

٣) د (س) = $\frac{٦}{س^{٢} + ٣}$

٤) د (س) = $\frac{س^{٢} - ١}{٢ س - ١}$

٥) (دور ثان ٢٠١٢) د (س) = $\frac{س^{٢} + ١}{س^{٢} + ٣}$

٦) د (س) = $\sqrt[٣]{س}$

٧) د (س) = س$^{\frac{٢}{٣}}$

٨) د (س) = $\sqrt[٣]{(س - ٤)^{٢}}$

٩) د (س) = $\sqrt[٥]{(س - ٣)^{٢}}$

١٠) د (س) = |س^{٣} − ١|

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١) إذا كان منحنى الدالة د محدب لأسفل فى فترة ما فإن فى هذه الفترة.

(أ) دَ (س) > ٠ (ب) دَ (س) < ٠ (جـ) دً (س) > ٠ (د) دً (س) < ٠

٢) منحنى الدالة د يكون محدبًا لأعلى فى فترة معينة إذا كان فى هذه الفترة.

(أ) دَ (س) > ٠ (ب) دَ (س) < ٠ (جـ) دً (س) > ٠ (د) دً (س) < ٠

٣) للدالة د : د (س) = س^{٣} − ٣ س − ١ نقطة انقلاب هى

(أ) (٠ ، ١) (ب) (٠ ، −١) (جـ) (١ ، ٠) (د) (−١ ، ٠)

٤) إذا كان للدالة د : د (س) = ﻙ س^{٣} + ٩ س^{٢} نقطة انقلاب عند س = −١

فإن : ﻙ = ...

(أ) −٣ (ب) ٣ (جـ) −٩ (د) ٩

٥) (دور ثان ٢٠١٨) إذا كان للمنحنى : ص = (٢ س − ﻑ)^{٣} + ٤ نقطة انقلاب عند س = ٥

فإن : ﻑ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ١٠

٦) منحنى الدالة د محدبًا لأسفل فى ح إذا كان د (س) تساوى

(أ) ٣ − س^{٢} (ب) ٣ − س^{٣} (جـ) ٣ − س^{٤} (د) ٣ + س^{٤}

٧) منحنى الدالة د حيث د (س) = س^{٣} − ٣ س^{٢} + ٢ محدب لأعلى

عندما س ∈

(أ)]−∞ ، ٠[(ب)]−∞ ، ١[(جـ)]١ ، ٣[(د)]١ ، ∞[

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

3

(٨) النقط التى تفصل بين مناطق التحدب لأعلى ولأسفل تسمى نقط

(أ) حرجة. (ب) صغرى محلية. (جـ) عظمى محلية. (د) انقلاب.

(٩) إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س - ٢}$ وكان للدالة نقطة انقلاب عند (٢ ، ٠)

فإن : د$'$ (٢) = ...

(أ) غير معرفة. (ب) صفر (جـ) ١ (د) $\frac{-٢}{٩}$

(١٠) إذا كانت الدالة د : د (س) = $س^{٤}$ فإن النقطة (٠ ، ٠) تكون

(أ) صغرى محلية. (ب) عظمى محلية. (جـ) نقطة انقلاب. (د) أ ، حـ معًا.

(١١) إذا كان منحنى الدالة د يقع فوق جميع المماسات المرسومة من جميع نقط المنحنى

فإن منحنى الدالة يكون

(أ) محدبًا لأعلى. (ب) متناقصًا. (جـ) متزايدًا. (د) محدبًا لأسفل.

(١٢) إذا كانت الدالة د من الدرجة الرابعة فإن أكبر عدد ممكن من نقط الانقلاب لها

يساوى

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٣) إذا كان لمنحنى الدالة د : د (س) = أ $س^{٢}$ + ما س حيث أ ∋ ح نقطة انقلاب

عند س = $\frac{\pi}{٦}$ فإن : أ = ...

(أ) $-\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$

(١٤) (دور ثان ٢٠١٨) منحنى الدالة د حيث د (س) = (س − ٢) $هـ^{س}$ يكون محدبًا

لأسفل على الفترة

(أ)]−∞ ، ∞[(ب)]−١ ، ٢[(جـ)]٠ ، ٢[(د)]٠ ، ∞[

(١٥) منحنى الدالة د حيث د (س) = $\begin{cases} س^{٣} + ٢ & ، \ س > ٠ \\ ٣ - ٢ س^{٢} & ، \ س < ٠ \end{cases}$ محدب لأعلى

عندما س ∋

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٠[(جـ) ح (د) ح*

(١٦) ، فإن قيمة الثابت ك = ...

(أ) ٢٤ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ١٢

(١٧) النقط الحرجة للدالة د : د (س) = $س^{٣}$ + ٦٠ يكون عندها

(أ) نقطة انقلاب. (ب) نقطة قيمة عظمى محلية.

(جـ) نقطة قيمة صغرى محلية. (د) (أ) ، (ب) معًا.

(١٨) إذا كانت د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق مرتين فى ح وكانت د$'$ (س) < ر$'$ (س)

لجميع قيم س وكانت : و (س) = د (س) − ر (س) فإن : و تكون

(أ) متزايدة على مجالها. (ب) متناقصة على مجالها.

(جـ) منحناها محدب لأسفل. (د) منحناها محدب لأعلى.

(١٩) إذا كانت ص = د (س) وكان د$'$ (١) = صفر ، د$''$ (١) = −٣

فإن الدالة د يكون لها عند س = ١

(أ) قيمة صغرى محلية. (ب) قيمة عظمى محلية.

(جـ) نقطة انقلاب. (د) مماس رأسى.

(٢٠) إذا كانت د$'$ (س) = (س − م) (س − ل) حيث م < ل فإن

(أ) د$'$ (م) = د$'$ (ل) (ب) د$''$ (م) > د$''$ (ل)

(جـ) توجد نقطة انقلاب للدالة د عند س = $\frac{م + ل}{٢}$

(د) كل ما سبق.

(٢١) إذا كانت : ص = أ س + ب هو مماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة وكان :

د (س) ≥ أ س + ب فإن : د (س) يكون لجميع قيم س

(أ) متزايد (ب) متناقص

(جـ) منحناها محدب لأسفل (د) منحناها محدب لأعلى

(٢٢) إذا كان : د$''$ (س) = (س − ٣) (س + ٢) فإن منحنى الدالة د يكون محدب لأعلى

فى الفترة

(أ)]−∞ ، −٢[(ب)]−٢ ، ٣[(جـ)]٣ ، ∞[(د)]−∞ ، ٣[

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٢٣) (دور أول ٢٠١٨) إذا كانت : د دالة بحيث د'(س) = −٢ س + ٦

فإن جميع العبارات الآتية صحيحة ما عدا

(أ) منحنى الدالة د يكون محدبًا لأعلى فى الفترة]−∞ ، ∞[

(ب) الدالة د لها قيمة صغرى محلية عند س = ٣

(جـ) منحنى الدالة د ليس له نقط انقلاب

(د) الدالة د تناقصية فى الفترة]٣ ، ∞[

(٢٤) منحنى الدالة د : د(س) = ٣ س^{٢} لو$_{هـ}$ ٢ س يكون محدب لأعلى ومحدب لأسفل فى الفترتين ، على الترتيب.

(أ)]٠ ، $\frac{١}{٢\sqrt{هـ^{٣}}}$[،]$\frac{١}{٢\sqrt{هـ^{٣}}}$ ، ∞[

(ب)]$\frac{١}{٢\sqrt{هـ^{٣}}}$ ، ∞[،]٠ ، $\frac{١}{٢\sqrt{هـ^{٣}}}$[

(جـ)]٠ ، $\frac{١}{٢\sqrt{هـ}}$[،]$\frac{١}{٢\sqrt{هـ}}$ ، ∞[

(د)]٠ ، ٢$\sqrt{هـ}$[،]٢$\sqrt{هـ}$ ، ∞[

(٢٥) (دور أول ٢٠٢١) إذا كانت د ، ر دوال كثيرة الحدود ، د(س) = حـ س^{٢} + ر(س) ، وكان ر(١) = ك ، ر'(١) = ٦ ، وكان لمنحنى الدالة د نقطة انقلاب هى (١ ، ٥) ، حيث حـ ، ك ثوابت ، فإن : ك − حـ = ...

(أ) −١١ (ب) ٥ (جـ) ١١ (د) −٥

(٢٦) إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق مرتين فى الفترة [−١ ، ١] حيث د'(س) تزايدية فى الفترة]−١ ، ٠[، د'(س) تناقصية فى]٠ ، ١[، فإن العبارة التى من المؤكد أنها صحيحة فيما يلى هى

(أ) د(٠) قيمة عظمى محلية للدالة.

(ب) النقطة (٠ ، د(٠)) هى نقطة انقلاب للدالة

(جـ) الدالة د تزايدية فى الفترة]٠ ، ١[

(د) الدالة د تناقصية فى الفترة]٠ ، ١[

٤ إذا كانت النقطة (١ ، ١٢) هى نقطة انقلاب لمنحنى الدالة د حيث د(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} فأوجد قيم أ ، ب الحقيقية.

«−٦ ، ١٨»

٥ (دور ثان ٢٠١٤) ، (دور أول ٢٠١٩) أوجد قيمتى الثابتين أ ، ب بحيث يكون للمنحنى ص = س^{٣} + أ س^{٢} + ب س نقطة انقلاب عند النقطة (٣ ، − ٩)

«−٩ ، ١٥»

٦ أوجد نقط الانقلاب لمنحنى الدالة د : د(س) = ٢ س + ما س فى الفترة]$\frac{-\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$[

«(٠ ، ٠)»

٧ أثبت أن قياس زاوية ميل المماس عند نقطة الانقلاب لمنحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{\text{ظا س}}{١ - \text{س}^{٢}}$ يساوى $\frac{\pi}{٤}$

٨ إذا كان لمنحنى الدالة د حيث د(س) = س (س − ٣)^{٢} قيمة عظمى محلية عند س$_{١}$ ، وقيمة صغرى محلية عند س$_{٢}$ فأثبت أن الإحداثى السينى لنقطة الانقلاب = $\frac{\text{س}_{١} + \text{س}_{٢}}{٢}$

٩ إذا كان د'(س) = أ س + ب حيث أ < صفر

(١) هل منحنى د(س) له قيمة عظمى أو صغرى محلية ؟

(٢) هل منحنى د(س) له نقطة انقلاب أم لا ؟

١٠ أوجد قيمة الثوابت أ ، ب ، حـ ، ء بحيث يكون للمنحنى الذى معادلته ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} + حـ س + ء مماسًا لمحور السينات عند النقطة (٢ ، ٠) ويكون للمنحنى نقطة انقلاب عند (٠ ، ٤)

«$\frac{١}{٤}$ ، ٠ ، −٣ ، ٤»

١١ عين الثوابت أ ، ب ، حـ ، ء بحيث يحقق المنحنى : ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} + حـ س + ء الشروط التالية معًا.

(١) يمر بالنقطة (٠ ، ٢)

(٢) له مماس أفقى عند س = ١

(٣) النقطة (٢ ، ٤) هى نقطة انقلاب له.

«١ ، −٦ ، ٩ ، ٢»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

١٢ إذا كان منحنى الدالة د حيث د (س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + حـ س + ٤ له قيمة عظمى محلية عند (٢ ، ٤) وله نقطة انقلاب عند (١ ، ٢) أوجد معادلة المنحنى.

∴ د (س) = − س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٤

١٣ أوجد قاعدة دالة د كثيرة حدود من الدرجة الثالثة إذا علم أن منحناها يمر بالنقطة (١ ، ٠) وكانت النقطة (٢ ، ١) نقطة انقلاب لها ومعادلة المماس لمنحناها عند نقطة الانقلاب هى ٣ س + ٢ ص = ٨

∴ د (س) = $\frac{٥}{٢}$ س^{٣} − ١٥ س^{٢} + $\frac{٥٧}{٢}$ س − ١٦

١٤ إذا كان للدالة د (س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + ٩ س + ١ نقطتان حرجتان عند س = ١ ، س = ٣ فأوجد قيمتى أ ، ب وادرس تحدب منحناها ونقط الانقلاب إن وجدت.

∴ ١ ، −٦ ، (٢ ، ٣) نقطة انقلاب

١٥ إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق على ح

$$\text{، د (س)} = \begin{cases} ٢ س^{٢} + أ س + ب & \text{، عندما س} \leq ١ \\ ٣ س - س^{٢} & \text{، عندما س} > ١ \end{cases}$$

(١) أوجد قيم الثابتين أ ، ب

(٢) حدد فترات التحدب إلى أعلى والتحدب إلى أسفل ونقط الانقلاب إن وجدت.

∴ −٣ ، ٣ ، (١ ، ٢)

١٦ حدد فترات التحدب لأعلى والتحدب لأسفل لمنحنى الدالة د ، وأوجد نقط الانقلاب ومعادلة مماس المنحنى عندها لكل من الدوال الآتية :

(١) د (س) = $\begin{cases} (س + ٣)^{٢} & \text{، س} < -١ \\ ٣ س^{٢} - س^{٣} & \text{، س} \leq -١ \end{cases}$

(٢) د (س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٤ & \text{، س} < -٢ \\ س^{٣} - ٣ س + ٢ & \text{، س} \leq -٢ \end{cases}$

(٣) د (س) = $\begin{cases} س^{٣} - ٣ س & \text{، س} < ٠ \\ ٤ س - س^{٢} & \text{، س} \geq ٠ \end{cases}$

١٧ بالإستعانة بالجدول المقابل حيث الدالة د مجالها ح ولايوجد لها نقط حرجة أو نقط انقلاب أخرى بخلاف الموضحة بالجدول

س	−١	١	٢	٣	٤
د (س)	٢٤	٠	−٣	٠	٩
د′ (س)	−١٨	−٦	٠	٦	١٢

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) د (س) لها قيمة عظمى محلية عند س = ...
(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٢) د (س) لها قيمة صغرى محلية عند س = ...
(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٣) د (س) متناقصة عندما س ∈
(أ)]−∞ ، ١[(ب)]١ ، ٣[(جـ)]٣ ، ∞[(د) ح

(٤) منحنى د (س) محدب لأعلى عندما س ∈
(أ)]−∞ ، −١[(ب)]−∞ ، ٢[(جـ)]٣ ، ∞[(د)]١ ، ∞[

(٥) منحنى د (س) له نقطة انقلاب عند س = ...
(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٦) إذا كان : ر (س) = د (س) + ٥
فإن : ر (س) لها قيمة عظمى محلية عند س = ...
(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

مسائل تقيس مهارات التفكير

١٨ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان منحنى الدالة له نقطة انقلاب واحدة فإن أكثر عدد من النقط التى يتقاطع فيها منحنى الدالة مع أى مستقيم يساوى
(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢) إذا كان د (س) = (أ − ٢) س^{٣} + ٣ س − ٥ ، س ∈ ح فإن منحنى الدالة د يكون مقعرًا لأسفل عندما
(أ) أ < ٢ (ب) أ > ٢ (جـ) أ = ٢ (د) أ = ٠

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

③ إذا كانت الدالة د : د (س) = ق (س) − ر (س) حيث :
ق′ (٢) = ر′ (٢) ، ق″ (٢) > ر″ (٢) فعند س = ٢ يكون للدالة د
(أ) قيمة صغرى محلية. (ب) قيمة عظمى محلية.
(جـ) نقطة انقلاب. (د) قيمة عظمى مطلقة.

④ إذا كانت د دالة بحيث $\lim_{هـ \to 0} \frac{د'(س + هـ) - د'(س)}{هـ}$ > صفر لجميع قيم س ∈ ح
فإن منحنى الدالة د يكون
(أ) محدبًا لأعلى. (ب) متزايدًا. (جـ) متناقصًا. (د) محدبًا لأسفل.

⑤ إذا كانت د دالة متصلة على الفترة [أ ، ب] ولكل س١ ، س٢ ∈ [أ ، ب] حيث
س٢ > س١ كانت د' (س٢) − د' (س١) > ٠ فإن في الفترة]أ ، ب[
(أ) الدالة د تزايدية (ب) الدالة د تناقصية
(جـ) منحنى د محدب لأعلى (د) منحني د محدب لأسفل

⑥ إذا كان منحنى ص = د (س) ليس له نقطة انقلاب وكانت ص″ = (س − ٥)^٣ (س + ١)^٢
حيث م ، ن ∈ ص+ ، س ∈ ح فإن أقل قيمة للمقدار (م^٢ + ن^٣) هى
(أ) صفر (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٢

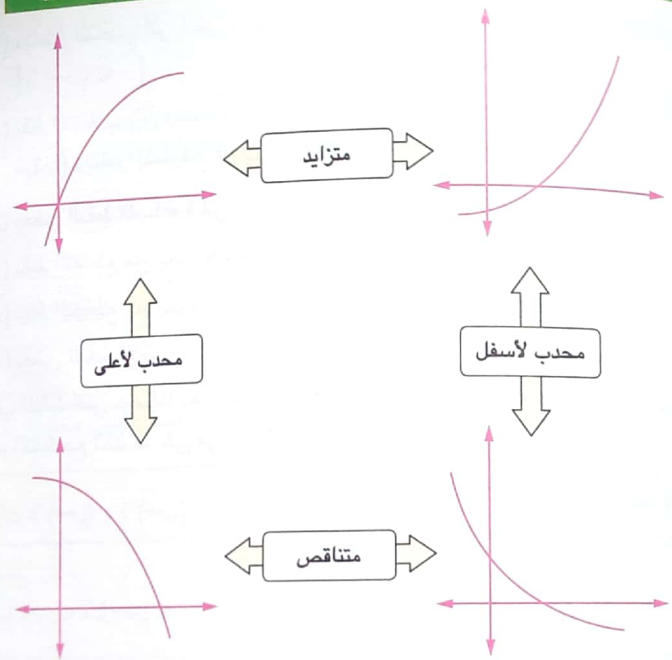
١٩ أوجد أ ، ب بحيث يكون للمنحنى س^٢ ص + أ ص + ب س^٢ = ٠ .
نقطة انقلاب عند النقطة (١ ، −١) «٠ ، ١ أو ٣ ، ٤»

٢٠ (دور أول ٢٠٠٨) إذا كانت : ص = د (س) تمثل منحنى دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة
وكان د' (س) < صفر عندما س < − ٢/٣ ، د' (س) > صفر عندما س > − ٢/٣
ويمر منحنى الدالة بالنقطة (١ ، ٦) وتوجد نقطة حرجة عند (−١ ، ٢)
أوجد معادلة المنحنى وبين نوع النقط الحرجة. «ص = س^٣ + ٢ س^٢ + س + ٢»

رسم المنحنيات

• سوف تقتصر دراستنا على رسم منحنيات دوال كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة أو أقل
أى على الصورة د : د (س) = أ س^٣ + ب س^٢ + حـ س + ء

العلاقة بين أشكال المنحنيات من حيث «التزايد والتناقص - التحدب»



* خطوات رسم منحنى الدالة د (حيث د كثيرة حدود من الدرجة الثالثة فأقل)

① نحدد مجال الدالة د ثم نحدد تماثل الدالة د حيث :
(أ) د (− س) = د (س) لكل س ∈ لمجال د
∴ الدالة د زوجية وبالتالى يكون منحناها متماثلاً بالنسبة لمحور الصادات.
(ب) د (− س) = − د (س) لكل س ∈ لمجال د
∴ الدالة د فردية وبالتالى يكون منحناها متماثلاً بالنسبة لنقطة الأصل.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

① نوجد د (س) ، د' (س)

② نستخدم د' (س) في تعيين :

(أ) مناطق التزايد حيث [د' (س) > ٠] ، مناطق التناقص حيث [د' (س) < ٠]

(ب) نقط القيم العظمى والصغرى المحلية (إن وجدت) حيث د' (س) = ٠ .

(لاحظ أن الدالة قابلة للاشتقاق) وتتغير إشارة د' (س) قبل وبعد النقطة.

③ نستخدم د' (س) في تعيين :

(أ) مناطق التحدب إلى أعلى حيث [د' (س) < ٠] ، مناطق التحدب إلى أسفل حيث [د' (س) > ٠]

(ب) نقط الانقلاب (إن وجدت) حيث د' (س) = صفر (لاحظ أن الدالة قابلة للاشتقاق مرتين) وتتغير إشارة د' (س) قبل وبعد النقطة.

④ نعين بعض النقط المساعدة في الرسم مثل :

(أ) نقط التقاطع مع محور السينات بوضع د (س) = ٠

(ب) نقط التقاطع مع محور الصادات بوضع س = ٠

(جـ) بعض النقط الإضافية الأخرى بالتعويض عن س بأي قيمة وإيجاد قيمة د (س)

⑤ نرتب النقط التي حصلنا عليها في جدول ونمثلها بيانيًا ثم نكمل رسم المنحنى بتوصيل هذه النقط مع أخذ ما يلي في الاعتبار :

إشارات د' (س) ، د' (س)	خواص منحنى الدالة د	شكل المنحنى
د' (س) > ٠ ، د' (س) > ٠	متزايد ، محدب لأسفل	
د' (س) > ٠ ، د' (س) < ٠	متزايد ، محدب لأعلى	
د' (س) < ٠ ، د' (س) > ٠	متناقص ، محدب لأسفل	
د' (س) < ٠ ، د' (س) < ٠	متناقص ، محدب لأعلى	

مثال ١

ارسم شكلاً عامًا لمنحنى الدالة د : د (س) = (س + ٢)² (س − ١)

الحل

الدالة د كثيرة حدود مجالها ℝ ، الدالة ليست زوجية وليست فردية

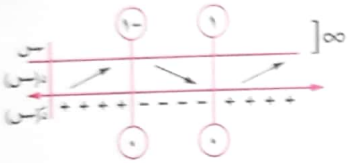
∴ د (س) = (س + ٢)² (س − ١)² = (س + ٢)² (س² − ٢ س + ١) = س⁴ − ٣ س² + ٤

∴ د' (س) = ٤ س³ − ٦ س ، د' (س) = ٦ س

① بوضع د' (س) = ٠ ∴ ٢ س³ − ٦ س = ٠

∴ ٢ س (س² − ٣) = ٠ ∴ ٢ س (س − √٣) (س + √٣) = ٠

∴ س = ٠ أ، س = √٣ أ، س = −√٣



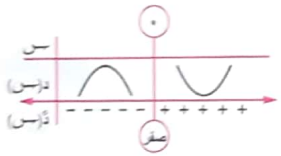
∴ منحنى الدالة متزايد في]−∞ ، −√٣[،]٠ ، √٣[،]∞ ، [

، منحنى الدالة متناقص في]−√٣ ، ٠[،]√٣ ، ٠[

، ∵ د (٠) = ٠ ، د (−√٣) = ٩ ، د (√٣) = ٩

∴ (٠ ، ٠) نقطة قيمة صغرى محلية ، (−√٣ ، ٩) ، (√٣ ، ٩) نقطتا قيمة عظمى محلية.

② بوضع د' (س) = ٠ ∴ ٦ س = ٠ ∴ س = ٠



∴ منحنى الدالة محدب لأعلى في]−∞ ، ٠[

، منحنى الدالة محدب لأسفل في]٠ ، ∞[

، توجد نقطة انقلاب عند س = ٠

، ∵ د (٠) = ٢ ∴ (٠ ، ٢) نقطة انقلاب.

③ لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات نضع د (س) = ٠

∴ (س + ٢)² (س − ١)² = ٠ ∴ س = −٢ أ، س = ١

∴ المنحنى يقطع محور السينات في النقط (−٢ ، ٠) ، (١ ، ٠)

④ لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات نضع س = ٠

، ∵ د (٠) = ٢ ∴ المنحنى يقطع محور الصادات في (٠ ، ٢)

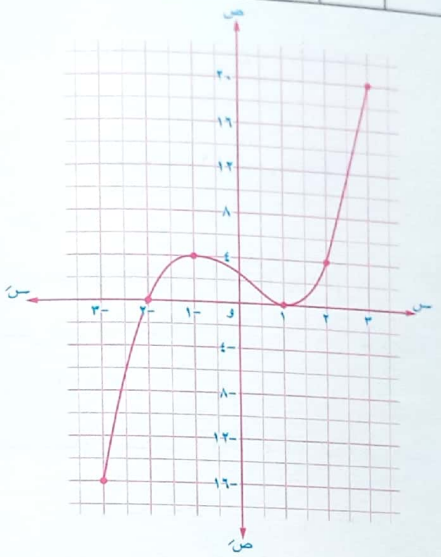
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑤ إيجاد بعض النقط المساعدة ∵ د (٣) = ٢٠ ، د (−٣) = −١٦ ، د (٢) = ٤

∴ المنحنى يمر بالنقط (٣ ، ٢٠) ، (−٣ ، −١٦) ، (٢ ، ٤)

⑥ نرتب جميع النقط السابقة فى الجدول الآتى ثم نمثلها بيانيًا :

س	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣
د (س)	−١٦	٠	٤	٢	٠	٤	٢٠



مثال ٢

ارسم شكلاً عامًا لمنحنى الدالة د : د (س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − س^{٢} − ٣ س + ١

الحـــل

الدالة د كثيرة حدود مجالها ح ، الدالة ليست زوجية وليست فردية

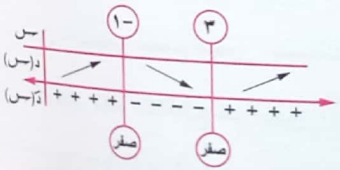
∵ د (س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − س^{٢} − ٣ س + ١ ∴ دَ (س) = س^{٢} − ٢ س − ٣

، دً (س) = ٢ س − ٢

① بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س^{٢} − ٢ س − ٣ = ٠

∴ (س + ١) (س − ٣) = ٠

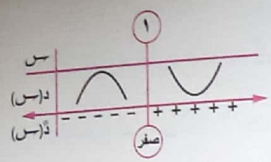
∴ س = −١ أ، س = ٣



∴ منحنى الدالة متزايد فى]−∞ ، −١[،]٣ ، ∞[، منحنى الدالة متناقص فى]−١ ، ٣[

، ∵ د (−١) = $\frac{٨}{٣}$ ، د (٣) = −٨

∴ $\left(-١ ، \frac{٨}{٣}\right)$ نقطة قيمة عظمى محلية ، (٣ ، −٨) نقطة قيمة صغرى محلية.



③ بوضع دً (س) = ٠ ∴ ٢ س − ٢ = ٠ ∴ س = ١

∴ منحنى الدالة محدب لأعلى فى]−∞ ، ١[

، منحنى الدالة محدب لأسفل فى]١ ، ∞[

، توجد نقطة انقلاب عند س = ١

، ∵ د (١) = $\frac{-٨}{٣}$ ∴ $\left(١ ، \frac{-٨}{٣}\right)$ نقطة انقلاب.

④ لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات نضع س = ٠

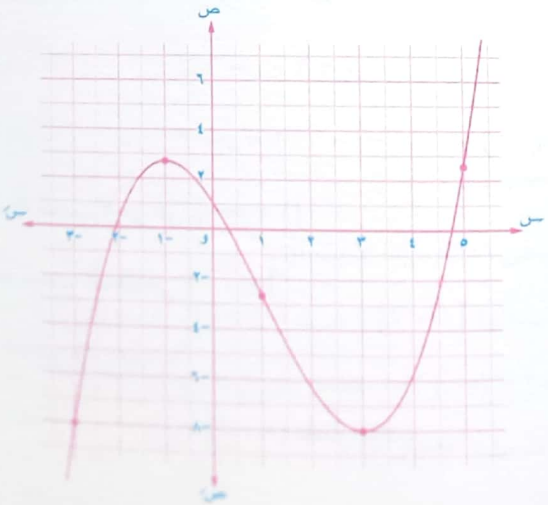
، ∵ د (٠) = ١ ∴ المنحنى يقطع محورالصادات فى (٠ ، ١)

④ إيجاد بعض النقط المساعدة : ∵ د (−٣) = −٨ ، د (٥) = $\frac{٨}{٣}$

∴ المنحنى يمر بالنقط : (−٣ ، −٨) ، $\left(٥ ، \frac{٨}{٣}\right)$

⑤ نرتب جميع النقط السابقة فى الجدول الآتى ثم نمثلها بيانيًا :

س	−٣	−١	٠	١	٣	٥
د (س)	−٨	$\frac{٨}{٣}$	١	$\frac{-٨}{٣}$	−٨	$\frac{٨}{٣}$



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٢

ارسم شكلاً عامًا لمنحنى الدالة د : د (س) = س^{٣} − ٣ س^{٢} + ٣ س + ٧

الحل

الدالة د كثيرة حدود مجالها ح ، والدالة ليست فردية وليست زوجية.

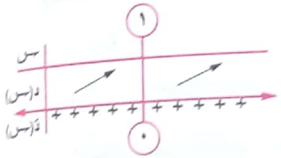
∵ د (س) = س^{٣} − ٣ س^{٢} + ٣ س + ٧

∴ د′ (س) = ٣ س^{٢} − ٦ س + ٣ ، د″ (س) = ٦ س − ٦

① بوضع د′ (س) = ٠ ∴ ٣ س^{٢} − ٦ س + ٣ = ٠

∴ ٣ (س^{٢} − ٢ س + ١) = ٠

∴ ٣ (س − ١)^{٢} = ٠ ∴ س = ١



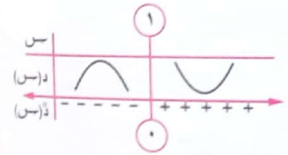
، ∵ د′ (س) = ٣ (س − ١)^{٢} > ٠ لجميع قيم س ∈ ح − {١}

، ∵ الدالة متصلة. ∴ الدالة تزايدية على ح

، عند س = ١ ليست نقطة قيمة عظمى أو صغرى محلية للدالة.

② بوضع د″ (س) = ٠ ∴ ٦ س − ٦ = ٠

∴ ٦ (س − ١) = ٠ ∴ س = ١



∴ منحنى الدالة محدب لأعلى فى]−∞ ، ١[

، منحنى الدالة محدب لأسفل فى]١ ، ∞[

، توجد نقطة انقلاب عند س = ١

، ∵ د (١) = ٨ ∴ (١ ، ٨) نقطة انقلاب.

② لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات نضع س = ٠ .

، ∵ د (٠) = ٧ ∴ المنحنى يقطع محور الصادات فى (٠ ، ٧)

④ إيجاد بعض النقط المساعدة :

∵ د (٢) = ٩ ، د (−١) = ٠ ، د $\left(-١\frac{١}{٢}\right)$ = $-٧\frac{٥}{٨}$

∴ المنحنى يمر بالنقط (٢ ، ٩) ، (−١ ، ٠) ، $\left(-١\frac{١}{٢} ، -٧\frac{٥}{٨}\right)$

⑤ نرتب جميع النقط السابقة فى الجدول الآتى ثم نمثلها بيانيًا :

س	$-١\frac{١}{٢}$	−١	٠	١	٢
د (س)	$-٧\frac{٥}{٨}$	٠	٧	٨	٩



مثال ٤

ارسم شكلاً عامًا لمنحنى الدالة د إذا علمت أن :

① د دالة متصلة مجالها [١ ، ٧] ، د (١) = −١ ، د (٥) = ٤ ، د (٧) = ١

② د′ (٥) = ٠ ، د′ (س) > ٠ عندما س > ٥ ، د′ (س) < ٠ عندما ١ < س < ٥

③ د″ (س) < ٠ عندما ١ < س < ٧

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

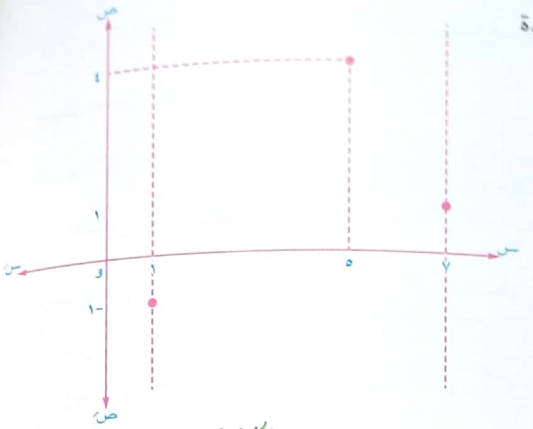
الحل

* نرسم محورى الإحداثيات المتعامدة

ونحدد عليه النقط (١ ، -١)

، (٥ ، ٤) ، (٧ ، ١)

ونحدد المجال كما بالشكل (١)



شكل (١)

* ∵ د' (٥) = ٠

، د' (س) تتغير إشارتها من

الموجب إلى السالب قبل وبعد س = ٥

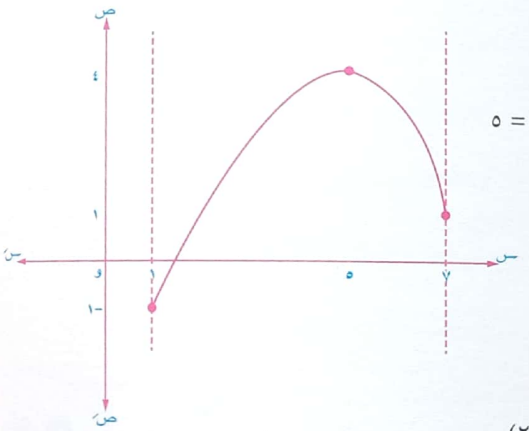
∴ د (٥) قيمة عظمى محلية

* ∵ د' (س) < ٠ (سالبة)

لجميع قيم س ∋ المجال

∴ المنحنى محدب لأعلى

∴ نستكمل الرسم كما بالشكل (٢)

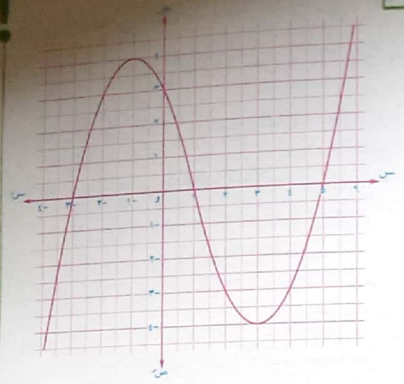


شكل (٢)

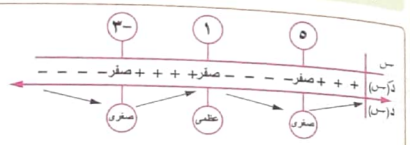
ملاحظة ①

إذا كان الشكل يمثل منحنى د (س)

* نقطة قيمة عظمى للدالة هى : (-١ ، ٤)
* نقطة قيمة صغرى للدالة هى : (٣ ، -٤)
* الدالة متزايدة فى]-∞ ، -١[،]٣ ، ∞[
* الدالة متناقصة فى]-١ ، ٣[
* نقطة الانقلاب هى : (١ ، ٠)
* المنحنى محدب لأعلى فى]-∞ ، ١[
* المنحنى محدب لأسفل فى]١ ، ∞[



إذا كان الشكل يمثل منحنى د' (س)



* توجد قيمة عظمى للدالة د عند س = ١
* توجد قيمة صغرى للدالة د عند س = ٥
، س = -٣
* الدالة د متزايدة فى]-٣ ، ١[،]٥ ، ∞[
* الدالة د متناقصة فى]-∞ ، -٣[،]١ ، ٥[
* لاحظ أن ميل المماس للمنحنى د' (س) يكافئ د' (س)

، ∵ ميل المماس للمنحنى د' (س) يساوى صفر عند س = -١ ، س = ٣

∴ د' (س) = ٠ عند س = -١ ، س = ٣

وتتغير قيم د' (س) حول هذه القيم

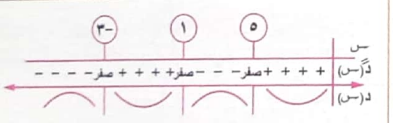
∴ توجد نقط انقلاب للدالة د عند س = -١

، س = ٣

* المنحنى محدب لأعلى فى]-١ ، ٣[
* المنحنى محدب لأسفل فى]-∞ ، -١[

،]٣ ، ∞[

إذا كان الشكل يمثل منحنى د' (س)



* المنحنى محدب لأعلى فى]-∞ ، -٣[

،]١ ، ٥[

* المنحنى محدب لأسفل فى]-٣ ، ١[

،]٥ ، ∞[

* توجد نقط انقلاب عند س = ٥ ، س = ١

، س = -٣

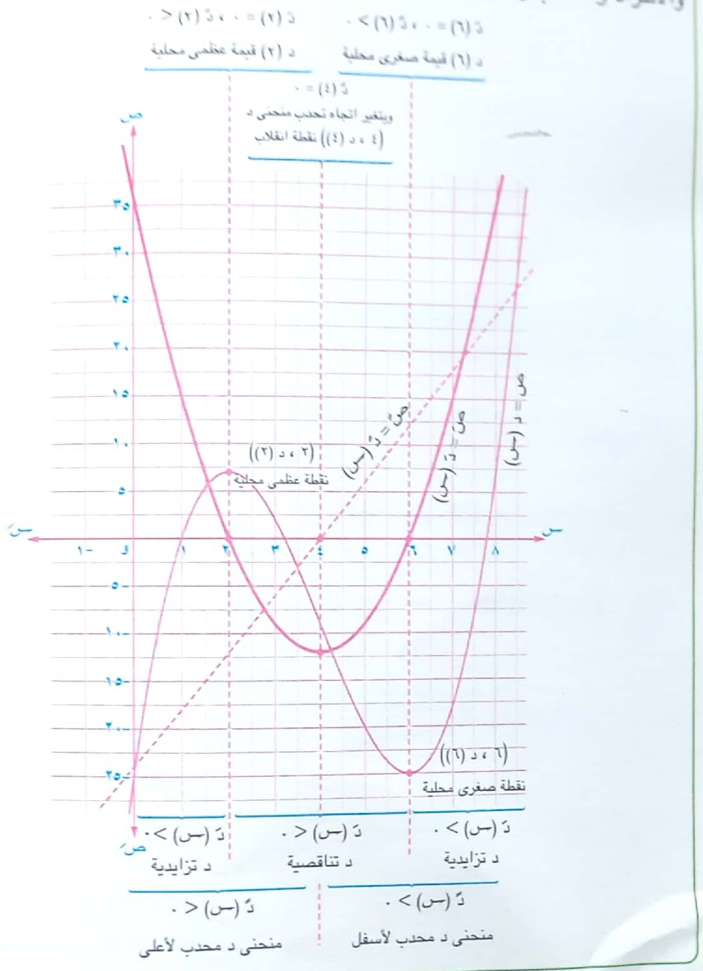
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ملاحظة ②

بدراسة منحنى الدالة د وليكن د (س) = س^{٣} − ١٢ س^{٢} + ٣٦ س − ٢٥

، د$'$ (س) = ٣ س^{٢} − ٢٤ س + ٣٦ ، د$''$ (س) = ٦ س − ٢٤

نجد أن الشكل التالى يوضح العلاقة بين د ، د$'$ ، د$''$ من حيث النقط العظمى والصغرى المحلية والانطراد والتحدب ونقط الانقلاب.

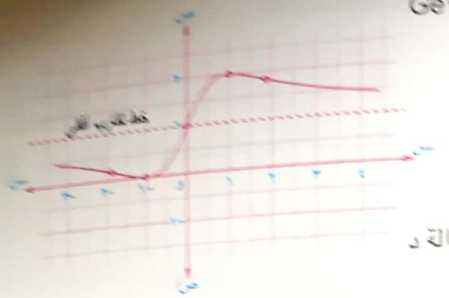


نشاط

بعض الدوال يصعب رسم منحناها البياني يمكنك باستخدام برنامج GeoGebra أو الحاسبة البيانية أو أى برنامج رسومى أخر رسم منحنى الدالة ودراسة خواصه

فمثلاً الشكل المقابل يوضح منحنى الدالة د

حيث د (س) = $\frac{(س + ١)^{٢}}{س^{٢} + ١}$



لاحظ أن :

① الدالة متناقصة فى]−∞ ، −١[،]١ ، ∞[ومتزايدة فى]−١ ، ١[

② عند س = −١ توجد قيمة صغرى محلية = د (−١) = صفر

، عند س = ١ توجد قيمة عظمى محلية = د (١) = ٢

③ المنحنى محدب لأعلى فى]−∞ ، −$\sqrt{٣}$[،]٠ ، $\sqrt{٣}$[

، محدب لأسفل فى]−$\sqrt{٣}$ ، ٠[،]$\sqrt{٣}$ ، ∞[

④ عند س = −$\sqrt{٣}$ ، س = ٠ ، س = $\sqrt{٣}$ توجد نقط انقلاب

⑤ ∵ نهـــا$_{|س| \to \infty}$ $\frac{(س + ١)^{٢}}{س^{٢} + ١}$ = ١

∴ المنحنى له خط تقاربى أفقى معادلته

«ص = ١»

أى أن المنحنى يقترب بطرفين من المستقيم

«ص = ١»

ملاحظة

الخط التقاربى الأفقى لمنحنى الدالة د تكون معادلته «ص = ℓ»

حيث ℓ = نهـــا$_{|س| \to \infty}$ د (س)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمارين 13
على رسم المنحنيات

اختبار تفاعلى

فهم • تطبيق • مستويات عليا

من أسئلة الكتاب المدرسى

أولًا مسائل على رسم المنحنيات

١ ارسم شكلاً عامًا لمنحنيات كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

(١) د (س) = ٣ − س^{٢}

(٢) د (س) = س^{٢} − ٦ س + ٥

(٣) د (س) = ١٢ س − س^{٣}

(٤) د (س) = س (س + ٣)^{٢}

(٥) د (س) = س^{٣} + ٤ س^{٢} + ٤ س

(٦) د (س) = ٢ س^{٣} − ٩ س^{٢} + ١٢ س − ٢

(٧) د (س) = س^{٣} − ٦ س^{٢} + ١٢ س − ٥

(٨) د (س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − س^{٢} − ٣ س + ١

(٩) د (س) = (٢ − س) (س + ١)^{٢}

(١٠) د (س) = س (س − ٢)^{٢} + ٣

(١١) د (س) = $\frac{١}{٨}$ (س + ٤) (س − ٢)^{٢}

(١٢) د (س) = س | س − ٤ |

(١٣) د (س) = { س^{٣} − ٣ س^{٢} ، س < ٠ ؛ س^{٢} − ٢ س ، س ≥ ٠

٢ (دور أول ٢٠١٢) عين فترات التزايد والتناقص للمنحنى :

ص = س^{٣} − ٣ س + ٤ ثم ارسم الشكل العام للمنحنى موضحًا عليه مواقع القيم العظمى المحلية والصغرى المحلية ونقط الانقلاب (إن وجدت) «(−١ ، ٦) ، (١ ، ٢) ، (٠ ، ٤)»

٣ (دور ثان ٢٠٠٤) أوجد القيم العظمى المحلية والصغرى المحلية للدالة د حيث :

د (س) = (س + ١) (س^{٢} − س − ٢) وكذلك نقط الانقلاب لمنحنى الدالة (إن وجدت)

ثم ارسم الشكل العام للمنحنى. «صفر ، −٤ ، (٠ ، −٢)»

٤ (دور أول ٢٠٠٤) للدالة د حيث : د (س) = س^{٣} − ٣ س^{٢} + ٤ أوجد القيم العظمى المحلية والصغرى المحلية وكذلك نقط الانقلاب لمنحنى الدالة (إن وجدت) وذلك فى الفترة]−١ ، ٣[

ثم ارسم الشكل العام لمنحنى هذه الدالة فى الفترة [−١ ، ٣] «٤ ، صفر ، (١ ، ٢)»

٥ أثبت أن المنحنى الذى معادلته : ص = س^{٣} + س^{٢} + س ليس له نقط قيم عظمى أو صغرى محلية ثم ارسم المنحنى.

٦ ارسم شكلاً عامًا لمنحنى الدالة إذا علم ما يلى :

(١) د متصلة مجالها [١ ، ٣] (٢) دَ (س) > ٠ لكل س ∈ [١ ، ٣]

(٣) دً (س) < ٠ لكل س ∈ [١ ، ٣]

٧ ارسم شكلاً عامًا لمنحنى الدالة المتصلة د إذا علم ما يلى :

(١) د (٠) = ٤ ، د (٣) = ١

(٢) دَ (س) < ٠ لكل س < ٢ ، دَ (س) > ٠ لكل س > ٢

(٣) دً (س) > ٠

٨ ارسم شكلاً عامًا لمنحنى الدالة المتصلة د إذا كان :

(١) د (٣) = ٥ (٢) دَ (٣) = صفر

(٣) دً (س) < ٠ لجميع قيم س

٩ ارسم شكلاً عامًا لمنحنى الدالة د حيث ص = د (س) إذا كان :

(١) د متصلة ومجالها [−١ ، ٥] (٢) د (١) = د (٣) = ٠ ، دَ (٢) غير موجودة

(٣) دَ (س) < ٠ عندما س < ٢ ، دَ (س) > ٠ عندما س > ٢

(٤) دً (س) > ٠ عندما س ≠ ٢

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

١٠ ارسم شكلاً عامًا لمنحنى الدالة المتصلة د إذا كان :

① د (١) = د (٥) = صفر ، د (٣) = −٣

② دَ (س) < ٠ لكل س < ٣ ، دَ (س) > ٠ لكل س > ٣

③ دَ (س) < ٠ لكل س ≠ ٣

١١ ارسم شكلاً عامًا لمنحنى الدالة د المتصلة إذا كان :

① د (٣) = ٥ ، دَ (٣) = صفر

② دَ (س) > ٠ لكل س < ٣ ، دَ (س) < ٠ لكل س > ٣

١٢ ارسم شكلاً عامًا لمنحنى الدالة د حيث ص = د (س) إذا علمت ما يلى :

① د متصلة مجالها]−∞ ، ٠] ، د (٤) = ٣ ، د (٠) = ١

② دَ (س) > ٠ عندما س < ٠

③ دَ (س) < ٠ عندما س < ٤ ، دَ (٤) = ٠ ، دَ (س) < ٠ عندما س > ٤

١٣ ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة المتصلة د الذى له الخواص التالية :

① د (٠) = ٣ ② دَ (٢) = دَ (−٢) = ٠

③ دَ (س) > ٠ عندما −٢ < س < ٢

④ دَ (س) < ٠ عندما س < ٠ ، دَ (س) > ٠ عندما س > ٠

١٤ ارسم شكلاً عامًا لمنحنى الدالة المتصلة د الذى يحقق الخواص التالية :

① د (٤) = ٢ د (٣) = ٤ ، د (٢) = ٠

② دَ (س) < ٠ عندما س > ٤ أو س < ٢

③ دَ (س) < ٠ عندما س < ٣ ، دَ (س) > ٠ عندما س > ٣

١٥ ارسم شكلاً عامًا لمنحنى الدالة المتصلة د إذا علم ما يلى :

① د (−١) = ٢ د (٠) = ٤ ، د (١) = ٠ ② دَ (١) = دَ (−١) = ٠

③ دَ (س) < ٠ لكل س < ٠ ، دَ (س) > ٠ لكل س > ٠

١٦ عين كلاً من أ ، ب بحيث تكون النقطة (١ ، ٣) نقطة انقلاب للمنحنى :
ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} ثم ارسم شكلاً عامًا للمنحنى.

١٧ عين قيم أ ، ب ، حـ ، ء للمنحنى ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} + حـ س + ء بحيث تكون له قيمة عظمى محلية عند (٠ ، ٦) وقيمة صغرى محلية عند (١ ، ٥) ثم ارسم المنحنى.

١٨ إذا كان المنحنى ص = س^{٣} + أ س^{٢} + ب س له نقطة انقلاب عند النقطة (−١ ، ١١)

① أوجد معادلة المنحنى. «ص = س^{٣} + ٣ س^{٢} − ٩ س»

② عين مواقع القيم الصغرى والعظمى المحلية. «صغرى عند (١ ، −٥) ، عظمى عند (−٣ ، ٢٧)»

③ ارسم الشكل العام للمنحنى.

١٩ إذا كان د (س) = س^{٣} + أ س^{٢} + ب س + ٤ حيث أ ، ب ثابتان
أوجد قيمتى : أ ، ب إذا كان للدالة د قيمة صغرى محلية عند س = ٢ ونقطة انقلاب عند س = ١ ثم ارسم شكلاً عامًا لمنحنى الدالة د «−٣ ، ٠»

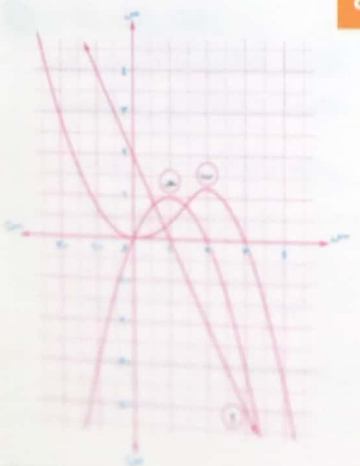
٢٠ أوجد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة للدالة د :

د حيث : د (س) = { س + ١ ، س > ١ ; (س − ٣)^{٢} − ٢ ، س ≤ ١ }

وذلك فى الفترة [−٥ ، ٤] ثم ارسم الشكل العام للدالة فى هذه الفترة. «٢ ، −٤»

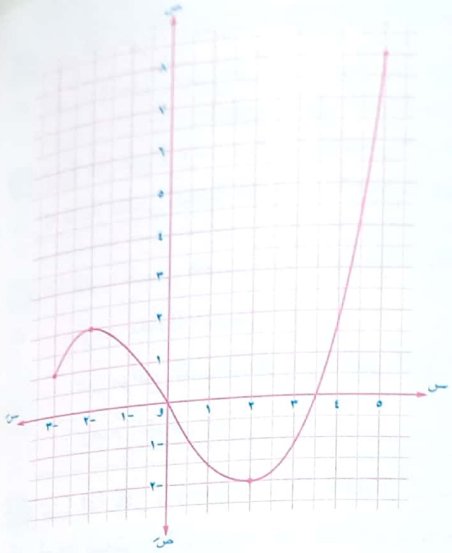
ثانيًا مسائل على المنحنيات المرسومة

١ يبين الشكل المقابل تمثيلاً بيانيًا
لمنحنيات الدوال د (س) ، دَ (س) ، دً (س)
حيث د (س) كثيرة حدود
، حدد منحنى كل دالة.



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢ بالاستعانة بالشكل المقابل الذى يمثل منحنى الدالة د
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



① الدالة لها قيمة صغرى محلية عندما س = ...
(أ) -٣ (ب) صفر
(جـ) ٢ (د) -٢

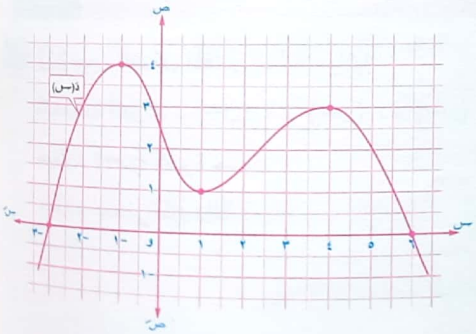
② القيمة العظمى المطلقة تساوى
(أ) ٥ (ب) ٨
(جـ) -٢ (د) ٢

③ منحنى الدالة محدب لأعلى عندما س ∈
(أ)]-٣ ، ٠[(ب)]-٢ ، ٢[(جـ)]٠ ، ٥[(د)]-٣ ، ٥[

④ منحنى الدالة له نقطة انقلاب هى
(أ) (-٢ ، ٢) (ب) (٠ ، ٠) (جـ) (٢ ، -٢) (د) $(\frac{١}{٢}\ ٣ ، ٠)$

⑤ الدالة متناقصة فى الفترة
(أ)]-٣ ، ٠[(ب)]-٢ ، ٢[(جـ)]٠ ، ٥[(د)]-٣ ، ٥[

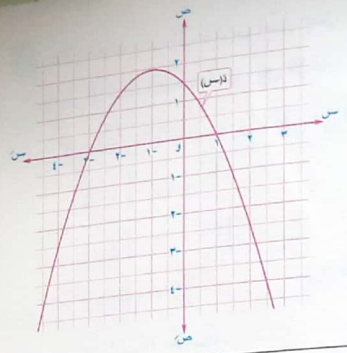
٣ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى دَ (س) فاختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



① منحنى د (س) له قيمة عظمى عند س = ...
(أ) -٣ (ب) -١
(جـ) ٤ (د) ٦

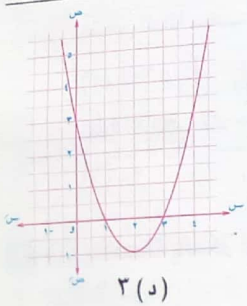
② منحنى د (س) له قيمة صغرى عند س = ...
(أ) -٣ (ب) ١
(جـ) ٤ (د) ٦

٤ يوضح الشكل المقابل منحنى دَ (س) للدالة د حيث د (س) كثيرة حدود :



① عين فترات التزايد وفترات التناقص للدالة د
② أوجد مجموعة حل المتباينة دَ (س) > ٠

٥ بالاستعانة بالشكل المقابل الذى يمثل منحنى الدالة دَ (س)
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



① د (س) لها قيمة عظمى محلية عند س = ...
(أ) صفر (ب) ١
(جـ) ٢ (د) ٣

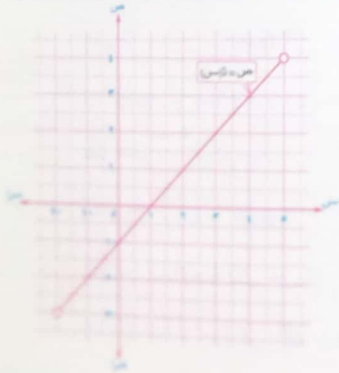
② د (س) لها قيمة صغرى محلية عند س = ...
(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

③ د (س) لها نقطة انقلاب عند س = ...
(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

④ منحنى د (س) محدب لأعلى عندما س ∈
(أ)]-∞ ، ٢[(ب)]٢ ، ∞[(جـ)]١ ، ٣[(د) ح

⑤ د (س) متناقصة عندما س ∈
(أ)]-∞ ، ٢[(ب)]٢ ، ∞[(جـ)]١ ، ٣[(د) ح

٦ يمثل الشكل المقابل : منحنى دَ (س) على الفترة]-٢ ، ٥[للدالة المتصلة د

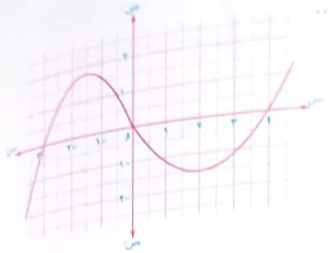


① وضح فترات التحدب لأعلى والتحدب لأسفل لمنحنى الدالة د إن وجدت.
② هل توجد نقط انقلاب لمنحنى د فى هذه الفترة ؟ فسر إجابتك.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٧ بالاستعانة بالشكل المقابل الذى يمثل منحنى الدالة د (س)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



(١) منحنى الدالة د محدب لأعلى فى الفترة

(أ)]-∞ ، ٠[

(ب)]-∞ ، -٣[

(جـ)]٠ ، ٤[

(د) ب ، حـ معًا.

(٢) منحنى الدالة محدب لأسفل فى الفترة

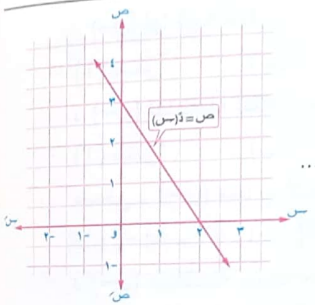
(أ)]-٣ ، ٠[(ب)]٤ ، ∞[(جـ)]٠ ، ∞[(د) أ ، ب معًا.

(٣) نقطة الانقلاب عند س = ...

(أ) -٣ (ب) صفر (جـ) ٤ (د) جميع ما سبق.

٨ بالاستعانة بالشكل المقابل الذى يمثل منحنى الدالة د (س)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



(١) منحنى الدالة محدب لأعلى عندما س ∈

(أ)]-∞ ، ٢[(ب)]٢ ، ∞[

(جـ)]٠ ، ٢[(د) أ ، حـ معًا.

(٢) منحنى الدالة له نقطة انقلاب عند س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) صفر

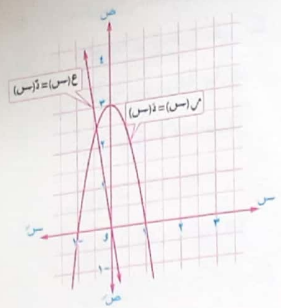
(٣) إذا كانت : د (-١) = د (٥) = صفر فإنه يوجد للدالة قيمة عظمى محلية عند س = ...

(أ) -١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٥

(٤) الدالة د متناقصة لكل س ∈

(أ)]-∞ ، -١[(ب)]٥ ، ∞[(جـ) ح (د) أ ، ب معًا.

٩ يوضح الشكل المقابل :



منحنيا الدالتين ر ، ع حيث :

ر (س) = د (س)

، ع (س) = د' (س)

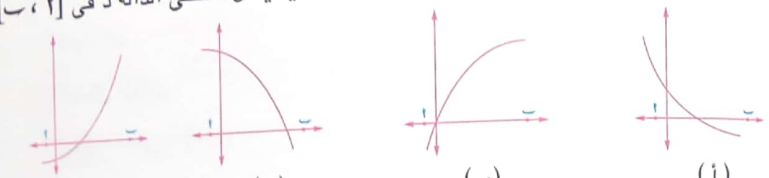
، د دالة كثيرة حدود فى المتغير س

ارسم الشكل العام لمنحنى د علمًا بأنه يمر بالنقطتين (-١ ، ٠) ، (١ ، ٤)

١٠ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : د' (س) < ٠ ، د" (س) > ٠ لكل س ∈ [أ ، ب]

فبين أيًا من المنحنيات الموضحة بالأشكال التالية يمثل منحنى الدالة د فى [أ ، ب]



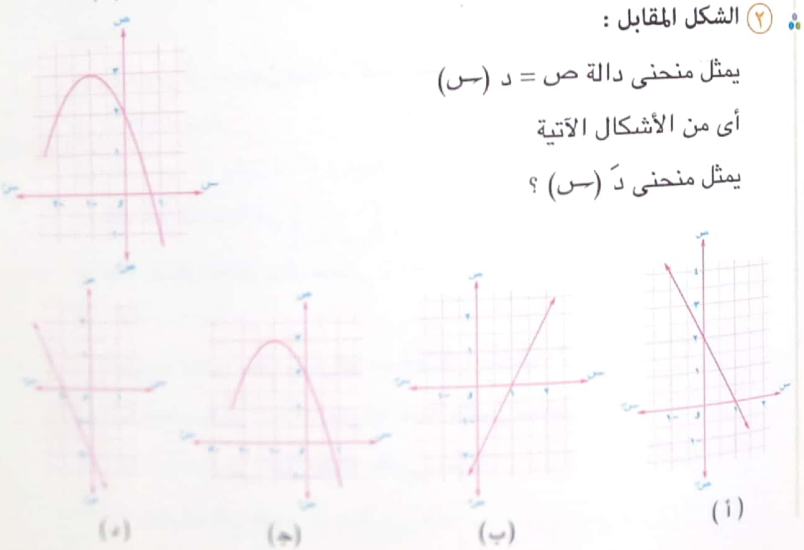
(أ) (ب) (جـ) (د)

(٢) الشكل المقابل :

يمثل منحنى دالة ص = د (س)

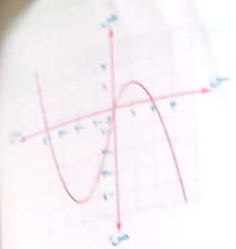
أى من الأشكال الآتية

يمثل منحنى د' (س) ؟



(أ) (ب) (جـ) (د)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



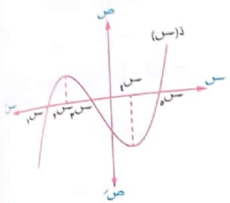
٣ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة
ص = د (س) فإن كل العبارات
الآتية صحيحة ما عدا

(أ) د' (-٢) = صفر

(ب) د' (-١) > ٠

(جـ) د (٣) > د (٥)

(د) د' (-٤) < د' (-٥)

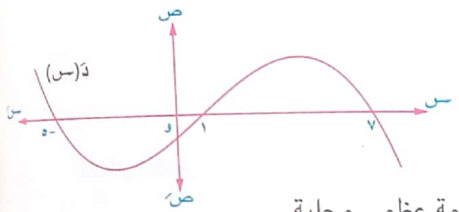


٤ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د' (س)
فإن د (س) لها قيمة عظمى محلية عند
س = ...

(أ) س١ ، س٥ (ب) س٢

(جـ) س٣ (د) س٤

٥ الشكل المقابل :
يمثل منحنى د' (س)
كل العبارات الآتية صحيحة
ماعدا



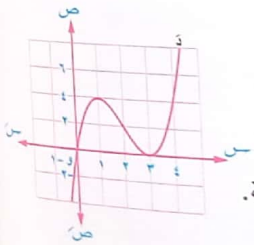
(أ) عند س = -٥ يكون للدالة د قيمة عظمى محلية.

(ب) د' (١) > صفر

(جـ) عند س = ٧ يكون للدالة د قيمة صغرى محلية.

(د) الدالة د تناقصية فى]-٥ ، ١[

٦ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى د' (س)
فإن الدالة د (س)



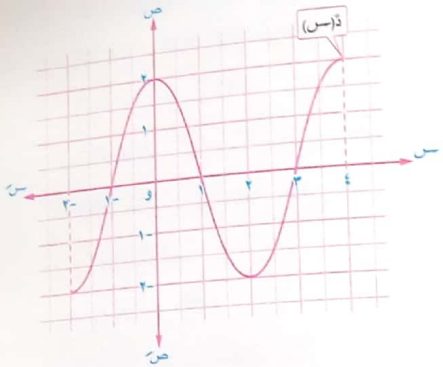
(أ) لها قيمة عظمى محلية وليس لها قيمة صغرى محلية.

(ب) لها قيمة صغرى محلية وليس لها قيمة عظمى محلية.

(جـ) لها قيمة صغرى محلية وقيمة عظمى محلية.

(د) لا يوجد لها قيم عظمى أو صغرى محلية.

٧ (دور ثان ٢٠١٩) إذا كان الشكل المقابل :
يمثل منحنى د' (س) للدالة د
حيث -٢ ≤ س ≤ ٤
فإن منحنى الدالة يكون محدبًا
لأعلى فى



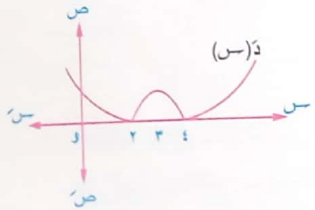
(أ) -١ < س < ١

(ب) صفر < س < ٢

(جـ) -٢ < س < -١ فقط

(د) -٢ < س < -١ ، ١ < س < ٣

٨ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د' (س)
فإن :



أولاً : الدالة د تكون متزايدة فى

(أ)]٢ ، ٣[(ب)]٤ ، ∞[

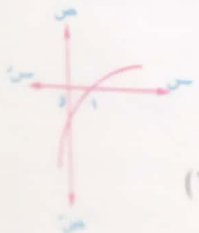
(جـ) ح (د) (أ) ، (ب) معًا

ثانيًا : الدالة د لها نقطة انقلاب عند

(أ) س = ٢ (ب) س = ٣

(جـ) س = ٤ (د) كل ما سبق.

٩ الشكل المقابل يمثل منحنى دالة
قابلة للتفاضل مرتين ص = د (س)
فإن



(أ) د (١) > د' (١) > د' (١) (ب) د' (١) > د (١) > د' (١)

(جـ) د' (١) > د' (١) > د (١) (د) د (١) > د' (١) > د' (١)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(١٤) الشكل المقابل يمثل منحنى دَ (س)

، المستقيم ل يمس المنحنى عند (أ ، ب)

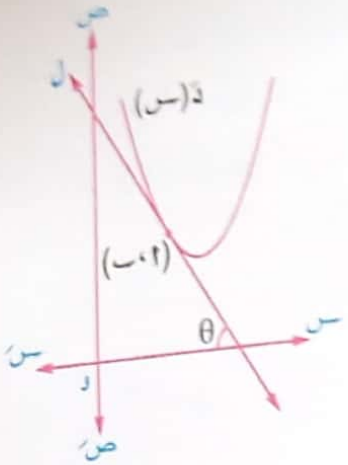
فإن : دَ (أ) = ...

(أ) ظا θ

(ب) - ظا θ

(جـ) صفر

(د) $\frac{-١}{ب}$



(١٥) فى الشكل المقابل :

إذا كان المستقيم ل : ٤ ص = ٣ س + ١٢

يمس المنحنى دَ (س) عند س = ٢ فإن :

أولاً : دَ (٢) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$

(ب) $\frac{٣}{٤}$

(جـ) ٤,٥

(د) ٦

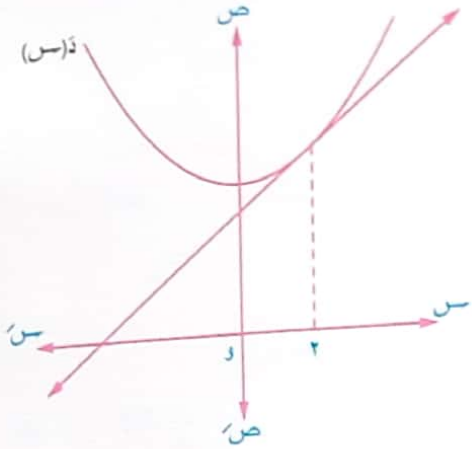
ثانيًا : دً (٢) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$

(ب) $\frac{٣}{٤}$

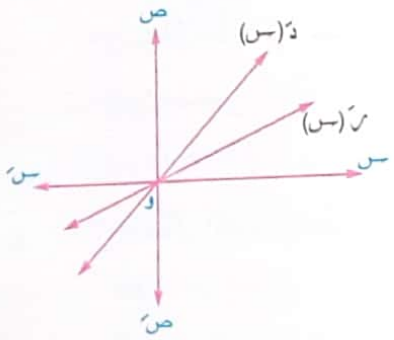
(جـ) ٤,٥

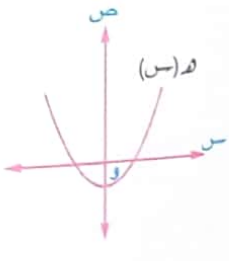
(د) ٦



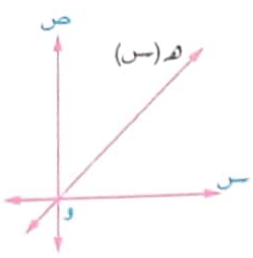
(١٦) الشكل المقابل يوضح التمثيل البيانى لمنحنى الدالتين دَ ، رَ فأى الأشكال البيانية التالية يصلح تمثيل لمنحنى الدالة هـ حيث

هـ (س) = د (س) - ر (س) ؟

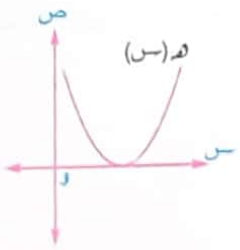




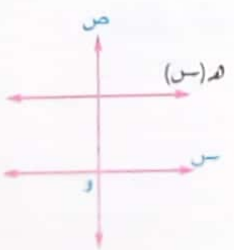
(أ)



(ب)



(جـ)

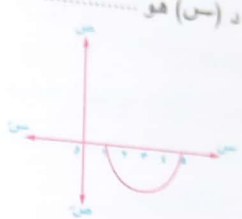


(د)

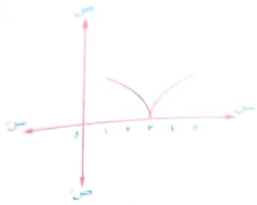
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(١٧) (دور أول ٢٠٢١) إذا كانت د دالة متصلة على الفترة [١ ، ٥] ، د' (٣) غير معرفة ، د' (س) > ٠ لكل س ≠ ٣ ، فإن الشكل الذى يمكن أن يمثل منحنى الدالة د (س) هو

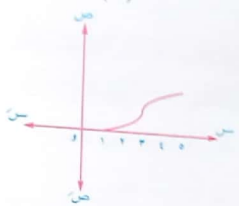
(أ)



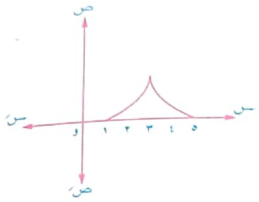
(ب)



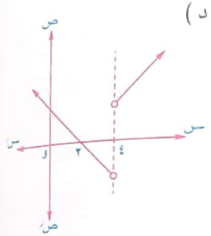
(جـ)



(د)



(١٨) (دور أول ٢٠٢١) إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى المشتقة الأولى للدالة المتصلة د التى مجالها ح



فإن العبارة الخاطئة فيما يلى هى

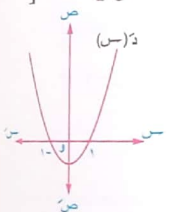
(أ) الدالة لها نقطة انقلاب عند س = ٤

(ب) الدالة د لها قيمة عظمى محلية عند س = ٢

(جـ) منحنى الدالة محدب لأعلى فى]-∞ ، ٤[، محدب لأسفل فى]٤ ، ∞[

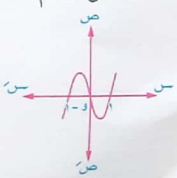
(د) د (-٣) < د (-٢)

(١٩) الشكل المقابل يمثل المشتقة الأولى للدالة ص = د (س)

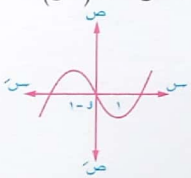


أيًا من الأشكال الآتية يمكن أن يكون هو الشكل العام للدالة ص = د (س) ؟

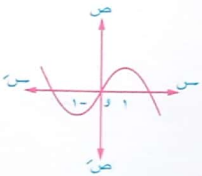
(أ)



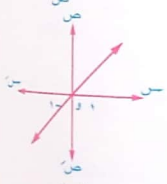
(ب)



(جـ)



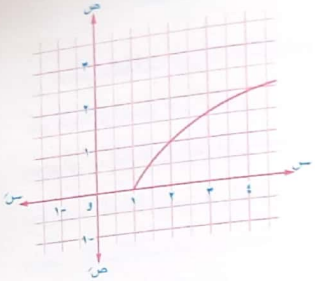
(د)



مسائل تقيس مهارات التفكير

(١١) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الشكل المقابل :



يمثل منحنى دالة ص = د (س)

فإذا كانت معادلة المماس للمنحنى عند أى نقطة عليه (س ، ص) هى ص = ر (س)

أى العبارات الآتية صحيحة لكل س ≤ ١ ؟

(أ) ر (س) = د (س)

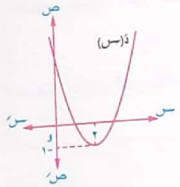
(ب) ر (س) ≥ د (س)

(جـ) ر (س) ≤ د (س)

(د) د (س) + ر (س) < صفر

(٢) الشكل المقابل يمثل منحنى مشتقة الدالة

د : د (س) = س^{٣} + ٢ أ س^{٢} + ب س + ١



فإن د (١) = ...

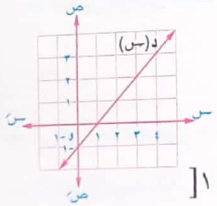
(أ) -١

(ب) -٣

(جـ) ٧

(د) ١١

(٣) الشكل المقابل :



يمثل منحنى الدالة د

فإن د (س) > د' (س) عند س ∈

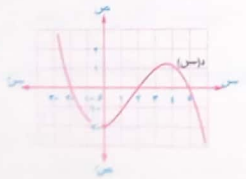
(أ) ح

(ب)]-∞ ، ١[

(جـ)]١ ، ∞[

(د)]٢ ، ∞[

(٤) الشكل المقابل :



يمثل منحنى دالة د كثيرة حدود لها نقطة انقلاب عند س = ٢ فإن د (س) ، د' (س) ، د'' (س) لهم نفس الإشارة عند س ∈

(أ) ح

(ب)]-∞ ، -٢[

(جـ)]٢ ، ٥[

(د)]٥ ، ∞[

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الدرس 6

تطبيقات على القيم العظمى والصغرى

* فى معظم مشكلات الحياة العملية التى تصاغ فى قالب رياضى يكون الهدف هو الحصول على أكبر قيمة أو أصغر قيمة لمتغير ما مثل الحصول على أكبر ربح أو أكبر مساحة أو أقل تكلفة أو أقل حجم أو ... إلخ ، ولا شك فإن حساب التفاضل يعطى لنا أسلوبًا ناجحًا لحل مثل هذه المشكلات.

* لحل هذه المسائل نعبر عن المتغير المراد إيجاد أكبر قيمة له أو أصغر قيمة له كدالة فى متغير واحد وذلك بالاستعانة بالمعطيات الموجودة بالمسألة ثم نوجد القيم العظمى أو الصغرى لهذه الدالة كما شرحنا بالسابق.

ملاحظة

* عند إيجاد أكبر حجم (ح) نضع $\frac{د ح}{د س} = ٠$ ، ونتأكد من أن : $\frac{د^٢ ح}{د س^٢} <$ صفر

* عند إيجاد أقل تكاليف (ت) نضع $\frac{د ت}{د س} = ٠$ ، ونتأكد من أن : $\frac{د^٢ ت}{د س^٢} >$ صفر وهكذا ...

مثال ١

أوجد عددين موجبين مجموعهما ١٢ بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن.

الحل

نفرض أن أحد العددين = س .

∴ العدد الآخر = ١٢ − س

، بفرض أن حاصل ضرب العددين = ص

∴ ص = س (١٢ − س) = ١٢ س − س^٢

وعند القيم العظمى أو الصغرى فإن : صَ = ٠

∴ ١٢ − ٢ س = ٠

، ∵ صً = −٢ < ٠

∴ عند س = ٦ يكون حاصل الضرب (ص) أكبر ما يمكن.

لاحظ أن

العددان موجبان ∴ س > ٠

، ١٢ − س > ٠ أى س < ١٢

∴ ٠ < س < ١٢ أى س ∈]٠ ، ١٢[

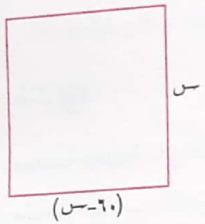
∴ صَ = ١٢ − ٢ س

∴ س = ٦

∴ العددان هما ٦ ، ٦

مثال ٢

قطعة أرض مستطيلة الشكل محاطة بسور طوله ١٢٠ مترًا أوجد بعديها إذا كانت مساحة سطحها أكبر ما يمكن.



الحل

∵ نصف محيط المستطيل = $\frac{١٢٠}{٢}$ = ٦٠ مترًا

ويفرض أن عرض المستطيل = س

∴ طول المستطيل = (٦٠ − س)

ويفرض أن مساحة المستطيل = ص

∴ ص = س (٦٠ − س) = ٦٠ س − س^٢

∴ صَ = ٦٠ − ٢ س

وعند القيم العظمى أو الصغرى فإن : صَ = ٠

∴ ٦٠ − ٢ س = ٠ ∴ س = ٣٠

، ∵ صً = −٢ < ٠

∴ عند س = ٣٠ تكون مساحة المستطيل (ص) أكبر ما يمكن

∴ بعدا المستطيل ٣٠ ، ٣٠ مترًا

أى أن أكبر مساحة للمستطيل تتحقق عندما يكون مربعًا.

لاحظ أن

س > ٠ ، ٦٠ − س > ٠

∴ س < ٦٠

∴ ٠ < س < ٦٠

∴ س ∈]٠ ، ٦٠[

مثال ٣

قطاع دائرى محيطه ١٦ سم أوجد طول نصف قطر دائرته عندما تكون مساحة سطحه أكبر ما يمكن ثم أوجد هذه المساحة.

الحل



نفرض أن طول نصف قطر دائرة القطاع = نق سم

، طول قوس القطاع = ل سم

، ∵ محيط القطاع = ٢ نق + ل

∴ ٢ نق + ل = ١٦

∴ ل = ١٦ − ٢ نق

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

∴ مساحة القطاع (مـ) = $\frac{1}{2}$ ل نق = $\frac{1}{2}$ نق (١٦ − ٢ نق) = ٨ نق − نق^{٢}

∴ مـَ = ٨ − ٢ نق وعند القيم العظمى أو الصغرى فإن مـَ = ٠

∴ ٨ − ٢ نق = ٠ ∴ نق = ٤

∴ مـَ = −٢ < ٠ ∴ عند نق = ٤ تكون مساحة القطاع (مـ) أكبر ما يمكن

∴ ل = ١٦ − ٢ × ٤ = ٨ سم ∴ أكبر قيمة لمساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ × ٤ × ٨ = ١٦ سم^{٢}

مثال ٤

صفيحة معدنية على شكل مستطيل بعداه ١٠ ، ١٦ سم قطعت من أركانها الأربعة ٤ مربعات متطابقة ثم ثنيت الأجزاء البارزة لتكون صندوقًا على شكل متوازى مستطيلات بدون غطاء أوجد طول ضلع المربع المقطوع ليكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن.

الحل

نفرض أن طول ضلع المربع المقطوع = س سم

وأن حجم الصندوق الناتج = ح سم^{٣}

∵ الصندوق الناتج يكون ارتفاعه = س سم

وبعدا قاعدته هما (١٦ − ٢ س) ، (١٠ − ٢ س)

∴ ح = س (١٦ − ٢ س) (١٠ − ٢ س)

= ٤ س^{٣} − ٥٢ س^{٢} + ١٦٠ س

، $\frac{ء ح}{ء س}$ = ١٢ س^{٢} − ١٠٤ س + ١٦٠

= ٤ (٣ س^{٢} − ٢٦ س + ٤٠)

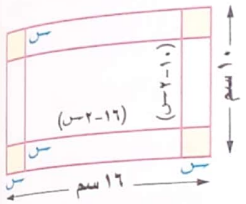
= ٤ (س − ٢) (٣ س − ٢٠)

، وعند القيم العظمى أو الصغرى فإن : $\frac{ء ح}{ء س}$ = ٠ ∴ (س − ٢) (٣ س − ٢٠) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = $\frac{٢٠}{٣}$ (مرفوض لأن $\frac{٢٠}{٣}$ ∉]٠ ، ٥[)

، ∵ $\frac{ء^{٢} ح}{ء س^{٢}}$ = ٤ (٦ س − ٢٦) ∴ $\left(\frac{ء^{٢} ح}{ء س^{٢}}\right)_{س=٢}$ = −٥٦ < ٠

∴ عند س = ٢ يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن.



لاحظ أن

س > ٠ ، ١٠ − ٢ س > ٠

أى ٢ س < ١٠ أى س < ٥

∴ ٠ < س < ٥

أى أن س ∈]٠ ، ٥[

مثال ٥

مصنع دراجات يمكنه بيع عدد س دراجة (من نفس النوع) أسبوعيًا بسعر الدراجة الواحدة ع = (٢٠٠ − ٠,٠١ س) جنيهًا. فإذا علم أن المصنع يتكلف مبلغًا قدره ص = (٥٠ س + ٢٠٠٠) جنيهًا لإنتاج هذا العدد من الدراجات.

فأوجد حجم الإنتاج الذى يعطى المصنع أكبر قدر من الربح. وما هو سعر بيع الدراجة فى هذه الحالة ؟

الحل

∵ ثمن بيع الدراجة = (٢٠٠ − ٠,٠١ س) جنيهًا ، ∵ عدد الدراجات = س دراجة

∴ سعر بيع الدراجات = س (٢٠٠ − ٠,٠١ س) جنيهًا.

∵ التكلفة الكلية = (٥٠ س + ٢٠٠٠) جنيهًا.

∵ ربح المصنع (م) = ثمن بيع الدراجات − التكلفة الكلية

∴ م = س (٢٠٠ − ٠,٠١ س) − (٥٠ س + ٢٠٠٠)

∴ م = ٢٠٠ س − ٠,٠١ س^{٢} − ٥٠ س − ٢٠٠٠

∴ م = ١٥٠ س − ٠,٠١ س^{٢} − ٢٠٠٠ ∴ $\frac{ء م}{ء س}$ = ١٥٠ − ٠,٠٢ س

، عند القيم العظمى أو الصغرى فإن $\frac{ء م}{ء س}$ = ٠ ∴ ١٥٠ − ٠,٠٢ س = ٠

∴ س = ٧٥٠٠

∵ $\frac{ء^{٢} م}{ء س^{٢}}$ = −٠,٠٢ < صفر

∴ عند س = ٧٥٠٠ دراجة يكون ربح المصنع أكبر ما يمكن

ويكون سعر بيع الدراجة فى هذه الحالة = ٢٠٠ − ٠,٠١ × ٧٥٠٠ = ١٢٥ جنيهًا.

مثال ٦

أوجد أكبر حجم لأسطوانة دائرية قائمة إذا كانت المساحة الكلية لسطحها تساوى ٢٤ π سم^{٢}

الحل

نفرض أن طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة = نق سم ، وارتفاعها = ع سم وحجمها = ح سم^{٣}

∴ ح = π نق^{٢} ع (١)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

∵ المساحة الكلية = مجموع مساحتى قاعدتيها + مساحة السطح الجانبى.

∴ ٤ π = π ٢ نق^{٢} + ٢ π نق ع (وبالقسمة على ٢ π)

∴ نق^{٢} + نق ع = ١٢

∴ ع = $\frac{١٢ - نق^{٢}}{نق}$ (٢)

وبالتعويض من (٢) فى (١) :

∴ ح = π نق^{٢} × $\frac{١٢ - نق^{٢}}{نق}$ = π (١٢ نق − نق^{٣})

∴ $\frac{ء ح}{ء نق}$ = π (١٢ − ٣ نق^{٢}) = ٣ π (٤ − نق^{٢}) = ٣ π (٢ − نق) (٢ + نق)

، عند القيم العظمى أو الصغرى فإن : $\frac{ء ح}{ء س}$ = ٠ ∴ ٣ π (٢ − نق) (٢ + نق) = ٠

∴ نق = ٢ ، نق = −٢ (مرفوض)

، ∵ $\frac{ء^{٢} ح}{ء نق^{٢}}$ = −٦ π نق

∴ $\left(\frac{ء^{٢} ح}{ء نق^{٢}}\right)_{نق = ٢}$ = −١٢ π < ٠

∴ عند نق = ٢ يكون حجم الأسطوانة أكبر ما يمكن.

∴ أكبر حجم للأسطوانة = π × (٢)^{٢} × $\frac{٤ - ١٢}{٢}$ = ١٦ π سم^{٣}

مثال ٧

يراد صنع خزان على شكل متوازى مستطيلات قاعدته مربعة وبدون غطاء بحيث يتسع لأربعة أمتار مكعبة من الماء وتتكلف المادة التى يصنع منها الخزان ١٠ جنيهات للمتر المربع

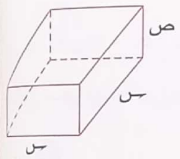
أوجد أبعاد الخزان التى تجعل التكلفة أقل ما يمكن.

الحل

نفرض أن طول ضلع قاعدة الخزان = س مترًا

وارتفاعه = ص مترًا

∴ س^{٢} ص = ٤ ∴ ص = $\frac{٤}{س^{٢}}$ (١)



فإذا رمزنا لتكلفة صنع الخزان بالرمز ت

∴ ت = مساحة الخزان × ١٠ = (٤ س ص + س^{٢}) × ١٠ (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢) : ∴ ت = (٤ س × $\frac{٤}{س^{٢}}$ + س^{٢}) × ١٠

∴ ت = $\frac{١٦٠}{س}$ + ١٠ س^{٢} ∴ تَ = $\frac{-١٦٠}{س^{٢}}$ + ٢٠ س

، عند القيم العظمى أو الصغرى فإن : تَ = صفر

∴ ٢٠ س − $\frac{١٦٠}{س^{٢}}$ = ٠ ∴ س^{٣} = ٨ ∴ س = ٢

، تَ = $\frac{-(-١٦٠) \times ٢ س}{س^{٤}}$ + ٢٠ ∴ تَ = $\frac{٣٢٠}{س^{٣}}$ + ٢٠ ∴ (تَ)$_{س=٢}$ = ٦٠ > ٠ .

∴ عند س = ٢ تكون التكلفة (ت) أقل ما يمكن وعند س = ٢ ∴ ص = ١

∴ أبعاد الخزان التى تجعل تكلفة صنعه أقل ما يمكن هى ٢ ، ٢ ، ١ مترًا.

مثال ٨

أوجد النقط الواقعة على المنحنى : س^{٢} − ص^{٢} = ٢ بحيث تكون المسافة بينها وبين النقطة (٠ ، ١) أقل ما يمكن.

الحل

نفرض أن النقط على الصورة (س ، ص) والمسافة = ف

∴ ف = $\sqrt{(س - ٠)^{٢} + (ص - ١)^{٢}}$ = $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢} - ٢ ص + ١}$

، ∵ س^{٢} = ص^{٢} + ٢

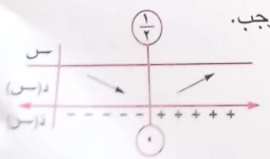
∴ ف = $\sqrt{ص^{٢} + ٢ + ص^{٢} - ٢ ص + ١}$ = $\sqrt{٢ ص^{٢} - ٢ ص + ٣}$

∴ $\frac{ء ف}{ء ص}$ = $\frac{٤ ص - ٢}{٢\sqrt{٢ ص^{٢} - ٢ ص + ٣}}$ = $\frac{٢ ص - ١}{\sqrt{٢ ص^{٢} - ٢ ص + ٣}}$

، عند القيم العظمى أو الصغرى فإن : $\frac{ء ف}{ء ص}$ = ٠

∴ ٢ ص − ١ = ٠ ∴ ص = $\frac{١}{٢}$

، ∵ إشارة $\frac{ء ف}{ء ص}$ تتغير بجوار ص = $\frac{١}{٢}$ من السالب إلى الموجب.



∴ عند ص = $\frac{١}{٢}$ تكون المسافة أقل ما يمكن.

∴ س^{٢} = $\frac{١}{٤}$ + ٢ = ٢ $\frac{١}{٤}$ ∴ س = ± $\frac{٣}{٢}$

∴ النقط هى $\left(\frac{٣}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$ ، $\left(\frac{-٣}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الوحدة 3

حل آخر :

∵ ف = $\sqrt{ص^2 - 2ص + 2}$ (بتربيع الطرفين)

∴ ف^2 = ص^2 − 2ص + 2

∴ 2 ف ف$'$ = 2ص − 2

وبوضع ف$'$ = صفر

∴ 4ص − 2 = ٠

∴ ص = $\frac{1}{2}$

∵ إشارة ف$'$ تتغير بجوار ص = $\frac{1}{2}$ من السالب إلى الموجب

∴ عند ص = $\frac{1}{2}$ تكون المسافة أقل ما يمكن

∵ س^2 = $\frac{1}{4}$ + 2 = 2$\frac{1}{4}$

∴ س = ± $\frac{3}{2}$

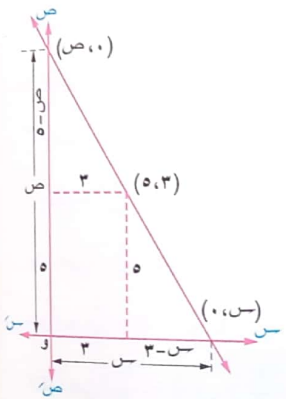
∴ النقط هى $(\frac{3}{2}، \frac{1}{2})$ ، $(-\frac{3}{2}، \frac{1}{2})$

مثال ٩

أوجد أصغر مساحة للمنطقة المثلثة الواقعة فى الربع الأول والمحدودة بالمستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٥) ومحورى الإحداثيات.

الحل

نفرض أن المستقيم يقطع محورى الإحداثيات فى النقطتين (س ، ٠) ، (٠ ، ص)



ومن هندسة الشكل نجد أن : $\frac{ص}{س} = \frac{5}{س - 3}$

∴ ص = $\frac{5س}{س - 3}$ (١)

وبفرض أن مساحة المثلث = م

∴ م = $\frac{1}{2}$ س ص (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ م = $\frac{1}{2}$ س × $\frac{5س}{س - 3}$ = $\frac{5س^2}{2س - 6}$

∴ $\frac{م}{س}$ = $\frac{(2س - 6) \times 10س - 5س^2 \times 2}{(2س - 6)^2}$ = $\frac{10س^2 - 60س}{(2س - 6)^2}$

عند القيم العظمى أو الصغرى فإن : $\frac{م}{س}$ = ٠

∴ 10س^2 − 60س = ٠ ∴ 10س (س − 6) = ٠

∴ س = ٠ (مرفوض) أ، س = ٦ ومنها ص = 10

∵ إشارة $\frac{م}{س}$ تتغير بجوار س = ٦ من السالب إلى الموجب.

∴ عند س = ٦ تكون مساحة المثلث (م) أصغر ما يمكن.

∴ أصغر مساحة = $\frac{1}{2}$ × ٦ × 10 = ٣٠ وحدة مربعة.

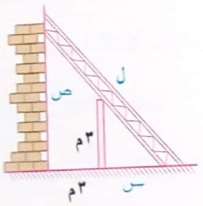
مثال ١٠

جدار ارتفاعه ٣ متر ويبعد ثلاثة أمتار عن أحد المنازل ، أوجد طول أقصر سلم يصل من الأرض إلى المنزل مرتكزًا على الجدار.

الحل

نفرض أن طول السلم = ل مترًا ، ارتفاع قمة السلم عن الأرض = ص مترًا

، بعد طرف السلم السفلى عن الجدار = س مترًا.



∴ من التشابه = $\frac{3}{ص}$ = $\frac{س}{س + 3}$

∴ ص = $\frac{3س + 9}{س}$ = 3 + 9 س$^{-1}$ ∴ $\frac{ص}{س}$ = $\frac{-9}{س^2}$

∴ من فيثاغورس : ∴ ل^2 = (س + 3)^2 + ص^2

∴ 2ل $\frac{ل}{س}$ = 2 (س + 3) + 2ص $\frac{ص}{س}$

∴ 2ل $\frac{ل}{س}$ = 2 (س + 3) + 2 (3 + $\frac{9}{س}$) ($\frac{-9}{س^2}$)

= 2 (س + 3) + 6 (س + 3) ($\frac{-9}{س^2}$)

= 2 (س + 3) [1 − $\frac{27}{س^3}$]

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

، عند القيم العظمى أو الصغرى فإن : $\frac{ع ل}{ع س} = ٠$

$\therefore$ س = −٣ (مرفوض) أ، $\frac{٢٧}{س^٣} = ١$ $\quad\therefore$ س = ٣

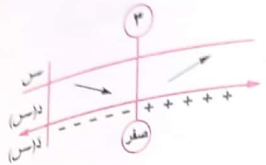
، $\because$ إشارة $\frac{ع ل}{ع س}$ تتغير بجوار س = ٣ من السالب إلى الموجب.

$\therefore$ عند س = ٣ يكون طول السلم أصغر ما يمكن.

$\therefore$ ص = $\frac{٩}{٣} + ٣ = ٦$

$\therefore$ ل = $٢\sqrt{٦}$ متر.

$\therefore$ ل^٢ = $(٣ + ٣)^٢ + (٦)^٢ = ٧٢$

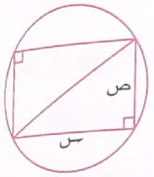


مثال ١١

أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة طول نصف قطرها ٣ سم.

الحـــل

نفرض أن بعدى المستطيل هما س ، ص ونفرض أن مساحته = م



$\therefore$ م = س × ص (١)

، من هندسة الشكل نجد أن س^٢ + ص^٢ = ٣٦

$\therefore$ ص^٢ = ٣٦ − س^٢ $\quad\therefore$ ص = $\sqrt{٣٦ - س^٢}$

وبالتعويض فى (١) : $\therefore$ م = س $\sqrt{٣٦ - س^٢}$

$\therefore$ مَ = س × $\frac{-٢س}{٢\sqrt{٣٦ - س^٢}} + \sqrt{٣٦ - س^٢} = \frac{-س^٢}{\sqrt{٣٦ - س^٢}} + \sqrt{٣٦ - س^٢}$

$= \frac{-س^٢ + ٣٦ - س^٢}{\sqrt{٣٦ - س^٢}} = \frac{٣٦ - ٢س^٢}{\sqrt{٣٦ - س^٢}}$

، عند القيم العظمى أو الصغرى فإن : مَ = صفر

$\therefore$ ٣٦ − ٢ س^٢ = ٠ $\quad\therefore$ ٢ س^٢ = ٣٦

$\therefore$ س^٢ = ١٨ $\quad\therefore$ س = $٣\sqrt{٢}$ ويرفض الحل السالب.

$\therefore$ إشارة مَ تتغير بجوار س = $٣\sqrt{٢}$ من الموجب إلى السالب.

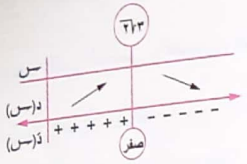
$\therefore$ عند س = $٣\sqrt{٢}$ تكون مساحة المستطيل (م) أكبر ما يمكن.

$\therefore$ ص = $\sqrt{٣٦ - س^٢} = ٣\sqrt{٢}$ سم

$\therefore$ أبعاد المستطيل هى $٣\sqrt{٢}$ ، $٣\sqrt{٢}$

أى أن أكبر مساحة للمستطيل تتحقق عندما يكون مربعًا.

تكون المساحة (م) = $٣\sqrt{٢} \times ٣\sqrt{٢} = ١٨$ سم^٢

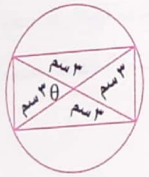


حل آخر:

مساحة أى شكل رباعى = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب القطرين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

$\therefore$ م = $\frac{١}{٢} \times ٦ \times ٦$ جا θ = ١٨ جا θ

$\therefore$ مَ = ١٨ جتا θ وعند القيم العظمى أو الصغرى



فإن : مَ = ٠

$\therefore$ ١٨ جتا θ = ٠ $\quad\therefore$ جتا θ = ٠ $\quad\therefore$ θ = ٩٠°

، $\because$ مً = −١٨ جا θ وعندما θ = ٩٠°

$\therefore$ مً = −١٨ جا ٩٠° = −١٨ < ٠

$\therefore$ المساحة أكبر ما يمكن

$\therefore$ م = ١٨ جا ٩٠° = ١٨ سم^٢

مثال ١٢

رجد أحد مصانع الأجهزة الكهربية أنه يكسب ٥٠ جنيهًا فى كل جهاز إذا كان إنتاجه الشهرى ٨٠ جهازًا فإذا زاد الإنتاج عن هذا العدد فإن الربح فى كل جهاز يقل ٥٠ قرشًا عن كل جهاز زيادة أوجد عدد الأجهزة التى ينتجها المصنع فى الشهر ليحقق أكبر ربح ممكن.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحل

نفرض أن عدد الأجهزة الزائدة = س ∴ العدد الكلى للأجهزة = (س + ٨٠)

∴ ربح كل جهاز = (٥٠ − $\frac{١}{٢}$ س) ∴ الربح الكلى (ر) = (س + ٨٠) (٥٠ − $\frac{١}{٢}$ س)

∴ ر = − $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ١٠ س + ٤٠٠٠

وعند القيم العظمى والصغرى فإن : $\frac{ء ر}{ء س}$ = ٠

∴ − س + ١٠ = ٠ ∴ س = ١٠

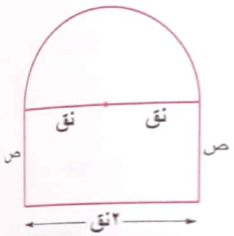
∵ $\frac{ء^{٢} ر}{ء س^{٢}}$ = −١ (سالبة) ∴ عند س = ١٠ يكون الربح الكلى (ر) أكبر ما يمكن.

∴ العدد الكلى للأجهزة = ١٠ + ٨٠ = ٩٠ جهاز.

مثال ١٣

نافذة على هيئة مستطيل يعلوه نصف دائرة ينطبق قطرها على أحد بعدى المستطيل فإذا كان محيط النافذة ٦ أمتار. أوجد طول نصف قطر الدائرة الذى يجعل مساحة النافذة أكبر ما يمكن.

الحل



نفرض طول نصف قطر الدائرة = نق متر

∴ طول المستطيل = ٢ نق متر

، بفرض عرض المستطيل = ص متر

∵ محيط النافذة = ٦ متر ∴ ٢ ص + ٢ نق + π نق = ٦

∴ ص + نق + $\frac{١}{٢}$ π نق = ٣ ∴ ص = ٣ − نق − $\frac{١}{٢}$ π نق (١)

وبفرض أن مساحة النافذة = م ∴ م = ٢ نق ص + $\frac{١}{٢}$ π نق^{٢} (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ م = ٢ نق (٣ − نق − $\frac{١}{٢}$ π نق) + $\frac{١}{٢}$ π نق^{٢} = ٦ نق − ٢ نق^{٢} − π نق^{٢} + $\frac{١}{٢}$ π نق^{٢}

= ٦ نق − ٢ نق^{٢} − $\frac{١}{٢}$ π نق^{٢}

∴ مَ = ٦ − ٤ نق − π نق ، عند القيم العظمى أو الصغرى فإن : مَ = ٠

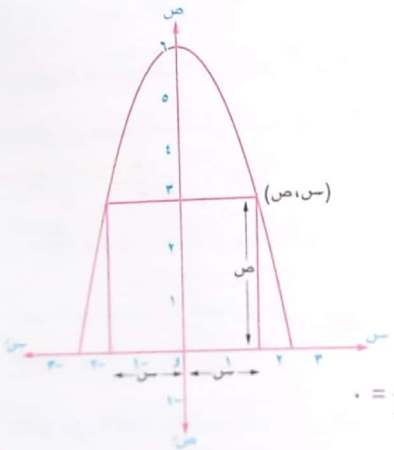
∴ ٦ − ٤ نق − π نق = ٠ ∴ نق = $\frac{٦}{π + ٤}$ متر

، ∵ مَ = − ٤ < ٠ ∴ عند نق = $\frac{٦}{π + ٤}$ تكون مساحة النافذة (م) أكبر ما يمكن.

مثال ١٤

مستطيل يقع أحد أضلاعه على محور السينات ، ويقع الرأسان العلويان للمستطيل على المنحنى : ص = ٦ − س^{٢} أوجد بعدى المستطيل حتى تكون مساحته أكبر ما يمكن.

الحل



نفرض أن مساحة المستطيل = م

ومن هندسة الشكل نجد أن

م = ٢ س × ص

= ٢ س × (٦ − س^{٢})

= ١٢ س − ٢ س^{٣}

∴ $\frac{ء م}{ء س}$ = ١٢ − ٦ س^{٢}

وعند القيم العظمى أو الصغرى فإن : $\frac{ء م}{ء س}$ = ٠

∴ ١٢ − ٦ س^{٢} = ٠

∴ س^{٢} = ٢ ∴ س = $\sqrt{٢}$ والسالب مرفوض

وفى هذه الحالة ص = ٤

∵ $\frac{ء^{٢} م}{ء س^{٢}}$ = −١٢ س ∴ $\left(\frac{ء^{٢} م}{ء س^{٢}}\right)_{س = \sqrt{٢}}$ = −١٢ $\sqrt{٢}$ < ٠

∴ عند س = $\sqrt{٢}$ تكون مساحة المستطيل (م) أكبر ما يمكن

∴ بعدا المستطيل هما ٢ $\sqrt{٢}$ ، ٤

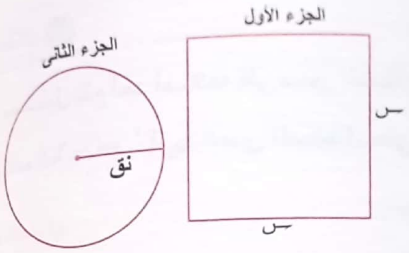
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

3

مثال ١٥

سلك طوله ٤٤ سم قسم إلى جزئين ثم ثنى الجزء الأول على شكل مربع والثانى على شكل دائرة.
أوجد طول نصف قطر الدائرة بحيث يكون مجموع مساحتى الشكلين أقل ما يمكن.

الحل



نفرض أن طول نصف قطر الدائرة = نق سم

، طول ضلع المربع = س سم

∵ محيط الشكلين = ٤ س + ٢ π نق

∴ ٤٤ = ٤ س + ٢ π نق

∴ ٤ س = ٤٤ − ٢ π نق

∴ س = $\frac{٤٤ - ٢\pi نق}{٤}$ = $\left(١١ - \frac{\pi}{٢} نق\right)$ سم

وبفرض أن مجموع مساحتى المربع والدائرة = م ∴ م = س^{٢} + π نق^{٢}

∴ م = $\left(١١ - \frac{\pi}{٢} نق\right)^{٢}$ + π نق^{٢}

∴ $\frac{د م}{د نق}$ = ٢ $\left(١١ - \frac{\pi}{٢} نق\right)\left(-\frac{\pi}{٢}\right)$ + ٢ π نق = −١١ π + $\frac{\pi^{٢}}{٢}$ نق + ٢ π نق

، عند القيم العظمى أو الصغرى فإن : $\frac{د م}{د نق}$ = ٠ ∴ −١١ π + $\frac{\pi^{٢}}{٢}$ نق + ٢ π نق = ٠ .

∴ −١١ + $\frac{\pi}{٢}$ نق + ٢ نق = ٠ ∴ نق $\left(٢ + \frac{\pi}{٢}\right)$ = ١١

∴ نق (π + ٤) = ٢٢ ∴ نق = $\frac{٢٢}{\pi + ٤}$

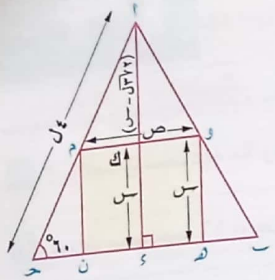
، ∵ $\frac{د^{٢} م}{د نق^{٢}}$ = $\frac{\pi^{٢}}{٢}$ + ٢ π > ٠ .

∴ عند نق = $\frac{٢٢}{\pi + ٤}$ يكون مجموع المساحتين (م) أقل ما يمكن.

مثال ١٦

مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه (٤ ل) سم ، رسم مستطيل بحيث ينطبق بأحد أضلاعه على قاعدة المثلث وتقع رأسا الضلع المقابل على الضلعين الآخرين للمثلث أوجد أبعاد المستطيل ذى أكبر مساحة الذى يمكن رسمه داخل المثلث بالشروط السابقة.

الحل



نفرض أن أبعاد المستطيل هى س ، ص

، نرسم $\overline{أء} \perp \overline{ب حـ}$

∴ أء = ٤ ل جا ٦٠ = ٤ ل × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٢ ل √٣

، ∵ ك ء = س سم

∴ أك = (٢ ل √٣ − س)

ومن هندسة الشكل نجد أن : Δ أ و ك ~ Δ أ ب ء ∴ $\frac{أ و}{أ ب}$ = $\frac{٢ ل \sqrt{٣} - س}{٢ ل \sqrt{٣}}$ (١)

، Δ أ و م ~ Δ أ ب حـ ∴ $\frac{أ و}{أ ب}$ = $\frac{ص}{٤ ل}$ (٢)

ومن (١) ، (٢) ينتج أن : $\frac{ص}{٤ ل}$ = $\frac{٢ ل \sqrt{٣} - س}{٢ ل \sqrt{٣}}$

∴ ص = $\frac{٤ ل}{٢ ل \sqrt{٣}}$ (٢ ل √٣ − س) = ٤ ل − $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ س

وبفرض مساحة المستطيل = (م) سم^{٢}

∴ م = س ص = س (٤ ل − $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ س) = ٤ ل س − $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ س^{٢} ، مَ = ٤ ل − $\frac{٤}{\sqrt{٣}}$ س

وعند القيم العظمى أو الصغرى فإن : مَ = ٠ ∴ ٤ ل − $\frac{٤}{\sqrt{٣}}$ س = ٠ .

∴ $\frac{٤}{\sqrt{٣}}$ س = ٤ ل ∴ س = ل √٣

، ∵ مً = − $\frac{٤}{\sqrt{٣}}$ < ٠ ∴ عند س = ل √٣ تكون مساحة المستطيل (م) أكبر ما يمكن

∴ ص = ٤ ل − $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ × ل √٣ = ٢ ل ∴ أبعاد المستطيل هى (ل √٣) سم ، (٢ ل) سم

وبالتالى فإن أكبر مساحة للمستطيل = ل √٣ × ٢ ل = (٢ ل √٣)^{٢} سم^{٢}

حل آخر : ∵ Δ أ ب حـ متساوى الأضلاع. ∴ ق (∠ب) = ٦٠°

، فى Δ و ب هـ : ظا ٦٠° = $\frac{و هـ}{ب هـ}$ ∴ $\frac{س}{ب هـ}$ = √٣

∴ ب هـ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ س ∴ ص = ٤ ل − ٢ ب هـ = ٤ ل − $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ س

ثم نكمل خطوات الحل كما سبق ...

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمارين 14

تطبيقات على القيم العظمى والصغرى

اختبار تفاعلى

• مفهم • تطبيق • مستويات عليا • من أسئلة الكتاب المدرسى

١ عددان مجموعها ٣٠ وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن ، أوجد العددين. «١٥ ، ١٥»

٢ عددان مجموعهما ١٦ أوجد العددين إذا كان مجموع مربعيهما أصغر ما يمكن. «٨ ، ٨»

٣ عددان موجبان حاصل ضربهما ٣٦ أوجد العددين إذا كان مجموعهما أصغر ما يمكن. «٦ ، ٦»

٤ عددان صحيحان موجبان مجموعهما ٥ ، ومجموع مكعب أصغرهما وضعف مربع الآخر أصغر ما يمكن ، أوجد العددين. «٢ ، ٣»

٥ (دور ثان ٢٠٠٩) مجموع ثلاثة أعداد موجبة هو ٣٦ ، وأكبر هذه الأعداد ضعف أصغرها. أوجد الأعداد الثلاثة بحيث يكون حاصل ضربها أكبر ما يمكن. «٨ ، ١٢ ، ١٦»

٦ ثلاثة أعداد موجبة مجموعها ٢٦ وثانيها ثلاثة أمثال أولها. أوجد هذه الأعداد بحيث يكون مجموع مربعاتها أصغر ما يمكن. «٤ ، ١٢ ، ١٠»

٧ أوجد العدد الموجب الذى إذا أضيف إليه معكوسه الضربى كان الناتج أصغر ما يمكن. «١»

٨ أوجد أكبر مساحة من الأرض مستطيلة الشكل يمكن أن تُحاط بسياج طوله ١٢٠ مترًا. «٩٠٠ م٢»

٩ قطعة من السلك طولها ل صنع منها مستطيل أوجد أبعاد المستطيل بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن. «$\frac{ل}{٤}$ ، $\frac{ل}{٤}$»

١٠ قطاع دائرى محيطه ٣٠ سم ، ومساحته أكبر ما يمكن ، أوجد طول نصف قطر دائرته. «٧,٥ سم»

١١ قطاع من دائرة محيطه ثابت الطول. أثبت أن مساحة سطحه تكون أكبر ما يمكن عندما تكون قياس زاويته المركزية يساوى ٢ زاوية نصف قطرية.

١٢ قطعة معدنية على شكل قطاع دائرى مساحته ١٦ سم٢ ، أوجد طول نصف قطر دائرة القطاع الذى يجعل محيطه أقل ما يمكن ، وما قياس زاويته عندئذ ؟ «٤ ، ٢»

١٣ حقل مفتوح يحده من أحد الجوانب نهر مستقيم ، حدد كيفية وضع سياج حول الجوانب الأخرى من قطعة أرض مستطيلة من الحقل للإحاطة بأكبر مساحة ممكنة بواسطة ٨٠٠ متر من السياج ، وما مساحة هذه الأرض حينئذ ؟ «٢٠٠ ، ٤٠٠ م ، ٨٠٠٠٠ م٢»

١٤ (دور ثان ٢٠٠٣) قطعة أرض مستطيلة الشكل يحدها نهر من أحد أضلاعها ومساحتها ٢٠٤٨ متر مربع ، أوجد بعدى قطعة الأرض اللذين يجعلان طول سور يحيط بأضلاعها الثلاثة أقل ما يمكن. «٣٢ ، ٦٤ متر»

١٥ من مجموعة كل الأزواج المرتبة (س ، ص) للأعداد الصحيحة غير السالبة والتى مجموع مسقطيها ٥ ، أوجد الزوج المرتب الذى يجعل حاصل ضرب مربع المسقط الأول ومكعب المسقط الثانى أكبر ما يمكن. «(٢ ، ٣)»

١٦ (دور أول ٢٠٠٦) أوجد النقط الواقعة على المنحنى : $س^{٢} - ص^{٢} = ٨$ بحيث تكون المسافة بينها وبين النقطة (٠ ، ٢) أقل ما يمكن. «(٣ ، ١) ، (-٣ ، ١)»

١٧ أوجد أقرب نقطة إلى النقطة (٠ ، ٥) وتقع على المنحنى ص = $\frac{١}{٢}$ $س^{٢}$ - ٤ «(-٤ ، ٤) ، (٤ ، ٤)»

١٨ أوجد أقصر بعد بين المستقيم س - ٢ ص + ١٠ = ٠ والمنحنى $ص^{٢} = ٤ س$ «$\frac{٥\sqrt{٢٦}}{٥}$ وحدة طول»

١٩ (دور ثان ٢٠١٤) أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه : أ ب + ب حـ = ٢٠ سم احسب أكبر مساحة ممكنة لهذا المثلث. «٥٠ سم٢»

٢٠ (دور أول ٢٠٠٧) مثلث متساوى الساقين محيطه ٣٠ سم أوجد أطوال أضلاعه لكى تكون مساحة سطحه أكبر ما يمكن. «١٠ ، ١٠ ، ١٠ سم»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢١ إذا كان طول وتر مثلث قائم الزاوية يساوى ١٠ سم ، فأوجد طول كل من ضلعى القائمة عندما تصبح مساحة المثلث أكبر ما يمكن.
« ٥٠ ، ٥√٢ ، ٥√٢ سم »

٢٢ (دورثان ٢٠١٥) أوجد أكبر قيمة ممكنة للمقدار : م = ٢ س + ص إذا كان : س ، ص هى أطوال أضلاع الزاوية القائمة فى مثلث قائم الزاوية طول وتره ٥√٢ سم
« ٥٠ »

٢٣ مثلث قائم الزاوية طول وتره ٣٠ سم ، أوجد طول كل من ضلعيه الآخرين إذا كان طول العمود النازل من رأس الزاوية القائمة على الوتر أكبر ما يمكن.
« ١٥√٢ ، ١٥√٢ سم »

٢٤ مستطيل مساحته ١٦ سم٢ أوجد بعديه عندما يكون طول قطره أصغر ما يمكن.
« ٤ ، ٤ سم »

٢٥ أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة طول نصف قطرها ٤ سم
« ٣٢ سم٢ »

٢٦ (دورثان ٢٠٠٦، ٢٠١١) برهن على أن أكبر مساحة لمستطيل يمكن رسمه داخل دائرة معلومة عندما يكون مربعًا ، وأوجد مساحة هذا المربع بدلالة طول نصف قطرها (نق).
« ٢ نق٢ وحدة مربعة »

٢٧ (دورثان ٢٠٠٠) صفيحة معدنية رقيقة مربعة الشكل طول ضلعها ٢٠ سم ، قطع من أركانها أربعة مربعات متساوية ، ثم ثنى الباقى ليكون صندوقًا بدون غطاء على شكل متوازى مستطيلات. أوجد طول ضلع المربع المقطوع الذى يجعل حجم الصندوق أكبر ما يمكن.
« ٣ ١/٣ سم »

٢٨ قطعة من الورق المقوى على شكل مستطيل ، بعداه ١٥ سم ، ٢٤ سم ، قطع من أركانها الأربعة مربعات متطابقة ، طول ضلع كل منها س سم ، ثم ثنيت الأجزاء البارزة لأعلى لتكون علبة بدون غطاء. احسب أبعاد العلبة عندما يكون لها أكبر حجم ممكن.
« ١٨ ، ٩ ، ٣ سم »

٢٩ (دورأول ٢٠١١) متوازى مستطيلات قاعدته مربعة الشكل ومجموع أطوال أحرفه ٢٤٠ سم أوجد أبعاد متوازى المستطيلات عندما يكون حجمه أكبر ما يمكن.
« ٢٠ ، ٢٠ ، ٢٠ سم »

٣٠ متوازى مستطيلات طول قاعدته ضعف عرضها فإذا كان مجموع أبعاده الثلاثة ١٨٠ سم أوجد هذه الأبعاد التى تجعل حجم متوازى المستطيلات أكبر ما يمكن.
« ٤٠ ، ٨٠ ، ٦٠ سم »

٣١ (دورثان ٢٠٠١) أوجد أكبر حجم لصندوق على هيئة متوازى مستطيلات قاعدته مربعة الشكل ومساحة سطحه الكلية ٣٨٤ سم٢
« ١٢٨ سم٣ »

٣٢ (دورأول ٢٠٠٠، دورثان ٢٠٠٤) متوازى مستطيلات حجمه ٥٧٦ سم٣ والنسبة بين طولى ضلعى قاعدته ٢ : ١ أوجد أبعاد متوازى المستطيلات التى تجعل مساحته الكلية أقل ما يمكن.
« ٦ ، ١٢ ، ٨ سم »

٣٣ (دورأول ٢٠١٠) إذا كان مجموع طول نصف قطر قاعدة أسطوانة دائرية قائمة وارتفاعها يساوى ٣٠ سم فأوجد بدلالة ط أكبر حجم ممكن للأسطوانة.
« ٤٠٠٠ ط سم٣ »

٣٤ إذا كانت المساحة الكلية لأسطوانة دائرية قائمة هى ١٥٠ π سم٢ ، أوجد أكبر حجم لهذه الأسطوانة.
« ٢٥٠ π سم٣ »

٣٥ وعاء أسطوانى مفتوح من قاعدته العليا سعته ٨٠٠٠ π سم٣ ، أوجد أبعاده التى تجعل مساحته السطحية أقل ما يمكن.
« ٢٠ ، ٢٠ سم »

٣٦ تصنع علب أسطوانية الشكل مغلقة لتعبئة المشروبات ، سعة كل منها ك من وحدات الحجم وثابتة السمك بأقل قدر من المادة ، أوجد نسبة ارتفاع العلبة (ع) إلى طول نصف قطر قاعدتها (نق).
« ٢ : ١ »

٣٧ ثمن البيع لسلعة ما هو ١٠٠ − ٠,٠٢ س جنيهًا لكل وحدة من هذه السلعة حيث س هو العدد المنتج من هذه السلعة فإذا كانت تكلفة انتاج س وحده منها يساوى ٤٠ س + ١٥٠٠٠ جنيهًا فما هو عدد السلع الواجب انتاجها لجعل الربح أكبر ما يمكن.
« ١٥٠٠٠ وحدة »

٣٨ تتحرك نقطة على دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم أوجد بعدى النقطة عن طرفى قطر الدائرة بحيث يكون مجموع بعديها أكبر ما يمكن.
« ١٠٠ ، ١٠√٢ ، ١٠√٢ سم »

٣٩ (دورأول ٢٠١٣) أوجد النقط على منحنى الدالة د حيث : د (س) = ٦ / (س٢ + ٣)
والتى يكون ميل المماس عندها أصغر ما يمكن وأيضًا النقط التى يكون ميل المماس عندها أكبر ما يمكن.

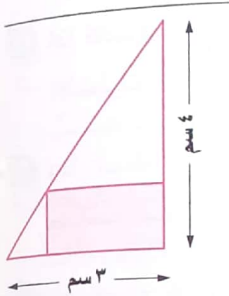
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٤٠ (دور أول ٢٠١٩) إذا كان طولا ضلعين فى مثلث هما الثابتان أ ، ب فأثبت أن : مساحة سطحه تكون أكبر ما يمكن عندما يكون ضلعه الثالث قطرًا فى الدائرة المارة برؤوسه.

٤١ أثبت أنه لجميع قيم س ∈ ع تتحقق المتباينة $\frac{\text{أ س}}{\text{أ س}^2 + \text{ب}} \leq \frac{1}{2\sqrt{\text{أ ب}}}$
حيث أ > ٠ ، ب > ٠

٤٢ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٤ سم ، ب حـ = ٩ سم ، رسم مستقيم يمر بالنقطة حـ ويقطع $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ فى هـ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ فى و أوجد أصغر مساحة للمثلث أ هـ و «٧٢ سم٢»

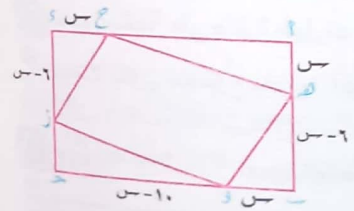
٤٣ (دور أول ٢٠١٩) أوجد :
أبعاد المستطيل المرسوم داخل المثلث الموضح بالشكل بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن.



٤٤ فى مستوى إحداثى متعامد رسم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يمر بالنقطة حـ (٣ ، ٢) ويقطع الجزءين الموجبين من محورى الإحداثيات فى النقطة أ والنقطة ب ، أثبت أن أصغر مساحة للمثلث أ و ب تساوى ١٢ وحدة مربعة حيث و نقطة الأصل (٠ ، ٠)

٤٥ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٠ سم ، م ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$ بحيث ب م = س سم ، ن ∈ $\overline{\text{حـ ء}}$ بحيث حـ ن = $\frac{3}{2}$ س أوجد قيمة س التى تجعل مساحة Δ أ م ن أصغر ما يمكن. «$\frac{10}{3}$»

٤٦ فى الشكل المقابل :
أ ب حـ ء مستطيل :
① أثبت أن الشكل هـ و ز ح متوازى أضلاع مساحته م = ٢ س٢ − ١٦ س + ٦٠
② أوجد أصغر قيمة ممكنة للمساحة م



«٢٨ وحدة مربعة»

٤٧ أ ب حـ مثلث متساوى الساقين حيث أ ب = أ حـ = ٢٠ سم ، ب حـ = ٣٢ سم
أوجد بعدى أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل هذا المثلث بحيث يقع رأسان منه على قاعدة المثلث والرأسان الآخران يقع كل منهما على أحد الساقين. «١٦ سم ، ٦ سم»

٤٨ أ ب حـ مثلث متساوى الساقين طول قاعدته $\overline{\text{ب حـ}}$ يساوى ١٦ سم ، ق (∠ أ) = ١٢٠°
أوجد مساحة سطح أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل المثلث بحيث يقع رأساه على قاعدة المثلث وكل رأس من الرأسين الأخرين تقع على ضلع من الضلعين الآخرين للمثلث.
«$\frac{32\sqrt{3}}{3}$ سم٢»

٤٩ وجد أحد مصانع الأجهزة الكهربية أنه يكسب ٣٠ جنيهًا فى كل جهاز إذا كان انتاجه فى الشهر ٥٠ جهازًا فإذا زاد الإنتاج عن هذا العدد فإن الربح فى كل جهاز يقل ٥٠ قرشًا عن كل جهاز زيادة. أوجد عدد الأجهزة التى ينتجها المصنع فى الشهر ليحقق أكبر ربح ممكن. «٥٥ جهاز»

٥٠ تعطى شدة التيارات (بالأمبير) فى دائرة للتيار المتردد عند أى لحظة ن (ثانية) بالعلاقة ت = ٢ جا ن + ٢ جا ن ، فأوجد القيمة العظمى للتيار فى هذه الدائرة. «$2\sqrt{2}$ أمبير»

٥١ ينمو حجم مزرعة بكتيريا موضوعة فى وسط غذائى طبقًا للعلاقة
د (ن) = $\frac{5000\text{ن}}{100 + \text{ن}^2}$ + ٢٠٠٠ ، حيث الزمن ن مقيس بالساعات
، عين القيمة العظمى لحجم المزرعة. «٢٢٥٠»

٥٢ (دور ثان ٢٠١٨) بحيرة ملوثة بالبكتريا يتم معالجتها بمضاد للبكتريا ، إذا كان عدد البكتريا ع فى كل ١ سم٣ بعد ن يوم يعطى بالعلاقة
ع (ن) = ٢٠ [$\frac{\text{ن}}{12}$ − لو$_{\text{هـ}}$ ($\frac{\text{ن}}{12}$)] + ٣٠ حيث : ١ ≤ ن ≤ ١٥
① متى يكون عدد البكتريا أقل ما يمكن خلال هذه الفترة ؟
② ما هو أقل عدد من البكتريا خلال هذه الفترة ؟

«١٢ يوم ، ٥٠ لكل سم٣»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٥٣ مصنع للحديد ينتج كمية من الحديد الجيد قدرها ص طنًا ومن الحديد الأقل جودة قدرها س طنًا حيث ص = $\frac{٤٠ - ٥ س}{١٠ - س}$ ، س ≠ ١٠ فإذا كان سعر الطن من الحديد الجيد ضعف سعر الطن من الحديد الأقل جودة فأوجد الكمية التى ينتجها المصنع من كل صنف حتى يحقق أكبر إيراد.

«س = ٥ ، ٥ طن ، ص = ٢٠٨ طن تقريبًا»

٥٤ ملعب على شكل مستطيل ينتهى ضلعان متقابلان منه بنصفى دائرة خارج المستطيل طول قطرها مساويًا لطول هذا الضلع. إذا كان محيط الملعب ٤٠٠ مترًا فأثبت أن مساحة سطح الملعب تكون أكبر ما يمكن عندما يكون الملعب على شكل دائرة وأوجد طول نصف قطرها.

«$\frac{٢٠٠}{\pi}$ م»

٥٥ إذا كان مجموع مساحتى سطحى كرة وأسطوانة متفقة معها فى نصف القطر يساوى ٢٥٠ π سم^٢ ، فأوجد طول نصف القطر عندما يكون مجموع حجميهما أكبر ما يمكن.

«٥ سم»

٥٦ جسم مكون من أسطوانة يعلوها نصف كرة تشتركان فى القاعدة العليا للأسطوانة فإذا كانت المساحة الكلية الخارجية للجسم تساوى ٢٠٠٠ π سم^٢ وكان حجم الجسم قيمة عظمى فأوجد ارتفاع الأسطوانة وطول نصف قطر قاعدتها.

«٢٠ سم ، ٢٠ سم»

٥٧ خزان مغطى للمياه ، مكون من متوازى مستطيلات ، قاعدته مربعة الشكل ، طول ضلعها ٢ س وإرتفاعه س ، يعلوه أسطوانة دائرية قائمة طول قطرها ٢ س وارتفاعها ص إذا كان حجم الخزان الكلى ٢٧ مترًا مكعبًا فاحسب قيمة س التى تجعل مساحة الخزان السطحية أقل ما يمكن.

«$\frac{٢}{٣}$»

٥٨ (دور ثان ٢٠١٣) قطعت أسطوانة حجمها ح من كرة مصمتة طول نصف قطرها نق

أثبت أن : أكبر حجم لهذه الأسطوانة هو $\frac{٤ \pi نق^٣}{٣\sqrt{٣}}$

٥٩ مثلث قائم الزاوية طول وتره $٣\sqrt{٣}$ سم دار حول أحد ضلعى القائمة ليكون مخروطًا دائريًا قائمًا.

أوجد طولى ضلعى المثلث بحيث يكون حجم المخروط أكبر ما يمكن.

«١٠ سم ، $٢\sqrt{٢}$ سم»

٦٠ ا ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب وكان ا ب + ب حـ = ٦ سم

أوجد ا ب الذى يجعل حجم الجسم الناشئ من دوران المثلث ا ب حـ حول $\overleftrightarrow{ب حـ}$ دورة كاملة أكبر ما يمكن.

«٤ سم»

٦١ (دور ثان ٢٠٠٢) مستطيل يقع أحد أضلاعه على محور السينات ، ويقع الرأسان العلويان للمستطيل على المنحنى : ص = ٤ − س^٢ أوجد بعدى المستطيل حتى تكون مساحته أكبر ما يمكن.

«$\frac{٤\sqrt{٣}}{٣}$ ، $\frac{٨}{٣}$»

٦٢ مثلث متساوى الساقين رأسه نقطة الأصل وقاعدته قطعة مستقيمة توازى محور السينات وتقع فوقه ويقع طرفاها على المنحنى ١٢ ص = ٣٦ − س^٢ عين أكبر مساحة ممكنة لهذا المثلث.

«٤ $\sqrt{٣}$ وحدة مربعة»

٦٣ (دور أول ٢٠١٢) عين أكبر مساحة لسطح شبه المنحرف ا ب حـ ء الذى فيه :

$\overline{ا ب} // \overline{حـ ء}$ ، ا ب = ا ء = ب حـ = ٦ سم

«٢٧ $\sqrt{٣}$ سم^٢»

٦٤ شبه منحرف متساوى الساقين ، وقاعدته الصغرى ثابتة تساوى ٢ تساوى طول كل من ساقيه المتساويين. أثبت أن قاعدته الكبرى تساوى ٢ ٢ عندما تكون مساحة شبه المنحرف أكبر ما يمكن.

٦٥ (دور أول ٢٠٠٢) ا ب حـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{ا ء} // \overline{ب حـ}$ ، $\overline{ا ب} \perp \overline{ب حـ}$

ا ب = ٢٠ سم ، ا ء = ١٠ سم ، ب حـ = ٣٠ سم ، أوجد بعدى المستطيل الذى يمكن رسمه داخل شبه المنحرف بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن.

«١٥ ، ١٥»

٦٦ (دور أول ٢٠١٦) أوجد مساحة أكبر شبه منحرف يمكن رسمه داخل دائرة طول نصف قطرها الوحدة والذى قاعدته قطر فى الدائرة.

«$\frac{٣\sqrt{٣}}{٤}$ وحدة مربعة»

٦٧ رسم فى نصف دائرة شبه منحرف قاعدته هى قطر نصف الدائرة ، عين قياس زاوية قاعدة شبه المنحرف بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن.

«٦٠°»

٦٨ يراد عمل حوض مكشوف من الصاج قاعدته مربعه بحيث يسع ١٠٨ متر مكعب من الماء. احسب أبعاد الحوض بحيث تكون تكاليف صنعه أقل ما يمكن إذا علم أن ثمن المتر المربع من الصاج يساوى ١٢ جنيهًا وأوجد تكاليف صنعه.

«٦ ، ٦ ، ٣ متر ، ١٢٩٦ جنيهًا»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٦٩ خزان على شكل صندوق مغلق سعته ٢٥٢ مترًا مكعبًا ، وقاعدته مربعة يراد طلاؤه من الداخل بمادة عازلة ، يتكلف القاع ٥٠ جنيهًا لكل متر مربع ، ويتكلف الغطاء ٢٠ جنيهًا لكل متر مربع ، كما يتكلف الجوانب ٣٠ جنيهًا لكل متر مربع ، أوجد أبعاد الصندوق التى تجعل التكلفة أقل ما يمكن.

« ٦ ، ٦ ، ٧ متر »

٧٠ خزان مفتوح (بدون غطاء) ، قاعدته مربعة ، وجوانبه رأسية ، يسع كمية معينة من الماء أثبت أن تكاليف طلاء الخزان من الداخل بطبقة منتظمة عازلة تكون أقل ما يمكن إذا كان عمقه يساوى نصف طول ضلع قاعدته.

٧١ يراد بناء صومعة حبوب على شكل أسطوانه رأسية ذات سقف نصف كروى بحيث تتسع لتخزين ١٠٨ π م^{٣} من الحبوب (بفرض أن تخزين الحبوب يتم فى الجزء الأسطوانى فقط دون السقف) ، إذا كانت تكلفة وحدة المساحة من السقف ضعف تكلفة وحدة المساحة من الجدار الجانبى. ما أبعاد الصومعة التى تجعل التكلفة أقل ما يمكن ؟ « ٣ ، ١٢ م »

٧٢ (دور أول ٢٠٠٢) مجموع محيطى دائرة ومربع يساوى ٨٠ سم ، أثبت أنه عندما يكون مجموع مساحتى سطحى الشكلين أصغر ما يمكن فإن طول قطر الدائرة يكون مساويًا لطول ضلع المربع.

٧٣ سلك طوله ٣٤ سم قسم إلى جزئين ثم ثنى الجزء الأول على شكل مربع والثانى على شكل دائرة. أوجد طول كل جزء بحيث يكون مجموع مساحتى الشكلين أقل ما يمكن.

« $\frac{\pi ٣٤}{٤+\pi}$ ، $\frac{١٣٦}{٤+\pi}$ »

٧٤ (دور أول ٢٠٠١) سلك طوله ٦٨ سم قسم إلى جزئين : ثنى الجزء الأول على شكل مستطيل عرضه س سم وطوله ضعف عرضه. وثنى الجزء الثانى على شكل مربع. أوجد قيمة س بحيث يكون مجموع مساحتى المستطيل والمربع أصغر ما يمكن. « ٦ سم »

٧٥ نافذة على هيئة مستطيل يعلوه مثلث متساوى الساقين تنطبق قاعدته على أحد بعدى المستطيل فإذا كان ارتفاع المثلث $\frac{٣}{٨}$ طول قاعدته ومحيط النافذة ١٢٠ سم. فأوجد بعدى المستطيل التى تجعل مساحة النافذة أكبر ما يمكن. « ٣٢ ، ٢٤ سم »

٧٦ نافذة على هيئة مستطيل يعلوه نصف دائرة ينطبق قطرها على أحد أبعاد المستطيل فإذا كان محيط النافذة ٦ أمتار. أوجد نصف قطر نصف الدائرة الذى يجعل مساحة النافذة أكبر ما يمكن.

« $\frac{٦}{\pi+٤}$ »

٧٧ فى الشكل المقابل :

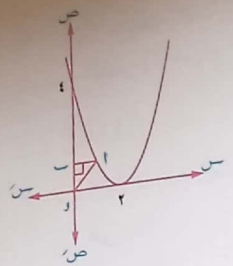
إذا كانت النقطة أ ∈ منحنى الدالة التربيعية

ص = (س − ٢)^{٢}

، $\overline{أ ب}$ // محور السينات

أوجد إحداثى النقطة أ لكى تكون

مساحة Δ و أ ب أكبر ما يمكن

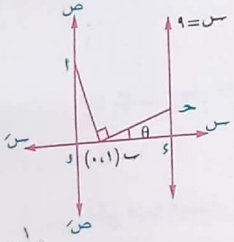


« $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١٦}{٩}$ »

٧٨ فى الشكل المقابل :

أوجد قيمة ظا θ التى تجعل

(أ ب + ب حـ) أقل ما يمكن



« $\frac{١}{٢}$ »

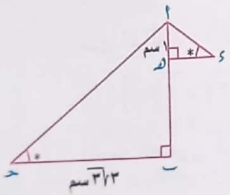
٧٩ فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{أ ب} \perp \overline{ب حـ}$ ، $\overline{ء هـ} \perp \overline{أ ب}$

، أ هـ = ١ سم ، ب حـ = ٣ $\sqrt{٣}$ سم

، ق (∠ء) = ق (∠حـ)

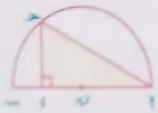
أوجد : طول $\overline{ب هـ}$ الذى يجعل (أ ء + أ حـ) أصغر ما يمكن.



٨٠ فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ قطر فى نصف دائرة هـ ، أ ب = ١٦ سم

أوجد أكبر مساحة للمثلث أ ء حـ



٨١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① أكبر قيمة للمقدار : ٨ س − س^{٢} حيث س ∈ ح هى

(أ) ٨ (ب) ١٢ (جـ) ١٦ (د) ٢٠

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

② إذا كان : س + ص = ١٣ حيث س ، ص أعداد موجبة فإن قيمة س التى تجعل المقدار (٢ س + ٣ ص + س ص) يأخذ قيمة عظمى هى

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

③ (دور أول ٢٠٢١) إذا كانت : س ∈ ع$^{+}$ ، فإن أصغر قيمة للمقدار $\sqrt{٢}$ س + $\frac{١}{س}$ هى

(أ) ٢ $\sqrt[٤]{٤}$ (ب) $\frac{\sqrt[٤]{٤}}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{\sqrt[٤]{٤}}$ (د) $\frac{\sqrt[٤]{٤}}{٣}$

④ مستطيل محيطه ١٤ سم فإن أكبر مساحة له تساوى سم^{٢}

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (جـ) ١٢,٢٥ (د) ٤٩

⑤ إذا كانت : س < ٠ فإن أكبر قيمة للمقدار س + $\frac{١}{س}$ تساوى

(أ) −١ (ب) −٢ (جـ) −٣ (د) غير ذلك.

⑥ أكبر قيمة للمقدار (جا س + $\sqrt{٣}$ جتا س) تكون عندما س = ...

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٦}$ (د) صفر

⑦ مدى الدالة د : د (س) = جا س + جتا س يساوى

(أ) [−$\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٢}$] (ب) [−١ ، ١] (جـ) [٠ ، ١] (د) [٠ ، $\sqrt{٢}$]

⑧ القيمة الصغرى للدالة س لو هـ س تساوى

(أ) هـ (ب) $\frac{١}{هـ}$ (جـ) $\frac{-١}{هـ}$ (د) − هـ

⑨ المستطيلات المرسومة داخل دائرة طول نصف قطرها (نق) فإن أبعاد المستطيل الذى له أكبر مساحة تكون

(أ) $\sqrt{٢}$ نق ، $\sqrt{٢}$ نق. (ب) نق ، $\sqrt{٢}$ نق.

(جـ) ٢ نق ، $\sqrt{٢}$ نق. (د) ٢ نق ، ٢ نق.

⑩ إذا كان محيط قطاع دائرى هو ح فإن المساحة تكون قيمة عظمى عندما نق = ...

(أ) $\frac{ح}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{ح}$ (جـ) $\sqrt{ح}$ (د) $\frac{ح}{٤}$

⑪ ارتفاع أسطوانة لها أكبر حجم موضوعة داخل كرة طول نصف قطرها (نق) يساوى

(أ) $\frac{٢ نق}{\sqrt{٥}}$ (ب) $\frac{٢ نق}{\sqrt{٣}}$ (جـ) ٢ نق (د) ٢ $\sqrt{٣}$ نق

⑫ ارتفاع مخروط له أكبر حجم موضوع داخل كرة طول نصف قطرها (نق) يساوى

(أ) $\frac{٤ نق}{٥}$ (ب) $\frac{٤ نق}{٣}$ (جـ) $\frac{٢ نق}{٣}$ (د) $\frac{٨ نق}{٣}$

⑬ ارتفاع مخروط قائم يمكن وضعه بداخل كرة طول نصف قطرها ٩ سم بحيث يكون حجمه أكبر ما يمكن يساوى سم.

(أ) ٧ (ب) ١٢ (جـ) ٨ (د) ١٠

⑭ أصغر بعد بين نقطة الأصل والمنحنى س = ٢ جا هـ − جا ٢هـ ، ص = ٢ جتا هـ − جتا ٢هـ يساوى وحدة طولية.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

⑮ إذا كان : ل ، م هما جذرا المعادلة س^{٢} − (ك − ١) س + ك + ٢ = ٠ .

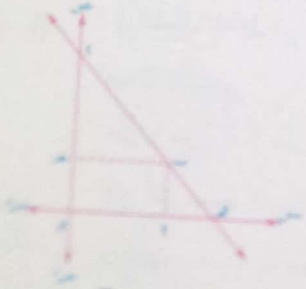
فإن : ك التى تجعل المقدار ل^{٢} + م^{٢} أقل ما يمكن تساوى

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ١,٥ (د) −١,٥

⑯ إذا كانت (أ ، ب) نقطة ثابتة فى المستوى الكارتيزى حيث أ > ٠ ، ب > ٠ ، رسم مستقيم يمر بالنقطة (أ ، ب) ويقطع الجزأين الموجبين من محورى الإحداثيات فى س ، ص فإذا كانت «و» نقطة الأصل فإن أصغر مساحة للمثلث و س ص تساوى وحدة مربعة.

(أ) أ ب (ب) ٢ أ ب (جـ) ٤ أ ب (د) $\frac{١}{٢}$ أ ب

⑰ فى الشكل المقابل :



إذا كانت معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ك هـ}$ هى :

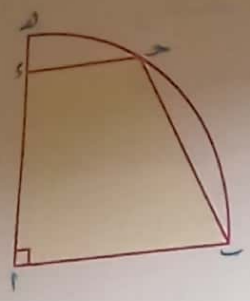
ص = ٣ − س

فإن أكبر مساحة للمستطيل أ ب جـ و تساوى وحدة مربعة.

(أ) $\frac{٩}{٨}$ (ب) $\frac{٩}{٢}$ (جـ) $\frac{٩}{٤}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

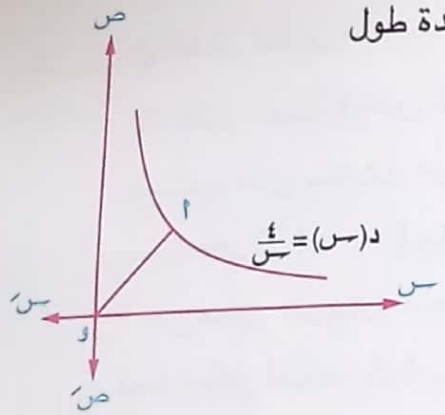
(٢٢) في الشكل المقابل :



ربع دائرة طول نصف قطرها ٤ سم
فإن أكبر مساحة لشبه المنحرف أ ب حـ ء
تساوى سم٢

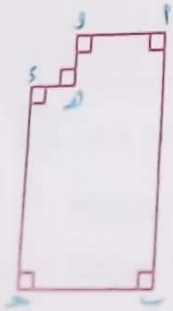
(أ) ٦ (ب) ٦√٣
(جـ) ١٢ (د) ١٢√٣

(٢٣) أقل طول للقطعة المستقيمة و أ = ... وحدة طول



(أ) √٢
(ب) ٢
(جـ) ٢√٢
(د) ٤

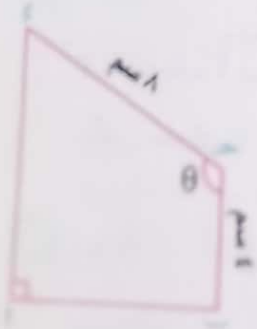
(٢٤) في الشكل المقابل :



إذا كان : حـ ء = ٢ أ و ، و د = د ء
محيط الشكل أ ب حـ ء د و = ٤٠ سم
فإن أكبر مساحة للشكل أ ب حـ ء د و تساوى سم٢

(أ) ٩٠ (ب) ٩٥
(جـ) ١٠٠ (د) ١٠٥

(٢٥) في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شكل رباعى فيه ق (د أ) = ٩٠°
، ق (د حـ) = θ
أ ب = أ ء ، ب حـ = ٤ سم ، حـ ء = ٨ سم
فإذا كانت مساحة الشكل أ ب حـ ء أكبر
ما يمكن فإن θ = ...

(أ) ١٠٥° (ب) ١٢٠° (جـ) ١٣٥° (د) ١٥٠°

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

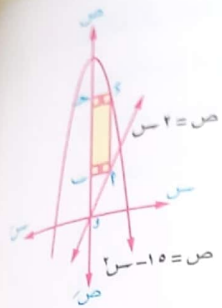
(٢٦) فى الشكل المقابل :

أكبر مساحة للمستطيل أ ب حـ ء

يساوى وحدة مربعة.

(أ) $\frac{٤٠٠}{٢٧}$ (ب) $\frac{٤٠١}{٢٧}$

(جـ) $\frac{٤٠٣}{٢٧}$ (د) $\frac{٤٠٤}{٢٧}$



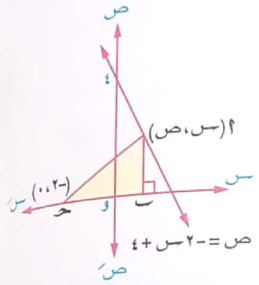
(٢٧) فى الشكل المقابل :

إذا كانت النقطة أ (س ، ص) تتحرك على المستقيم الذى معادلته ص = −٢ س + ٤

بحيث س ∈ [٠ ، ١] وكانت نقطة ب هى مسقط أ على محور السينات ، حـ (−٢ ، ٠) فإن أقل قيمة ممكنة لمساحة Δ أ ب حـ تساوى

وحدة مربعة.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

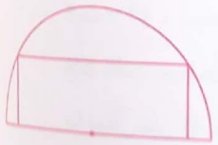


(٨٢) رسم مستقيم يمر بنقطة ثابتة (أ ، ب) تقع فى الربع الأول فقطع الجزءين الموجبين من محورى الإحداثيات $\overleftrightarrow{و\,س}$ ، $\overleftrightarrow{و\,ص}$ فى النقطتين م ، ن أثبت أن أقل مجموع لطولى الجزئين المقطوعين $\overline{و\,م}$ ، $\overline{و\,ن}$ من محورى الإحداثيات يساوى $(\overline{أ\,م} + \overline{أ\,ب})^{٢}$ حيث (و) هى نقطة الأصل.

(٨٣) (دور ثانى ٢٠٠٨) أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم ، ء منتصف $\overline{أ\,ب}$ ، ء ∈ $\overline{ب\,حـ}$ ، ن ∈ $\overline{أ\,حـ}$ أوجد مساحة سطح الشكل أ ء ء ن عندما يكون ب ء × ء حـ أكبر ما يمكن ، $(أ\,ن)^{٢} + (ن\,حـ)^{٢}$ أصغر ما يمكن. «١٢ سم٢»

(٨٤) (دور ثانى ٢٠١٠) فى الشكل المقابل :

مستطيل مرسوم داخل سطح نصف دائرة طول نصف قطرها ٤ سم أوجد بعدى هذا المستطيل عندما تكون مساحة سطحه أكبر ما يمكن.



«٤√٢ ، ٢√٢ سم»

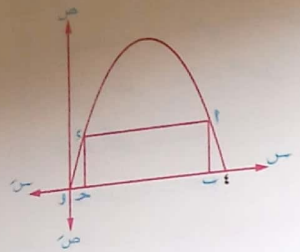
(٨٥) (دور ثانى ٢٠١٢) فى الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د حيث :

د (س) = ٤ − (س − ٢)٢ ، صفر ≤ س ≤ ٤

، رسم المستطيل أ ب حـ ء بحيث يقع الرأسان أ ، ء على هذا المنحنى ، $\overline{ب\,حـ}$ ⊂ $\overleftarrow{و\,س}$

فإذا كان محيط المستطيل أ ب حـ ء أكبر ما يمكن فاحسب مساحة سطحه عندئذ

«٦ وحدة مساحة»

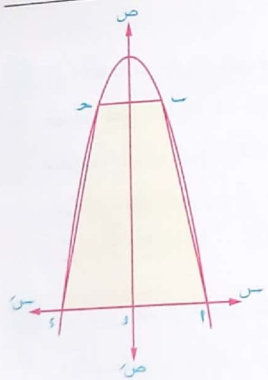


(٨٦) الشكل المقابل :

يمثل منحنى الدالة ص = ٩ − س٢

أوجد أكبر مساحة لشبه المنحرف أ ب حـ ء

«٣٢ وحدة مربعة»



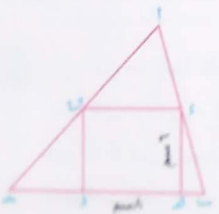
(٨٧) أوجد بعدى مستطيل له أكبر مساحة يمكن رسمه داخل مثلث ، طول قاعدته ١٦ سم وارتفاعه ١٢ سم ، بحيث ينطبق بأحد أضلاعه على قاعدة المثلث وتقع رأسا الضلع المقابل على الضلعين الآخرين للمثلث.

«٦ ، ٨ سم»

(٨٨) (دور أول ٢٠٠٨) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث مختلف الأضلاع ، ء ∈ $\overline{أ\,ب}$ ، ن ∈ $\overline{أ\,حـ}$

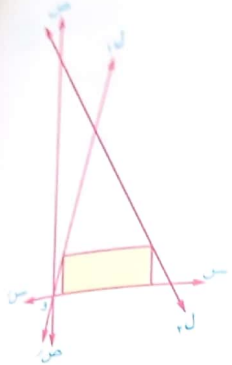
، $\overline{ء\,و}$ ⊂ $\overline{ب\,حـ}$ أوجد أقل مساحة ممكنة للمثلث أ ب حـ



«٢٤ سم٢»

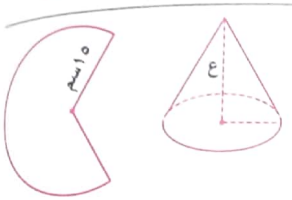
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٨٩ في الشكل المقابل :
المستقيمين ل١ : ص = ٤ س
، ل٢ : ص = ١٨ − ٢ س
أوجد أكبر مساحة
للمستطيل أ ب حـ ء



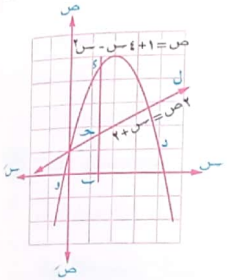
« ٢٧ وحدة مربعة »

٩٠ قطعة من الورق على شكل قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ١٥ سم طويت لتشكل سطح مخروط دائرى قائم ارتفاعه ع سم



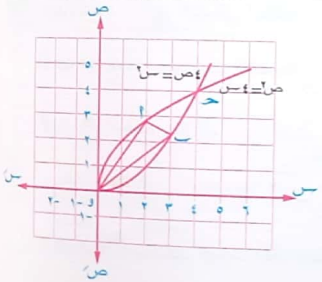
بين أن حجم المخروط ح سم^{٣} يعطى بالعلاقة :
$ح = \frac{\pi}{٣} ع (٢٢٥ - ع^{٢})$ ، ثم أوجد أكبر حجم ممكن لهذا المخروط. « $٢٥٠ \sqrt{٣} \pi$ سم^{٣} »

٩١ يبين الشكل المقابل منحنى الدالة د
، والمستقيم ل إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{ب حـ}$
يوازى محور الصادات ويقطع الجزء الموجب
لمحور السينات ، والمستقيم ل ومنحنى د
فى النقط ب ، حـ ، ء على الترتيب
فأوجد إحداثيى النقطة ب التى
تجعل حـ ء أكبر ما يمكن حيث حـ ∈ $\overline{ء ب}$.



« $(\frac{٧}{٤} ، ٠)$ »

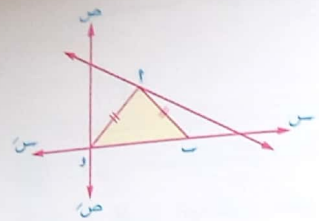
٩٢ لتكن حـ نقطة تقاطع المنحنيين ص^{٢} = ٤ س
، ٤ ص = س^{٢} ، النقطة أ تقع على المنحنى
ص^{٢} = ٤ س وإحداثيها السينى يساوى ٢ ،
النقطة ب (س ، ص) تقع على المنحنى
٤ ص = س^{٢} بين النقطتين و ، حـ ،
أوجد أكبر مساحة ممكنة للمثلث و أ ب



مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

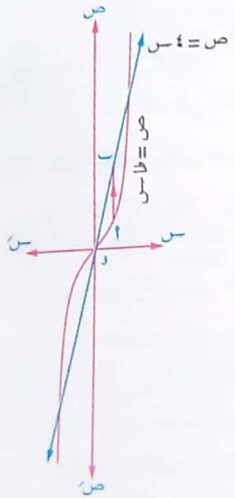
① فى الشكل المقابل :



أ ∈ للمستقيم س + ٣ ص = ٦
أكبر مساحة للمثلث المتساوى الساقين
أ ب و = ... وحدة مربعة.

(أ) ٢ (ب) ٣
(جـ) ٤ (د) ٦

② فى الشكل المقابل :



إذا كان $\overleftrightarrow{أ ب}$ // محور الصادات
فإن أكبر قيمة لطول $\overline{أ ب}$ = ... سم.

(أ) $\frac{٤ \pi - ٣ \sqrt{٣}}{٣}$ (ب) $\frac{٤ \pi + ٣ \sqrt{٣}}{٣}$
(جـ) $\frac{٢ \pi - ٦ \sqrt{٣}}{٣}$ (د) $\frac{٢ \pi + ٦ \sqrt{٣}}{٣}$

③ فى الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث متساوى الساقين
فيه أ ب = ب حـ = ١٠ سم ، ق (∠ حـ) = ٣٠°
فإن أكبر مساحة لشبه المنحرف القائم ب ء هـ و
تساوى سم^{٢}

(أ) $٨ \sqrt{٣}$ (ب) $١٠ \sqrt{٣}$
(جـ) $١٢ \sqrt{٣}$ (د) $١٥ \sqrt{٣}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(١) يراد عمل لوحة للإعلانات مساحتها ٢ م^{٢} بحيث تترك مسافة ٢١ سم من أعلى اللوحة وأسفلها وتترك مسافة ١٤ سم من الجانبين فإن أبعاد اللوحة لتكون المساحة المستخدمة للكتابة عليها أكبر ما يمكن هى متر.

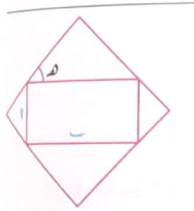
(أ) $\sqrt{٢}$ ، $٢\sqrt{٢}$ (ب) $\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$ ، $\sqrt{٣}$ (جـ) $\frac{٢\sqrt{٥}}{٥}$ ، $\sqrt{٥}$ (د) $\frac{١}{٢}$ ، ٤

٩٤ يراد تصميم ملصق مستطيل الشكل يحوى ٨٠٠ سم^{٢} من المادة المطبوعة بحيث يكون عرض كل من الهامشين العلوى والسفلى ١٠ سم ، وكل من الهامشين الجانبيين ٥ سم ، ما بعدا الملصق اللذان يجعلان مساحته أصغر ما يمكن.
«٦٠ ، ٣٠ سم»

٩٥ $\overline{أب}$ قطر فى دائرة طول نصف قطرها نق رسم مماسان للدائرة عند كل من أ ، ب من النقطة هـ على الدائرة ، رسم مماس آخر للدائرة قطع المماسين السابقين فى ء ، حـ على الترتيب. أثبت أن أصغر مساحة لشبه المنحرف أ ب حـ ء تساوى ٢ نق^{٢} وحدة مربعة.

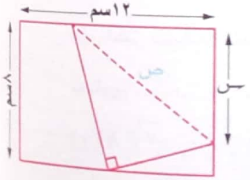
٩٦ أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٢ ل ، هـ منتصف $\overline{ب حـ}$ ، ء $\in \overline{أ ب}$ ، و $\in \overline{أ حـ}$ بحيث $\overline{ء و} \parallel \overline{ب حـ}$ أثبت أن أكبر مساحة للمثلث ء و هـ = $\frac{١}{٤}$ مساحة Δ أ ب حـ

٩٧ (دور أول ٢٠٠٤) فى الشكل المقابل :
أوجد أكبر مساحة للمستطيل الذى يمكن رسمه خارج المستطيل الذى بعداه هما الثابتان أ ، ب



«$\frac{١}{٢}$ (أ + ب)^{٢} وحدة مربعة»

٩٨ الركن العلوى الأيمن من قطعة ورق أبعادها ٨ سم ، ١٢ سم طوى ليقع على الحافة السفلية كما فى الشكل. ما هى قيمة س التى تجعل ص أصغر ما يمكن ؟



٩٩ إذا كانت النقطة أ (٠ ، ٩) ، ب (٠ ، ٤) ، النقطة حـ $\in$ و س أوجد إحداثى حـ ليكون ق (∠ أ حـ ب) أكبر ما يمكن.
«(٠ ، ٦)»

١٠٠ (دور أول ٢٠١٤) أوجد أكبر مساحة لمثلث متساوى الساقين يمكن رسمه داخل دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم.
«٢٩٢,٣٨ سم^{٢}»

١٠١ جدار ارتفاعه ٢ متر ويبعد مترين عن أحد المنازل ، أوجد طول أقصر سلم يصل من الأرض إلى المنزل مرتكزًا على الجدار.
«٤ $\sqrt{٢}$ متر»

١٠٢ رسم مستطيل بحيث تقع رأسان متجاوران منه على المنحنى ص = ١٢ − س^{٢} والرأسان الآخران على المنحنى ص = ١٢ − س^{٢} احسب أكبر مساحة لهذا المستطيل.
«٦٤ وحدة مربعة»

١٠٣ مكعب طول ضلع قاعدته $٢\sqrt{٢}$ ل من وحدات الطول ، صهر وحول إلى منشور ثلاثى قائم قاعدته مثلث متساوى الأضلاع. أثبت أن مساحة سطح المنشور الكلية تكون قيمة صغرى عندما يكون طول ضلع القاعدة يساوى ٢ ل من نفس وحدات الطول.

١٠٤ أوجد ارتفاع أسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل كرة مفرغة طول نصف قطرها من الداخل ١٠ سم ، عندما تكون المساحة الجانبية للأسطوانة أكبر ما يمكن. «١٠٠ $\sqrt{٢}$ سم»

١٠٥ أوجد أبعاد أسطوانة دائرية قائمة يمكن رسمها داخل مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٢٤ سم وطول نصف قطر قاعدته ١٠ سم عندما يكون حجم الأسطوانة أكبر ما يمكن. «$\frac{٢٠}{٣}$ ، ٨ سم»

١٠٦ أثبت أن حجم أكبر مخروط يمكن رسمه داخل كرة طول نصف قطرها ؟ يساوى $\frac{٨}{٢٧}$ من حجم الكرة.

١٠٧ رجل فى قارب عند نقطة حـ تبعد ٥ كيلومترات عن أقرب نقطة أ على شاطئ مستقيم ويرغب فى الوصول إلى نقطة ب على نفس الشاطئ تبعد ٦ كيلومتر من أ فإذا علم أن الرجل يستطيع أن يجدف بسرعة منتظمة ٢ كم/ساعة وأن يمشى على الشاطئ بسرعة منتظمة ٤ كم/ساعة أوجد أين يرسو ليصل إلى ب فى أقل وقت ممكن.
«$\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$ متر من نقطة أ»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الوحدة

4

التكامل المحدد وتطبيقاته

- مقدمة عن التكامل - التفاضلي



يمكنك حل
التمارين
على الدرس
من خلال مسح
الكود
الخاص بكل تمرين

1 طرق التكامل.

2 تكامل الدوال المثلثية

3 التكامل المحدد.

4 المساحات في المستوى.

5 حجوم الأجسام الدورانية.

مقدمة عن التكامل

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

② $\int (أ س + ب)^{ن} \, د س = \frac{(أ س + ب)^{ن+1}}{أ \times (ن + 1)} + ث$ حيث $ن \neq -1$

③ $\int هـ^{س} \, د س = هـ^{س} + ث$

④ $\int أ^{س} \, د س = \frac{أ^{س}}{\ln أ} + ث$

⑥ $\int \frac{1}{س} \, د س = \ln |س| + ث$ حيث : $س \neq 0$

⑦ $\int هـ^{ك س + ب} \, د س = \frac{هـ^{ك س + ب}}{ك} + ث$ حيث : $ك \neq 0$

مثال 1

أوجد كلًا مما يأتي :

① $\int (8 + \sqrt{س} + \frac{4}{\sqrt[5]{س^3}}) \, د س$

② $\int (2 س + 5)^3 \, د س$

③ $\int (هـ^{4 س - 7} + 3^{س} + \frac{5}{س}) \, د س$

④ $\int \frac{د س}{\sqrt{4 س + 1}}$

⑤ $\int س^6 (3 - \frac{2}{س})^6 \, د س$

⑥ $\int (س \sqrt{\frac{3}{س} - \frac{2}{س^2}}) \, د س$

الحل

① $\int (8 + \sqrt{س} + \frac{4}{\sqrt[5]{س^3}}) \, د س = \int (8 + س^{\frac{1}{2}} + 4 س^{-\frac{3}{5}}) \, د س$

$= 8 س + \frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}} + 10 س^{\frac{2}{5}} + ث$

② $\int (2 س + 5)^3 \, د س = \frac{(2 س + 5)^4}{2 \times 4} + ث = \frac{1}{8} (2 س + 5)^4 + ث$

③ $\int (هـ^{4 س - 7} + 3^{س} + \frac{5}{س}) \, د س = \frac{هـ^{4 س - 7}}{4} + \frac{3^{س}}{\ln 3} + 5 \ln |س| + ث$

④ $\int \frac{د س}{\sqrt{4 س + 1}} = \int (4 س + 1)^{-\frac{1}{2}} \, د س = \frac{(4 س + 1)^{\frac{1}{2}}}{4 \times \frac{1}{2}} + ث = \frac{1}{2} (4 س + 1)^{\frac{1}{2}} + ث$

⑤ $\int س^6 (3 - \frac{2}{س})^6 \, د س = \int (س (3 - \frac{2}{س}))^6 \, د س = \int (3 س - 2)^6 \, د س$

$= \frac{(3 س - 2)^7}{3 \times 7} + ث = \frac{1}{21} (3 س - 2)^7 + ث$

⑥ $\int (س \sqrt{\frac{3}{س} - \frac{2}{س^2}}) \, د س = \int س \sqrt{س^2 (\frac{3}{س} - \frac{2}{س^2})} \, د س$

$= \int س \sqrt{3 س - 2} \, د س = \int (3 س - 2)^{\frac{1}{2}} \, د س$

$= \frac{(3 س - 2)^{\frac{3}{2}}}{3 \times \frac{3}{2}} + ث = \frac{2}{9} (3 س - 2)^{\frac{3}{2}} + ث$

تفاضل الدالة ص = د (س)

إذا كانت : ص = د (س) دالة قابلة للاشتقاق عند النقطة

التي إحداثيها السيني = س وكانت (س + Δ س)

تنتمي إلى مجال الدالة

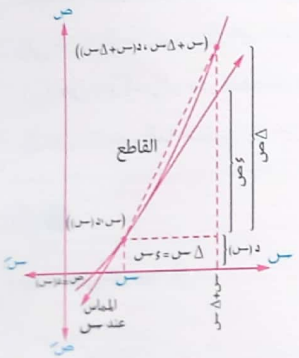
فإذا تغيرت قيمة س من س إلى س + Δ س

فإن : قيمة ص تتغير من ص إلى ص + Δ ص حيث

ص = د (س) ، ص + Δ ص = د (س + Δ س)

فيكون Δ ص = د (س + Δ س) − د (س)

$\therefore \frac{Δ ص}{Δ س} = \frac{د (س + Δ س) - د (س)}{Δ س}$



ومن تعريف المشتقة نعلم أن :

$د'(س) = \text{نهـــا}_{Δ س \to 0} \frac{Δ ص}{Δ س} = \text{نهـــا}_{Δ س \to 0} \frac{د (س + Δ س) - د (س)}{Δ س}$

$\therefore$ عندما Δ س $\to$ 0 فإن : $\frac{Δ ص}{Δ س} \to د'(س)$

أي أن : $\frac{Δ ص}{Δ س} = د'(س)$ عندما Δ س $\to$ 0 ، Δ س $\neq$ 0

$\therefore Δ ص = د'(س) \, Δ س$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الوحدة 4

تعريف

إذا كانت ص = د (س) دالة قابلة للاشتقاق على فترة مفتوحة تحوى س

وكان Δ س يرمز للتغير فى س حيث Δ س ≠ ٠ فإن :

① تفاضلى ص (ويرمز له بالرمز ؏ ص) = د′ (س) Δ س

② تفاضلى س (ويرمز له بالرمز ؏ س) = Δ س

أى أن : ؏ ص = د′ (س) ؏ س أو ؏ ص = ص′ ؏ س

فمثلاً : إذا كانت : ص = س^{٣} فإن : ؏ ص = ٣ س^{٢} ؏ س

، إذا كانت : ع = ل^{٤} فإن : ؏ ع = ٤ ل^{٣} ؏ ل

ملاحظة

لحساب التغير الذى يطرأ على الدالة ص = د (س) عندما تتغير قيمة س من س إلى س + Δ س نوجد Δ ص = د (س + Δ س) − د (س) أو نستخدم تفاضلى الدالة أى ؏ ص = د′ (س) ؏ س فنحصل على قيمة تقريبية للتغير فى الدالة ويصغر الفرق بين Δ ص ، ؏ ص كلما صغرت Δ س

مثال ٢

أوجد تفاضلى كل مما يأتى :

① ص = $\frac{\text{س}}{\text{س}+١}$

② ص = (٢ س − ٣)^{٥}

③ ص = هـ$^{٢ \text{س} - ٣}$

④ م = ٤ π نق^{٢}

الحل

① ∵ ص = $\frac{\text{س}}{\text{س}+١}$

∴ ص′ = $\frac{(\text{س}+١) - \text{س}}{(\text{س}+١)^{٢}} = \frac{١}{(\text{س}+١)^{٢}}$

، ∵ ؏ ص = ص′ ؏ س

∴ ؏ ص = $\frac{١}{(\text{س}+١)^{٢}}$ ؏ س

② ∵ ص = (٢ س − ٣)^{٥}

∴ ص′ = ٥ (٢ س − ٣)^{٤} × ٢ = ١٠ (٢ س − ٣)^{٤}

، ∵ ؏ ص = ص′ ؏ س ∴ ؏ ص = ١٠ (٢ س − ٣)^{٤} ؏ س

③ ∵ ص = هـ$^{٢ \text{س} - ٣}$ ∴ ص′ = ٢ هـ$^{٢ \text{س} - ٣}$

، ∵ ؏ ص = ص′ ؏ س ∴ ؏ ص = ٢ هـ$^{٢ \text{س} - ٣}$ ؏ س

④ ∵ م = ٤ π نق^{٢} ∴ مَ = ٨ π نق

، ∵ ؏ م = مَ ؏ نق ∴ ؏ م = ٨ π نق ؏ نق

مثال ٣

إذا كانت كل من ص ، ع دالة فى س قابلة للاشتقاق فأثبت أن :

① ؏ (ص . ع) = ص ؏ ع + ع ؏ ص

② ؏ $\left(\frac{\text{ص}}{\text{ع}}\right)$ = $\frac{\text{ع ؏ ص} - \text{ص ؏ ع}}{\text{ع}^{٢}}$ (حيث ع ≠ ٠)

الحل

① ؏ (ص ع) = (ص ع)′ ؏ س

= (ص عَ + ع صَ) ؏ س

= ص عَ ؏ س + ع صَ ؏ س = ص (عَ ؏ س) + ع (صَ ؏ س)

= ص ؏ ع + ع ؏ ص

② ؏ $\left(\frac{\text{ص}}{\text{ع}}\right)$ = $\left(\frac{\text{ص}}{\text{ع}}\right)'$ ؏ س = $\frac{\text{ع صَ} - \text{ص عَ}}{\text{ع}^{٢}}$ ؏ س

= $\frac{\text{ع صَ ؏ س} - \text{ص عَ ؏ س}}{\text{ع}^{٢}}$ = $\frac{\text{ع (صَ ؏ س)} - \text{ص (عَ ؏ س)}}{\text{ع}^{٢}}$

= $\frac{\text{ع ؏ ص} - \text{ص ؏ ع}}{\text{ع}^{٢}}$

لاحظ أن

؏ ع = عَ ؏ س

، ؏ ص = صَ ؏ س

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

على متطلبات قبلية
مقدمة عن التكامل - التفاضلى

• فهم • تطبيق • مستويات عليا — من أسئلة الكتاب المدرسى

١ أوجد كلًا مما يأتى :

(١) $\int 5\,d س$

(٢) $\int \left(س^{2} + 5 س + \frac{1}{س^{2}}\right) d س$

(٣) $\int \frac{س^{2} + س + 1}{س\sqrt{س}}\, d س$

(٤) $\int (2 س + 3)^{3}\, d س$

(٥) $\int \sqrt[4]{4 س - 1}\, d س$

(٦) $\int \frac{d س}{\sqrt[3]{3 س - 5}}$

(٧) $\int (هـ^{5 س + 4} + 2^{س} + 3)\, d س$

(٨) $\int 8 س^{6} \left(5 - \frac{2}{س}\right)^{6} d س$

(٩) $\int \left(س \sqrt{\frac{5}{س} - \frac{3}{س^{2}}}\right) d س$

(١٠) $\int (س - 3)(2 س + 7)\, d س$

(١١) $\int \frac{12 س^{4} + 3}{س^{2}}\, d س$

(١٢) $\int \frac{س + 1}{\sqrt[3]{س}}\, d س$

(١٣) $\int (5 - 3 س)^{4}\, d س$

(١٤) $\int \sqrt[3]{3 س + 1}\, d س$

(١٥) $\int \frac{d س}{(3 س - 4)^{6}}$

(١٦) $\int \left(\frac{5}{س} + هـ^{س}\right) d س$

(١٧) $\int (9 س^{2} - 6 س + 1)^{5}\, d س$

(١٨) $\int س \sqrt[3]{\frac{2}{س^{3}} - \frac{1}{س^{2}}}\, d س$

٢ أوجد تفاضلى كل مما يأتى :

(١) $ص = 3 س^{2} - 1$

(٢) $ص = (2 س + 5)^{4}$

(٣) $ص = هـ^{2 س - 2}$

(٤) $ص = \frac{س}{س - 1}$

(٥) $ح = \frac{4}{3} \pi نق^{2}$

(٦) $ص = \sqrt{(2 س + 3)^{5}}$

(٧) $ص = \left(س + \frac{1}{س}\right)^{3}$

(٨) $ص = هـ^{س^{2} + 3 س}$

(٩) $ص = هـ^{جتا 2 س}$

(١٠) $ع = لو_{هـ} (س^{2} + 1)$

(١١) $ع = \left(لو_{هـ} \frac{10}{س}\right)^{2}$

(١٢) $ع = لو_{هـ} طا (3 س - 1)$

٣ إذا كانت ع ، ل دالتين فى المتغير س أوجد تفاضلى كل مما يأتى :

(١) $ص = ع . ل$

(٢) $ص = \frac{ع}{ل}$

٤ إذا كان : $س^{2} + ص^{2} = 25$ أوجد : $d ص$ بدلالة س ، ص ، $d س$

طـرق التكـامل

١ التكامل بالتعويض :

توجد عدة طرق لتحويل التكاملات التى ليست على الصورة القياسية إلى تكاملات على الصورة القياسية وأبسط هذه الطرق وأكثرها شيوعًا هى ما تسمى بطريقة التعويض مع الأخذ فى الاعتبار ما يلى :

* إذا كان التكامل المعطى على الصورة $\int د(ر(س)) \, ر'(س) \, d س$ نستخدم التعويض

$ر(س) = ع$

* إذا احتوى التكامل المعطى على الجذر النونى لدالة أى $\sqrt[ن]{ر(س)}$ نستخدم التعويض

$ر(س) = ع^{ن}$ أ، $ر(س) = ع$

* فى بعض المسائل نستخدم تعويضًا معينًا مناسبًا لها حتى يتم تبسيط التكامل وكتابته على الصورة القياسية.

مثال ١

أوجد كلًا مما يأتى :

(١) $\int 3 س^{2} (س^{3} + 2)^{6} \, d س$

(٢) $\int س^{3} (2 س^{4} + 3)^{5} \, d س$

(٣) $\int \frac{س + 3}{(س^{2} + 6 س)^{7}} \, d س$

(٤) $\int س^{3} (س^{2} + 1)^{5} \, d س$

(٥) $\int \sqrt{س} (\sqrt{س} - 2)^{5} \, d س$

الحل

(١) بوضع $ع = س^{3} + 2$ $\therefore d ع = 3 س^{2} \, d س$

$\therefore \int (س^{3} + 2)^{6} \times 3 س^{2} \, d س = \int ع^{6} \, d ع = \frac{1}{7} ع^{7} + ث = \frac{1}{7} (س^{3} + 2)^{7} + ث$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

② بوضع ع = ٢ س^{٤} + ٣

∴ ء ع = ٨ س^{٣} ء س

∴ ∫ (٢ س^{٤} + ٣)^{٥} × س^{٣} ء س = $\frac{١}{٨}$ ∫ (٢ س^{٤} + ٣)^{٥} × ٨ س^{٣} ء س

= $\frac{١}{٨}$ ∫ ع^{٥} ء ع = $\frac{١}{٨}$ × $\frac{١}{٦}$ ع^{٦} + ث

= $\frac{١}{٤٨}$ (٢ س^{٤} + ٣)^{٦} + ث

③ بوضع ع = س^{٢} + ٦ س

∴ ء ع = (٢ س + ٦) ء س = ٢ (س + ٣) ء س

∴ ∫ $\frac{س + ٣}{(س^{٢} + ٦ س)^{٧}}$ ء س = $\frac{١}{٢}$ ∫ (س^{٢} + ٦ س)$^{-٧}$ × ٢ (س + ٣) ء س

= $\frac{١}{٢}$ ∫ ع$^{-٧}$ ء ع = $\frac{-١}{١٢}$ ع$^{-٦}$ + ث

= $\frac{-١}{١٢}$ (س^{٢} + ٦ س)$^{-٦}$ + ث

④ بوضع ع = س^{٢} + ١ ∴ س^{٢} = ع − ١

∴ س = (ع − ١)$^{\frac{١}{٢}}$ ∴ ء س = $\frac{١}{٢}$ (ع − ١)$^{-\frac{١}{٢}}$ ء ع

∴ ∫ س^{٣} (س^{٢} + ١)^{٥} ء س = ∫ (ع − ١)$^{\frac{٣}{٢}}$ × ع^{٥} × $\frac{١}{٢}$ (ع − ١)$^{-\frac{١}{٢}}$ ء ع

= $\frac{١}{٢}$ ∫ ع^{٥} (ع − ١) ء ع

= $\frac{١}{٢}$ ∫ (ع^{٦} − ع^{٥}) ء ع

= $\frac{١}{١٤}$ ع^{٧} − $\frac{١}{١٢}$ ع^{٦} + ث

= $\frac{١}{١٤}$ (س^{٢} + ١)^{٧} − $\frac{١}{١٢}$ (س^{٢} + ١)^{٦} + ث

② بوضع ع = $\sqrt{س}$ − ٢ ∴ $\sqrt{س}$ = ع + ٢

∴ س = (ع + ٢)^{٢} ∴ ء س = ٢ (ع + ٢) ء ع

∴ ∫ $\sqrt{س}$ ($\sqrt{س}$ − ٢)^{٥} ء س = ∫ (ع + ٢) × ع^{٥} × ٢ (ع + ٢) ء ع

= ٢ ∫ ع^{٥} (ع + ٢)^{٢} ء ع

= ٢ ∫ ع^{٥} (ع^{٢} + ٤ ع + ٤) ء ع

= ٢ ∫ (ع^{٧} + ٤ ع^{٦} + ٤ ع^{٥}) ء ع

= $\frac{١}{٤}$ ع^{٨} + $\frac{٨}{٧}$ ع^{٧} + $\frac{٤}{٣}$ ع^{٦} + ث

= $\frac{١}{٤}$ ($\sqrt{س}$ − ٢)^{٨} + $\frac{٨}{٧}$ ($\sqrt{س}$ − ٢)^{٧} + $\frac{٤}{٣}$ ($\sqrt{س}$ − ٢)^{٦} + ث

مثال ٢

أوجد كلًا مما يأتي :

① ∫ (س^{٢} + ٣) $\sqrt{س}$ − ٢ ء س

② ∫ س^{٢} $\sqrt[٣]{٢ س + ١}$ ء س

③ ∫ س^{٣} $\sqrt{١ − س^{٢}}$ ء س

④ ∫ $\frac{س}{\sqrt{س + ٢}}$ ء س

الحل

① بوضع ع^{٢} = س − ٢ ∴ س = ع^{٢} + ٢ ∴ ء س = ٢ ع ء ع

∫ (س^{٢} + ٣) $\sqrt{س}$ − ٢ ء س = ∫ [(ع^{٢} + ٢)^{٢} + ٣] × ع × ٢ ع ء ع

= ∫ ٢ ع^{٢} (ع^{٤} + ٤ ع^{٢} + ٧) ء ع

= ∫ (٢ ع^{٦} + ٨ ع^{٤} + ١٤ ع^{٢}) ء ع

= $\frac{٢}{٧}$ ع^{٧} + $\frac{٨}{٥}$ ع^{٥} + $\frac{١٤}{٣}$ ع^{٣} + ث

= $\frac{٢}{٧}$ (س − ٢)$^{\frac{٧}{٢}}$ + $\frac{٨}{٥}$ (س − ٢)$^{\frac{٥}{٢}}$

+ $\frac{١٤}{٣}$ (س − ٢)$^{\frac{٣}{٢}}$ + ث

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

∴ ∫ (س² + ٣)√(س − ٢) د س = ∫ [(ع + ٢)² + ٣] × √ع د ع ∴ ع = س − ٢ ∴ د س = د ع

= ∫ (ع^{٥/٢} + ٤ ع^{٣/٢} + ٧ ع^{١/٢}) د ع

= ٢/٧ ع^{٧/٢} + ٨/٥ ع^{٥/٢} + ١٤/٣ ع^{٣/٢} + ث

= ٢/٧ (س − ٢)^{٧/٢} + ٨/٥ (س − ٢)^{٥/٢} + ١٤/٣ (س − ٢)^{٣/٢} + ث

② بوضع ع² = ٢ س + ١ ∴ ٢ س = ع² − ١

∴ س = ١/٢ (ع² − ١) ∴ د س = ٣/٢ ع² د ع

∴ ∫ س² √(٢س + ١) د س = ∫ ١/٤ (ع² − ١)² × ع × ٣/٢ ع² د ع

= ∫ (٣/٨ ع^{٩} − ٣/٤ ع^{٦} + ٣/٨ ع^{٣}) د ع

= ٣/٨٠ ع^{١٠} − ٣/٢٨ ع^{٧} + ٣/٣٢ ع^{٤} + ث

= ٣/٨٠ (٢ س + ١)^{١٠/٢} − ٣/٢٨ (٢ س + ١)^{٧/٢}

+ ٣/٣٢ (٢ س + ١)^{٤/٢} + ث

حل آخر: بوضع ع = ٢ س + ١ ∴ ٢ س = ع − ١

∴ س = ١/٢ (ع − ١) ∴ د س = ١/٢ د ع

∴ ∫ س² √(٢س + ١) د س = ∫ ١/٤ (ع − ١)² √ع × ١/٢ د ع

= ١/٨ ∫ (ع^{٣/٢} − ٢ ع^{١/٢} + ع^{-١/٢}) د ع

= ١/٨ ∫ (ع^{٧/٢} − ٢ ع^{٤/٢} + ع^{١/٢}) د ع

= ٢/٨٠ ع^{١٠/٢} − ٣/٢٨ ع^{٧/٢} + ٣/٣٢ ع^{٤/٢} + ث

= ٢/٨٠ (٢ س + ١)^{١٠/٢} − ٣/٢٨ (٢ س + ١)^{٧/٢}

+ ٣/٣٢ (٢ س + ١)^{٤/٢} + ث

③ بوضع ع = ١ − س² ∴ س² = ١ − ع ∴ س = (١ − ع)^{١/٢}

∴ د س = −١/٢ (١ − ع)^{-١/٢} د ع

∴ ∫ س³ √(١ − س²) د س = ∫ (١ − ع)^{٣/٢} × √ع × −١/٢ (١ − ع)^{-١/٢} د ع

= −١/٢ ∫ ع^{١/٢} (١ − ع) د ع

= −١/٢ ∫ [ع^{١/٢} − ع^{٣/٢}] د ع

= −١/٢ [٢/٣ ع^{٣/٢} − ٢/٥ ع^{٥/٢}] + ث

= −١/٣ ع^{٣/٢} + ١/٥ ع^{٥/٢} + ث

= −١/٣ (١ − س²)^{٣/٢} + ١/٥ (١ − س²)^{٥/٢} + ث

④ بوضع ع = س + ٢ ∴ س = ع − ٢ ∴ د س = د ع

∴ ∫ س/√(س + ٢) د س = ∫ (ع − ٢)/√ع د ع = ∫ (ع^{١/٢} − ٢ ع^{-١/٢}) د ع = ٢/٣ ع^{٣/٢} − ٤ ع^{١/٢} + ث

= ٢/٣ (س + ٢)^{٣/٢} − ٤ (س + ٢)^{١/٢} + ث

ملاحظات

① ∫ (د (س))^ن د' (س) د س = (د (س))^{ن+١} / (ن + ١) + ث

فمثلًا: ∫ (س^٥ + ٢)^٧ × ٥ س^٤ د س = (س^٥ + ٢)^٨ / ٨ + ث

② ∫ د' (س) / د (س) د س = لو_هـ | د (س) | + ث

«إذا كان البسط تفاضل المقام فإن التكامل = لو_هـ | المقام | + ث»

فمثلًا: ∫ (٣ س² + ٢ س) / (س³ + س² + ١) د س = لو_هـ | س³ + س² + ١ | + ث

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الوحدة 4

!

② $\int هـ^{د(س)} د'(س) ء س = هـ^{د(س)} + ث$

فمثلاً : $\int هـ^{٧ س^٢ + ١٤ س} (٢٠ س + ١٤) ء س = هـ^{٧ س^٢ + ١٤ س} + ث$

④ $\int \frac{د'(س)}{\sqrt{د(س)}} ء س = ٢ \sqrt{د(س)} + ث$

«إذا كان البسط تفاضل ما تحت الجذر بالمقام فإن التكامل = ٢ الجذر + ث»

فمثلاً : $\int \frac{٢ س}{\sqrt{س^٢ + ١٥}} ء س = ٢ \sqrt{س^٢ + ١٥} + ث$

ويمكن استخدام التكامل بالتعويض فى إثبات الملاحظات السابقة وذلك بوضع ع = د (س)

∴ $\int ع = د'(س) ء س$ أى أن :

① $\int (د(س))^ن د'(س) ء س = \int ع^ن ء ع = \frac{ع^{ن+١}}{ن+١} + ث = \frac{[د(س)]^{ن+١}}{ن+١} + ث$

② $\int \frac{د'(س)}{د(س)} ء س = \int \frac{ء ع}{ع} = لو_{هـ} |ع| + ث = لو_{هـ} |د(س)| + ث$

③ $\int هـ^{د(س)} د'(س) ء س = \int هـ^ع ء ع = هـ^ع + ث = هـ^{د(س)} + ث$

④ $\int \frac{د'(س)}{\sqrt{د(س)}} ء س = \int \frac{ء ع}{\sqrt{ع}} = ٢ \sqrt{ع} + ث = ٢ \sqrt{د(س)} + ث$

ويمكن استخدام الملاحظات فى حل المسائل مباشرة دون الرجوع لعملية التعويض.

مثال ٣

أوجد كلًا مما يأتى :

① $\int م \sqrt{م^٢ - ١} ء م$

② $\int س^٣ \sqrt{٢ س^٤ + ٣} ء س$

③ $\int \frac{٧ ن ء ن}{\sqrt{٣ - ن^٢}}$

④ $\int \frac{س^٢ + ١}{\sqrt{س^٣ + ٣ س - ٢}} ء س$

⑤ $\int \frac{٢ س - ٣}{س^٢ - ٣ س} ء س$

⑥ $\int س هـ^{س^٢} ء س$

الحل

① $\int م \sqrt{م^٢ - ١} ء م = \frac{١}{٢} \int (م^٢ - ١)^{\frac{١}{٢}} \times ٢ م ء م$ «دالة مضروبة فى تفاضلها»

$= \frac{١}{٢} \times \frac{(م^٢ - ١)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ث$

$= \frac{١}{٣} (م^٢ - ١)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

② $\int س^٣ \sqrt{٢ س^٤ + ٣} ء س = \frac{١}{٨} \int (٢ س^٤ + ٣)^{\frac{١}{٢}} \times ٨ س^٣ ء س$ «دالة مضروبة فى تفاضلها»

$= \frac{\frac{١}{٨} (٢ س^٤ + ٣)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ث$

$= \frac{١}{١٢} (٢ س^٤ + ٣)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

③ $\int \frac{٧ ن ء ن}{\sqrt{٣ - ن^٢}} = \frac{-٧}{٢} \int \frac{-٢ ن}{\sqrt{٣ - ن^٢}} ء ن$ «البسط هو تفاضل ما تحت الجذر بالمقام»

$= -٧ \sqrt{٣ - ن^٢} + ث$

④ $\int \frac{س^٢ + ١}{\sqrt{س^٣ + ٣ س - ٢}} ء س = \frac{١}{٣} \int \frac{٣ (س^٢ + ١)}{\sqrt{س^٣ + ٣ س - ٢}} ء س$ «البسط هو تفاضل ما تحت الجذر بالمقام»

$= \frac{١}{٣} \times ٢ \sqrt{س^٣ + ٣ س - ٢} + ث$

$= \frac{٢}{٣} \sqrt{س^٣ + ٣ س - ٢} + ث$

⑤ $\int \frac{٢ س - ٣}{س^٢ - ٣ س} ء س = لو_{هـ} |س^٢ - ٣ س| + ث$ «البسط هو تفاضل المقام»

⑥ $\int س هـ^{س^٢} ء س = \frac{١}{٢} \int هـ^{س^٢} \times ٢ س ء س = \frac{١}{٢} هـ^{س^٢} + ث$

مثال ٤

أوجد كلًا مما يأتى :

① $\int س (س + ٢)^٨ ء س$

② $\int \frac{١ + \sqrt{س}}{س} ء س$

③ $\int \frac{٢ - \sqrt{س}}{\sqrt{س}} ء س$

④ $\int \frac{لو_{هـ} س}{س} ء س$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحل

① نضع ع = س + ٢ ∴ س = ع − ٢ ∴ ء س = ء ع

∴ ∫ س (س + ٢)^٩ ء س = ∫ (ع − ٢) × ع^٩ ء ع = ∫ (ع^١٠ − ٢ ع^٩) ء ع

= (١/١١) ع^١١ − (٢/١٠) ع^١٠ + ث

= (١/١١) (س + ٢)^١١ − (٢/١٠) (س + ٢)^١٠ + ث

طريقة أخرى :

∫ س (س + ٢)^٩ ء س = ∫ (س + ٢ − ٢) (س + ٢)^٩ ء س

= ∫ [(س + ٢)^١٠ − ٢ (س + ٢)^٩] ء س

= (١/١١) (س + ٢)^١١ − (٢/١٠) (س + ٢)^١٠ + ث

لاحظ أن

يمكننا إعادة كتابة س = (س + ٢ − ٢) وتكملة الحل بدون اللجوء للتعويض.

② نضع ع^٢ = ٢ − √س ∴ √س = ٢ − ع^٢

∴ س = (٢ − ع^٢)^٢ = ٤ − ٤ ع^٢ + ع^٤

∴ ء س = (−٢٠ ع^١ + ١٠ ع^٣) ء ع

∴ ∫ √(٢ − √س) ء س = ∫ ع (−٢٠ ع^١ + ١٠ ع^٣) ء ع = ∫ (−٢٠ ع^٢ + ١٠ ع^٤) ء ع

= (−٢٠/٦) ع^٦ + (١٠/١١) ع^١١ + ث

= (−١٠/٣) (√(٢ − √س))^٦ + (١٠/١١) (√(٢ − √س))^١١ + ث

③ نضع ع = √(١ + √س) ∴ √س = ع^٢ − ١

∴ س = (ع^٢ − ١)^٢ ∴ ء س = ٢ (ع^٢ − ١) ء ع

∴ ∫ √((١ + √س)/س) ء س = ∫ √(ع^٢/((ع^٢ − ١)^٢)) × ٢ (ع^٢ − ١) ء ع = ٢ ∫ √(ع^٢) ء ع = ٢ ∫ ع^٢ ء ع

= (٤/٣) ع^٣ + ث = (٤/٣) (١ + √س)^٣/٢ + ث

④ نضع لو_م س = ع ∴ (١/س) ء س = ء ع

∴ ∫ √(لو_م س)/س ء س = ∫ √(ع) ء ع = ∫ ع^١/٢ ء ع = (٢/٣) ع^٣/٢ + ث = (٢/٣) (لو_م س)^٣/٢ + ث

٢ التكامل بالتجزئ :

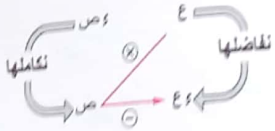
نعلم أنه إذا كان ص ، ع دالتين فى المتغير س وقابلتين للاشتقاق

فإن (ء/ء س) (ص ع) = ص (ء ع/ء س) + ع (ء ص/ء س) وبتكامل الطرفين بالنسبة إلى س

∴ ∫ (ء/ء س) (ص ع) ء س = ∫ ص (ء ع/ء س) ء س + ∫ ع (ء ص/ء س) ء س

∴ ص ع = ∫ ص ء ع + ∫ ع ء ص

∴ ∫ ع ء ص = ص ع − ∫ ص ء ع



أى أن :

∫ (حاصل ضرب دالتين) = (الدالة الأولى) × ∫ (تكامل الثانية) − ∫ [(تكامل الثانية) × (تفاضل الأولى)]

وهذه المعادلة تسمى بقاعدة التكامل بالتجزئ وتستخدم لإيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين ليست أحدهما مشتقة للأخرى وذلك باختيار مناسب لكل من ص ، ع والأمثلة التالية توضح ذلك :

مثال ٥

أوجد كلًا مما يأتى : ① ∫ س هـ^س ء س ② ∫ س/هـ^٢س ء س

الحل

① ∫ س هـ^س ء س

= س هـ^س − ∫ هـ^س ء س

= س هـ^س − هـ^س + ث

= هـ^س (س − ١) + ث



لاحظ أن

إذا كانت الدالة عبارة عن حاصل ضرب دالة «أسية» فى «كثيرة حدود» فإن الدالة الكثيرة الحدود هى التى نفاضلها.

② ∫ (س/هـ^٢س) ء س = ∫ س هـ^−٢س ء س

= − (١/٢) س هـ^−٢س − ∫ − (١/٢) هـ^−٢س ء س

= − (١/٢) س هـ^−٢س + (١/٢) ∫ هـ^−٢س ء س

= − (١/٢) س هـ^−٢س + (١/٢) × (−١/٢) هـ^−٢س + ث

= − (١/٢) س هـ^−٢س − (١/٤) هـ^−٢س + ث



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الوحدة 4

مثال ٦

أوجد كلا مما يأتي :

① $\int$ لو$_{هـ}$ س ء س ② $\int$ س^{٢} لو$_{هـ}$ س ء س ③ $\int \left(\frac{\text{لو}_{هـ}\ س}{\sqrt{س}}\right)$ ء س

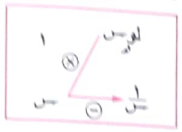
الحل

① $\int$ لو$_{هـ}$ س ء س

$= س\ \text{لو}_{هـ}\ س - \int \frac{١}{س} \times س\ ء س$

$= س\ \text{لو}_{هـ}\ س - \int ١\ ء س$

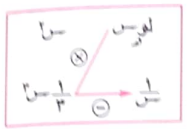
$= س\ \text{لو}_{هـ}\ س - س + ث$



لاحظ أن

إذا كانت الدالة عبارة عن حاصل ضرب دالة «لوغاريتمية» فى «كثيرة حدود» فإن الدالة اللوغاريتمية هى التى نفاضلها.

② $\int$ س^{٢} لو$_{هـ}$ س ء س $= \frac{١}{٣}$ س^{٣} لو$_{هـ}$ س $- \int \frac{١}{٣}$ س$^{٣} \times \frac{١}{س}$ ء س

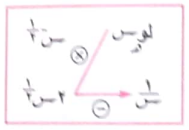


$= \frac{١}{٣}$ س^{٣} لو$_{هـ}$ س $- \int \frac{١}{٣}$ س^{٢} ء س

$= \frac{١}{٣}$ س^{٣} لو$_{هـ}$ س $- \frac{١}{٩}$ س^{٣} + ث

$= \frac{١}{٩}$ س^{٣} [٣ لو$_{هـ}$ س $- ١$] + ث

③ $\int \left(\frac{\text{لو}_{هـ}\ س}{\sqrt{س}}\right)$ ء س $= \int$ (لو$_{هـ}$ س) (س$^{-\frac{١}{٢}}$) ء س



$= ٢ س^{\frac{١}{٢}}$ لو$_{هـ}$ س $- \int \frac{٢}{س} \times س^{\frac{١}{٢}}$ ء س

$= ٢ س^{\frac{١}{٢}}$ لو$_{هـ}$ س $- ٢ \int س^{-\frac{١}{٢}}$ ء س

$= ٢ س^{\frac{١}{٢}}$ لو$_{هـ}$ س $- ٤ س^{\frac{١}{٢}} + ث$

$= ٢ \sqrt{س}$ [لو$_{هـ}$ س $- ٢$] + ث

مثال ٦

أوجد كلا مما يأتي : ① $\int$ س^{٢} هـ^{س} ء س ② $\int$ (س − ١)^{٢} هـ^{٢س} ء س

الحل

① $\int$ س^{٢} هـ^{س} ء س

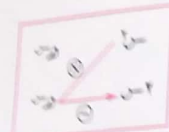
$= س^{٢}$ هـ$^{س} - \int$ (هـ^{س} − ٢ س) ء س

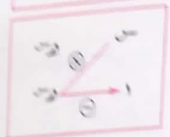
$= س^{٢}$ هـ$^{س} - ٢ \int$ [س هـ^{س} − $\int$ هـ^{س} ء س]

$= س^{٢}$ هـ$^{س} - ٢$ [س هـ^{س} − هـ^{س}] + ث

$= س^{٢}$ هـ$^{س} - ٢$ س هـ$^{س} + ٢$ هـ^{س} + ث

$= هـ^{س}$ (س^{٢} − ٢ س + ٢) + ث





لاحظ أن

يمكن أن نقوم بعملية التكامل أكثر من مرة.

طريقة أخرى باستخدام عمود (التفاضل والتكامل) :

نضع س^{٢} فى عمود التفاضل ونفاضلها حتى ينتهى العمود بالصفر.

نضع هـ^{س} فى عمود التكامل ونكاملها بنفس عدد مرات التفاضل

يكون الناتج هو مجموع حواصل ضرب الأقطار مع تناوب الإشارة كما هو موضح بالجدول.

تفاضل	تكامل
س^{٢} ⊕	هـ^{س}
٢ س ⊖	هـ^{س}
٢ ⊕	هـ^{س}
صفر	هـ^{س}

$\therefore \int$ س^{٢} هـ^{س} = س^{٢} هـ^{س} − ٢ س هـ^{س} + ٢ هـ^{س} + ث

② $\int$ (س − ١)^{٢} هـ^{٢س} ء س $= \frac{١}{٢}$ (س − ١)^{٢} هـ^{٢س}

$- \frac{١}{٢}$ (س − ١) هـ^{٢س}

$+ \frac{١}{٤}$ هـ^{٢س} + ث

تفاضل	تكامل
(س − ١)^{٢} ⊕	هـ^{٢س}
٢ (س − ١) ⊖	$\frac{١}{٢}$ هـ^{٢س}
٢ ⊕	$\frac{١}{٤}$ هـ^{٢س}
صفر	$\frac{١}{٨}$ هـ^{٢س}

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٨

أوجد كلًا مما يأتى : ① $\int س^{٢} هـ^{س^{٣}}$ ء س ② $\int س^{٣} هـ^{س^{٢}}$ ء س

الحل

① بوضع ع = $س^{٣}$ ∴ ء ع = ٣ $س^{٢}$ ء س

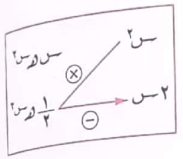
∴ $\int س^{٢} هـ^{س^{٣}}$ ء س = $\frac{١}{٣}\int هـ^{س^{٣}}$ (٣ $س^{٢}$ ء س)

= $\frac{١}{٣}\int هـ^{ع}$ ء ع

= $\frac{١}{٣}$ $هـ^{ع}$ + ث

= $\frac{١}{٣}$ $هـ^{س^{٣}}$ + ث

② نجزئ $س^{٣}$ $هـ^{س^{٣}}$ إلى $س^{٢}$ × س $هـ^{س^{٣}}$



∴ $\int س^{٣} هـ^{س^{٣}}$ ء س = $\frac{١}{٢}$ $س^{٢}$ $هـ^{س^{٣}}$ − $\int$ س $هـ^{س^{٣}}$

= $\frac{١}{٢}$ $س^{٢}$ $هـ^{س^{٣}}$ − $\frac{١}{٢}$ $هـ^{س^{٣}}$ + ث

= $\frac{١}{٢}$ $هـ^{س^{٣}}$ ($س^{٢}$ − ١) + ث

لاحظ أن

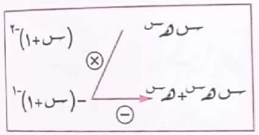
المسألة الأولى تحل بطريقة التعويض أما الثانية فتحل بطريقة التجزئ.

مثال ٩

أوجد كلًا مما يأتى : ① $\int \frac{س\, هـ^{س}}{(س+١)^{٢}}$ ء س ② $\int (١ + ٤ س^{٤}) هـ^{س^{٤}}$ ء س

الحل

① $\int \frac{س\, هـ^{س}}{(س+١)^{٢}}$ ء س = $\int$ س $هـ^{س}$ $(س+١)^{-٢}$ ء س

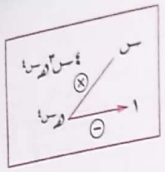


= − س $هـ^{س}$ $(س + ١)^{-١}$

+ $\int (س + ١)^{-١}$ ($س هـ^{س} + هـ^{س}$) ء س

= $\frac{- س هـ^{س}}{(س + ١)} + \int \frac{هـ^{س}}{(س \neq ١)}$ ء س

= $\frac{- س هـ^{س}}{س + ١} + هـ^{س}$ + ث



② $\int (١ + ٤ س^{٤}) هـ^{س^{٤}}$ ء س

= $\int هـ^{س^{٤}}$ ء س + $\int ٤ س^{٤} هـ^{س^{٤}}$ ء س

= $\int هـ^{س^{٤}}$ ء س + $\int$ س × ٤ $س^{٣}$ $هـ^{س^{٤}}$ ء س

= $\int هـ^{س^{٤}}$ ء س + س $هـ^{س^{٤}}$ − $\int هـ^{س^{٤}}$ ء س = س $هـ^{س^{٤}}$ + ث

لاحظ أن

$\int د(س)$ ء س − $\int د(س)$ ء س = ثابت (وليس بالضرورة يساوى صفر)

فمثلًا : $\int س^{٢}$ ء س − $\int س^{٢}$ ء س = $\left(\frac{١}{٣} س^{٣} + ث_{١}\right) - \left(\frac{١}{٣} س^{٣} + ث_{٢}\right)$

= $ث_{١} - ث_{٢}$ = مقدار ثابت.

مثال ١٠

أوجد بطريقتين مختلفتين : $\int \frac{٦ س}{\sqrt[٣]{٢ س + ٣}}$ ء س

الحل

① الحل بطريقة التعويض :

نفرض أن ع = ٢ س + ٣ ∴ ٢ س = ع − ٣

∴ س = $\frac{١}{٢}$ (ع − ٣) ∴ ء س = $\frac{١}{٢}$ ء ع

∴ $\int \frac{٦ س}{\sqrt[٣]{٢ س + ٣}}$ ء س = $\int \frac{٣ (ع - ٣)}{\sqrt[٣]{ع}} \times \frac{١}{٢}$ ء ع

= $\frac{٣}{٢}\int (ع^{\frac{٢}{٣}} - ٣ ع^{-\frac{١}{٣}})$ ء ع

= $\frac{٣}{٢}$ ($\frac{٣}{٥} ع^{\frac{٥}{٣}} - \frac{٩}{٢} ع^{\frac{٢}{٣}}$) + ث

= $\frac{٩}{١٠} ع^{\frac{٥}{٣}} - \frac{٢٧}{٤} ع^{\frac{٢}{٣}}$ + ث

= $\frac{٩}{٢٠} ع^{\frac{٢}{٣}}$ [٢ ع − ١٥] + ث

= $\frac{٩}{٢٠} (٢ س + ٣)^{\frac{٢}{٣}} (٢ (٢ س + ٣) - ١٥)$ + ث

= $\frac{٩}{٢٠} (٢ س + ٣)^{\frac{٢}{٣}} (٤ س - ٩)$ + ث

CamScanner الممسوحة ضوئيا بـ

② الحل بطريقة التحرق :

$$\int \frac{٦ س}{\sqrt{٢ س + ٣}} \, د س$$

$$= \int ٦ س (٢ س + ٣)^{-\frac{١}{٢}} \, د س$$

$$= ٦ س \times \frac{٣}{٤} (٢ س + ٣)^{\frac{١}{٢}} - \int ٦ \times \frac{٣}{٤} (٢ س + ٣)^{\frac{٣}{٢}} \, د س$$

$$= \frac{٩}{٢} س (٢ س + ٣)^{\frac{١}{٢}} - \frac{٩}{٢} \int (٢ س + ٣)^{\frac{٣}{٢}} \, د س$$

$$= \frac{٩}{٢} س (٢ س + ٣)^{\frac{١}{٢}} - \frac{٩}{٢} \times \frac{(٢ س + ٣)^{\frac{٥}{٢}}}{٢ \times \frac{٥}{٣}} + ث$$

$$= \frac{٩}{٢} س (٢ س + ٣)^{\frac{١}{٢}} - \frac{٢٧}{٢٠} (٢ س + ٣)^{\frac{٥}{٢}} + ث$$

$$= \frac{٩}{٢٠} (٢ س + ٣)^{\frac{١}{٢}} (١٠ س - ٣ (٢ س + ٣)) + ث$$

$$= \frac{٩}{٢٠} (٢ س + ٣)^{\frac{١}{٢}} (٤ س - ٩) + ث$$

لاحظ الفرق بين طرق حل كل من التكاملات الآتية

① $\int \frac{١}{س \, لو_{هـ} س} \, د س$ ② $\int \frac{لو_{هـ} س}{س} \, د س$ ③ $\int س \, لو_{هـ} س \, د س$

① $\int \frac{١}{س \, لو_{هـ} س} \, د س = \int \frac{\frac{١}{س}}{لو_{هـ} س} \, د س$ «البسط تفاضل المقام»

$= لو_{هـ} | لو_{هـ} س | + ث$

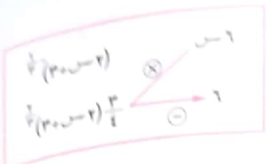
② $\int \frac{لو_{هـ} س}{س} \, د س = \int (لو_{هـ} س) \times \frac{١}{س} \, د س$ «دالة مضروبة × تفاضلها»

$= \frac{(لو_{هـ} س)^{٢}}{٢} + ث$

③ $\int س \, لو_{هـ} س \, د س = \frac{١}{٢} س^{٢} لو_{هـ} س - \int \frac{١}{س} \times \frac{١}{٢} س^{٢} \, د س$ «بالتجزئ»

$= \frac{١}{٢} س^{٢} لو_{هـ} س - \frac{١}{٤} س^{٢} + ث$





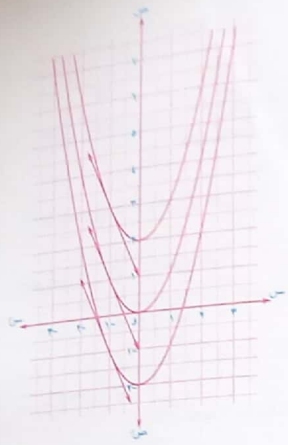
بعض تطبيقات التكامل

بما سبق أنه إذا كانت ص = د (س) هى معادلة منحنى فإن :

ميل المماس له عند أى نقطة (س ، ص) تقع عليه

$= \frac{د ص}{د س} = د'(س)$ وعلى ذلك تكون معادلة هذا المنحنى هى :

$ص = \int د'(س) \, د س$ ، $د(س) = \int د'(س) \, د س$



كما نعلم أيضًا فإن هذا التكامل يحتوى على ثابت اختيارى

ى الممكن أن يأخذ أى قيمة حقيقية ولذلك فإننا نحصل على

عائلة من المنحنيات التى لها نفس ميل المماس عند أى

قيمة معينة للإحداثى السينى س وتحديد فرد معين من هذه

العائلة من المنحنيات يتطلب إعطاء شرط إضافى كأن يمر المنحنى بنقطة معينة

أو يقطع جزءً معينًا من أحد المحورين أو ... كما يتضح لنا ذلك من الأمثلة الآتية :

مثال ⑪

إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة (س ، ص) واقعة عليه يعطى بالعلاقة

$د'(س) = س هـ^{-س}$ فأوجد معادلة المنحنى إذا كان يمر بالنقطة (-١ ، ٣)

الحل

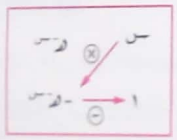
∵ ميل المماس = $س هـ^{-س}$

∴ $د(س) = \int س هـ^{-س} \, د س = -س هـ^{-س} - \int -هـ^{-س} \, د س$

$= -س هـ^{-س} - هـ^{-س} + ث = -هـ^{-س} (س + ١) + ث$

∵ د (-١) = ٣ ∴ $٣ = -هـ (-١ + ١) + ث$ ∴ ث = ٢

∴ $د(س) = -هـ^{-س} (س + ١) + ٣$



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ١٢

إذا كان ميل العمودى لمنحنى الدالة د عند أى نقطة (س ، ص) واقعة عليه هو $\frac{-١}{\sqrt{س - ١}}$

أوجد معادلة المنحنى علمًا بأن المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٧)

الحل

∵ ميل العمودى $= \frac{-١}{\sqrt{س - ١}}$

∴ ميل المماس $= س \sqrt{س - ١}$

∴ د (س) $= \int س \sqrt{س - ١}$ ء س

ويفرض أن $ع^٢ = س - ١$

∴ ء س $= ٢ ع$ ء ع

∴ د (س) $= \int (ع^٢ + ١) \times ع \times ٢ ع$ ء ع $= \int ٢ ع^٢ (ع^٢ + ١)$ ء ع

$= \int (٢ ع^٤ + ٢ ع^٢)$ ء ع $= \frac{٢}{٥} ع^٥ + \frac{٢}{٣} ع^٣ + ث$

$= \frac{٢}{١٥} ع^٣ (٣ ع^٢ + ٥) + ث$

∴ د (س) $= \frac{٢}{١٥} (س - ١)^{\frac{٣}{٢}} [٣ (س - ١) + ٥] + ث$

$= \frac{٢}{١٥} (س - ١)^{\frac{٣}{٢}} (٣ س + ٢) + ث$

∵ د (١) $= ٧$ ∴ $٧ = \frac{٢}{١٥} (١ - ١)^{\frac{٣}{٢}} (٣ \times ١ + ٢) + ث$

∴ ث $= ٧$

∴ د (س) $= \frac{٢}{١٥} (س - ١)^{\frac{٣}{٢}} (٣ س + ٢) + ٧$

مثال ١٣

إذا كان ميل العمودى على منحنى عند أى نقطة (س ، ص) عليه يساوى $\frac{٥ + ٢ ص}{٢ - ٣ س^٢}$ وكان المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٢) فأوجد معادلته.

الحل

∵ ميل العمودى على المنحنى $= \frac{٥ + ٢ ص}{٢ - ٣ س^٢}$

∴ ميل المماس للمنحنى $= - \frac{٢ - ٣ س^٢}{٥ + ٢ ص} = \frac{٣ س^٢ - ٢}{٥ + ٢ ص}$

∴ $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{٣ س^٢ - ٢}{٥ + ٢ ص}$

∴ ص^٢ + ٥ ص $= س^٣ - ٢ س + ث$ ، حيث : ث ثابت

∵ المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٢)

∴ ٤ + ١٠ $= ١ - ٢ + ث$ أى : ص $= ٢$ عندما س $= ١$

∴ ث $= ١٥$

∴ معادلة المنحنى هى : ص^٢ + ٥ ص $= س^٣ - ٢ س + ١٥$

مثال ١٤

إذا كان ميل المماس عند أى نقطة (س ، ص) على المنحنى ص $=$ د (س) هو : ٦ س^٢ − ٣٠ س + ٣٦ ، فأوجد معادلة هذا المنحنى علمًا بأن قيمة ص عند نقطة القيمة العظمى المحلية له تساوى ٢٨ ، وأوجد كذلك نقطة القيمة الصغرى المحلية له.

الحل

∵ دَ (س) $= ٦ س^٢ - ٣٠ س + ٣٦$ ∴ دَ (س) $= ٦ (س^٢ - ٥ س + ٦)$

∴ دَ (س) $= ٦ (س - ٢) (س - ٣)$

∵ دَ (س) $= ٠$ عندما س $= ٢$ ، س $= ٣$

∴ د (س) لها نقطتان حرجتان عند س $= ٢$ ، س $= ٣$

∵ دً (س) $= ١٢ س - ٣٠$ ∴ دً (٢) $= ٢٤ - ٣٠ = -٦ < ٠$

∴ (٢ ، د (٢)) نقطة قيمة عظمى محلية.

∵ دً (٣) $= ٣٦ - ٣٠ = ٦ > ٠$ ∴ (٣ ، د (٣)) نقطة قيمة صغرى محلية

∵ قيمة ص عند نقطة القيمة العظمى المحلية $= ٢٨$

∴ د (٢) $= ٢٨$ ∴ (٢ ، ٢٨) تقع على المنحنى.

∵ دَ (س) $= ٦ س^٢ - ٣٠ س + ٣٦$

∴ معادلة عائلة المنحنيات هى : د (س) $= \int$ دَ (س) ء س

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أى : د (س) = ∫ (٦ س^{٢} − ٣٠ س + ٣٦) ء س

أى : د (س) = ٢ س^{٣} − ١٥ س^{٢} + ٣٦ س + ث

∴ ٢٨ = ١٦ − ٦٠ + ٧٢ + ث

، ∵ د (٢) = ٢٨

∴ ث = ٠

∴ معادلة المنحنى المطلوب هى : ص = ٢ س^{٣} − ١٥ س^{٢} + ٣٦ س

وعند س = ٣ تكون : ص = ٥٤ − ١٣٥ + ١٠٨ = ٢٧

∴ نقطة القيمة الصغرى المحلية هى : (٣ ، ٢٧)

مثال ١٥

أوجد معادلة المنحنى : ص = د (س) إذا علم أن ص$_{س}$ = ٦ س − ٤ والمنحنى له نقطة قيمة صغرى محلية هى (١ ، ٥)

الحل

∵ ص$_{س}$ = ٦ س − ٤

∴ ص (ميل المماس عند أى نقطة عليه) = ∫ ص$_{س}$ ء س = ∫ (٦ س − ٤) ء س

∴ ص = ٣ س^{٢} − ٤ س + ث (١)

∵ (١ ، ٥) نقطة قيمة صغرى محلية للدالة. ∴ ص = ٠ عندما س = ١

وبالتعويض فى (١) : ∴ صفر = ٣ − ٤ + ث ∴ ث = ١

∴ ص = ٣ س^{٢} − ٤ س + ١

∴ معادلة عائلة المنحنيات هى : ص = ∫ (٣ س^{٢} − ٤ س + ١) ء س

أى : ص = س^{٣} − ٢ س^{٢} + س + ث

، ∵ (١ ، ٥) نقطة على منحنى الدالة. ∴ ص = ٥ عندما س = ١

∴ ٥ = ١ − ٢ + ١ + ث ∴ ث = ٥

∴ معادلة المنحنى المطلوب هى : ص = س^{٣} − ٢ س^{٢} + س + ٥

أولًا مسائل على التكامل

أوجد كلًا مما يأتى :

(١) ∫ ٣ س (س^{٢} + ٣)^{٤} ء س

(٢) ∫ س^{٣} (٢ س^{٤} − ٧)^{٥} ء س

(٣) ∫ (س^{٢} − ٤ س + ١)$^{-٣}$ (س − ٢) ء س

(٤) ∫ (١ − س^{٢}) (٣ س − س^{٣})^{٥} ء س

(٥) ∫ س √(س^{٢} + ١) ء س

(٦) ∫ (س − ١) $\sqrt[٣]{س^{٢} - ٢س}$ ء س

(٧) ∫ $\frac{س^{٢}}{(س^{٣} - ٤)^{٥}}$ ء س

(٨) ∫ $\frac{س^{٤}}{(س^{٥} + ١)^{٧}}$ ء س

(٩) ∫ $\frac{س}{(س^{٢} + ٨)^{٣}}$ ء س

(١٠) ∫ $\frac{س^{٢} + ١}{(س^{٣} + ٣ س)^{٦}}$ ء س

(١١) ∫ $\frac{٥ س}{٣ س^{٢} - ١}$ ء س

(١٢) ∫ $\frac{س^{٢}}{س^{٣} + ٥}$ ء س

(١٣) ∫ $\frac{٢ ص^{٣}}{ص^{٤} + ٥}$ ء ص

(١٤) ∫ $\frac{١٢ س + ٢}{٣ س^{٢} + س + ٧}$ ء س

(١٥) ∫ $\frac{س}{\sqrt{١ + ٣ س^{٢}}}$ ء س

(١٦) ∫ $\frac{س^{٣}}{\sqrt{٢ س^{٤} + ٣}}$ ء س

(١٧) ∫ $\frac{س^{٢} + ١}{\sqrt{س^{٣} + ٣ س + ٥}}$ ء س

(١٨) ∫ $\frac{٢ س - ٥}{\sqrt{(س^{٢} - ٥ س + ٧)^{٣}}}$ ء س

(١٩) ∫ $\frac{١}{س^{٢}} (١ + \frac{١}{س})^{٣}$ ء س

(٢٠) ∫ $\frac{ء س}{\sqrt{س} (\sqrt{س} + ٢)^{٥}}$

(٢١) ∫ $\frac{(\sqrt{س} + ٣)^{٥}}{\sqrt{س}}$ ء س

(٢٢) ∫ $\sqrt{\frac{١ + \sqrt{س}}{س}}$ ء س

(٢٣) ∫ (٢ س − ٣)^{٥} (٤ س + ١)^{٥} (٨ س − ٥)^{٥} ء س

(٢٤) ∫ $\sqrt{س^{٣} - ٣ س^{٢} + ٣ س - ٤}$ (س − ١)^{٢} ء س

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٤ أوجد كلًا مما يأتي :

(١) ∫ س (س − ٥)^٢ د س

(٢) ∫ س (٢ س + ٣)^٤ د س

(٣) ∫ س √(س + ٤) د س

(٤) ∫ س √(٣ س + ٥) د س

(٥) ∫ س^٢ √(س + ٢) د س

(٦) ∫ (س^٢ − ١) √(س + ١) د س

(٧) ∫ س^٢ √(س − ٣) د س

(٨) ∫ س^٣ √(١ − س^٢) د س

(٩) ∫ س^٣ √٥ (س^٢ − ١)^٢ د س

(١٠) ∫ س^٥ (س^٢ + ٢)^٤ د س

(١١) ∫ س^٣ (س^٢ − ١)^٥ د س

(١٢) (دور أول ٢٠١٧) ∫ س / (س + ١) د س

(١٣) ∫ س^٢ / (س − ١) د س

(١٤) ∫ س / (س + ١)^٢ د س

(١٥) ∫ س / √(٢ س + ٢) د س

(١٦) ∫ (س + ١) / √(س − ١) د س

(١٧) ∫ ٥ م د م / √(٤ − ٤ م)

(١٨) ∫ س د س / √(٤ س − ١)

(١٩) ∫ س د س / ∛(س + ١)^٣

(٢٠) ∫ √س د س / (√س − ١)^٦

(٢١) ∫ س^٢ / √(٢ س − ١) د س

(٢٢) ∫ س^٣ د س / √(٢ − س^٢)

(٢٣) ∫ د س / ∛(√س + ١)^٢

(٢٤) ∫ د س / √(٢ − √س)

(٢٥) ∫ س^٣ د س / √(س^٢ + ٣)^٣

(٢٦) ∫ س^١٥ (١/س + ١/س^٢)^٧ د س

(٢٧) ∫ ٩ س^٣ √(٤/س^٣ − ٣) د س

(٢٨) ∫ (٢ س − ١) / (٢ س + ٣)^٢ د س

(٢٩) ∫ ((س + ٣)^٢ − ٢٧) / س د س

(٣٠) ∫ س (√س + ٢)^٦ د س

(٣١) ∫ √س (√س − ٣)^٤ د س

(٣٢) ∫ √(س^٢/٤ + س) د س

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

(١) ∫ س^ن د س = س^(ن+١) / (ن + ١) + ث بشرط ن ≠

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) −١

(٢) ∫ ٦ س^٥ (١ − ١/س)^٥ د س = ... + ث

(أ) ٦ (س − ١)^٦ (ب) (س − ١)^٦

(جـ) ١/٦ (س − ١)^٦ (د) (٦ س − ٦)^٦

(٣) ∫ (٤ س^٢ − ٤ س + ١)^٧ / (٢ س − ١)^٢ د س = ... + ث

(أ) ١/١٣ (٢ س − ١)^١٣ (ب) ١/٢٦ (٢ س − ١)^١٣

(جـ) ٢/٣ (٢ س − ١)^١٣ (د) ١/١٦ (٢ س − ١)^٨

(٤) إذا كان : ∫ ٣ س^٢ (س^ن + ١)^٥ د س = (س^ن + ١)^٦ / ٦ + ث فإن : ن = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٦

(٥) إذا كان : ∫ س^٢ د س / √(٢ س^٣ + ١) = ن √(٢ س^٣ + ١) + ث فإن : ن = ...

(أ) ٣ (ب) ١/٣ (جـ) ٦ (د) ١/٦

(٦) ∫ د/د س (س^٥ + √س) د س = ...

(أ) ١/٦ س^٦ + ١/(٢ √س) + ث (ب) س^٤ + ١/٢ س^(−١/٢)

(جـ) س^٥ + √س (د) س^٥ + √س + ث

(٧) إذا كانت : د (س) = ∫ ١/س د س فإن : د′ (٢) = ...

(أ) غير موجودة. (ب) ١/س + ث (جـ) ٢ (د) ١/٢

(٨) ∫ س (س^٢ + ٣)^٥ د س يساوى

(أ) ١/٦ (س^٢ + ٣)^٦ + ث (ب) ١/١٢ (س^٢ + ٣)^٦ + ث

(جـ) ١/٤ (س^٢ + ٣)^٤ + ث (د) ١/٨ (س^٢ + ٣)^٤ + ث

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٩) $\int$ س . د (س^{٢}) . د (س^{٢}) ء س = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٤}$ [د (س^{٢})]^{٢} (ب) $\frac{١}{٢}$ [د (س^{٢})]^{٢}

(جـ) [د (س^{٢})]^{٢} (د) ٢ [د (س^{٢})]^{٢}

(١٠) $\int$ س دَ (١ − س^{٢}) ء س = ... + ث

(أ) − د (١ − س^{٢}) (ب) −٢ د (١ − س^{٢})

(جـ) − $\frac{١}{٢}$ د (١ − س^{٢}) (د) س د (١ − س^{٢})

(١١) $\int$ [$\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{د (س + هـ) − د (س)}{هـ}$] ء س = ...

(أ) دَ (س) (ب) د (س) + ث (جـ) دَ (س) + ث (د) دَ (س) + ث

(١٢) إذا كانت كل من ص ، ع دوال فى س

فإن : $\int$ ص ء ع + $\int$ ع ء ص = ...

(أ) ء (ص ع) (ب) $\int$ ص ع ء س (جـ) ص ع + ث (د) ص + ع + ث

(١٣) إذا كان : $\int$ (٢ س + ٣) لو$_{هـ}$ س ء س = ص ع − $\int$ ع ء ص

فإن : ص ع يساوى

(أ) ٢ س لو$_{هـ}$ س (ب) (٢ س + ٣) لو$_{هـ}$ س

(جـ) $\frac{١}{٢}$ (٢ س + ٣) لو$_{هـ}$ س (د) س (س + ٣) لو$_{هـ}$ س

(١٤) إذا كان : $\int$ (٢ س − ١) هـ$^{٢ س + ٣}$ ء س = ص ع − $\int$ ع ء ص

فإن : $\int$ ع ء ص = ...

(أ) هـ$^{٢ س + ٣}$ + ث (ب) $\frac{١}{٢}$ هـ$^{٢ س + ٣}$ + ث

(جـ) − هـ$^{٢ س + ٣}$ + ث (د) − $\frac{١}{٢}$ هـ$^{٢ س + ٣}$ + ث

٤ أوجد كلًا مما يأتى :

(١) $\int$ س هـ^{س} ء س

(٢) $\int$ س هـ$^{−س}$ ء س

(٣) $\int$ ٤ س هـ$^{٢ س}$ ء س

(٤) $\int$ (س + ١) هـ$^{−٤ س}$ ء س

(٥) (دور ثان ٢٠١٧) $\int$ $\frac{س}{هـ^{٢ س}}$ ء س

(٦) $\int$ $\frac{٣ س + ٥}{هـ^{٢ س}}$ ء س

(٧) $\int$ لو$_{هـ}$ س ء س

(٨) $\int$ لو$_{هـ}$ (س + ١) ء س

(٩) $\int$ لو$_{هـ}$ $\left(\frac{س}{٢}\right)$ ء س

(١٠) $\int$ لو$_{هـ}$ س^{٢} ء س

(١١) $\int$ س لو$_{هـ}$ (س + ١) ء س

(١٢) $\int$ س^{٢} لو$_{هـ}$ س ء س

(١٣) $\int$ $\frac{١}{س لو_{هـ} س}$ ء س

(١٤) $\int$ $\frac{١}{س (لو_{هـ} س)^{٢}}$ ء س

(١٥) $\int$ $\sqrt{س}$ لو$_{هـ}$ س ء س

(١٦) $\int$ $\frac{لو_{هـ} س}{\sqrt{س}}$ ء س

(١٧) $\int$ لو$_{هـ}$ (٥ س) $\frac{ء س}{س}$

(١٨) $\int$ (لو$_{هـ}$ س)^{٢} $\frac{ء س}{س}$

(١٩) $\int$ لو$_{هـ}$ س . $\frac{ء س}{س^{٢}}$

(٢٠) $\int$ س^{٢} لو$_{هـ}$ س^{٣} ء س

٥ أوجد كلًا مما يأتى :

(١) $\int$ ٢ س هـ$^{٣ س^{٢} + ١}$ ء س

(٢) $\int$ $\frac{هـ^{٢ س}}{هـ^{٢ س} + ٣}$ ء س

(٣) $\int$ (٣ − س) هـ$^{٦ س − س^{٢}}$ ء س

(٤) $\int$ $\frac{٤ هـ^{٣ س^{٢}}}{١ − هـ^{٣ س^{٢}}}$ ء س

(٥) $\int$ $\frac{هـ^{س} − ١}{هـ^{س} + س}$ ء س

(٦) $\int$ $\frac{هـ^{\sqrt{س + ١}}}{\sqrt{س + ١}}$ ء س

(٧) $\int$ $\frac{س^{٢} + ١}{س^{٣} − س}$ ء س

(٨) $\int$ $\frac{هـ^{٢ س^{٢}} + س}{هـ^{٢ س^{٢}} + س^{٢}}$ ء س

٦ أوجد كلًا مما يأتى :

(١) $\int$ س^{٢} هـ^{س} ء س

(٢) $\int$ ٩ س^{٢} هـ$^{٣ س}$ ء س

(٣) $\int$ س^{٢} هـ$^{−٣ س}$ ء س

(٤) $\int$ س^{٢} هـ$^{س^{٣}}$ ء س

(٥) $\int$ س^{٢} هـ$^{س + ٢}$ ء س

(٦) $\int$ (س + ١)^{٢} هـ$^{٢ س}$ ء س

(٧) $\int$ (س هـ^{س})^{٢} ء س

(٨) $\int$ $\frac{س هـ^{٢ س}}{(٢ س + ١)^{٢}}$ ء س

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٩) $\int \frac{س \, هـ^{س}}{(س+1)^{2}} \, ء س$

(١٠) $\int \frac{س^{2} \, هـ^{س^{3}}}{(س^{3}+1)^{2}} \, ء س$

(١١) $\int \frac{هـ^{\frac{1}{س}}}{س^{2}} \, ء س$

(١٢) $\int (لو_{هـ} س)^{2} \, ء س$

(١٣) $\int س \, (لو_{هـ} س)^{2} \, ء س$

(١٤) $\int س^{2} \, هـ^{س} \, ء س$

٧ أوجد بطريقتين مختلفتين كلًا مما يأتى :

(١) $\int س \sqrt{٤ - س} \, ء س$

(٢) $\int \frac{س}{\sqrt{٤ + ٥ س}} \, ء س$

(٣) $\int \frac{٤ س}{\sqrt[٣]{٢ س + ١}} \, ء س$

ثانيًا مسائل على تطبيقات التكامل

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) معادلة المنحنى الذى يقطع من الجزء السالب لمحور الصادات ٧ وحدات وميل المماس له عند أى نقطة عليه = ٣ س^{٢} + ٢ هى

(أ) ص = س^{٣} (ب) ص = س^{٣} − ٢ س

(جـ) ص = س^{٣} − ٧ (د) ص = س^{٣} + ٢ س − ٧

(٢) إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة عليه يساوى $\frac{١}{س - ٢}$ وكان المنحنى يمر بالنقطة (٣ ، ٠) فإن : د (هـ^{٢} + ٣) = ...

(أ) هـ^{٢} + ١ (ب) لو$_{هـ}$ (هـ^{٢} + ١)

(جـ) $\frac{١}{هـ^{٢} + ١}$ (د) ٢

(٣) إذا كان ميل العمودى لمنحنى عند أى نقطة عليه (س ، ص) يساوى ٣ − ٢ س فإن معادلة هذا المنحنى إذا كان يمر بالنقطة (١ ، ١) هى

(أ) ص = $\frac{١}{٢}$ لو$_{هـ}$ | ٢ س − ٣ | + ٢ (ب) ص = $\frac{١}{٢}$ لو$_{هـ}$ | ٢ س − ٣ | + ١

(جـ) ص = لو$_{هـ}$ | ٢ س − ٣ | + ٤ (د) ص = لو$_{هـ}$ | ٢ س − ٣ | + ١

(٤) وعاء فارغ سعته ١٤٠٠ سم^{٣} يصب فيه الماء بمعدل (٢ ن + ٥٠) سم^{٣} / ث حيث ن الزمن بالثوانى فإن الزمن اللازم لامتلاء الوعاء = ... ثانية.

(أ) ١٠ (ب) ١٥ (جـ) ٢٠ (د) ٣٠

(٥) إذا كانت : د (س) = $\int$ (س + ١) (٢ س^{٢} + ٤ س − ١) ء س ، د (−٢) = ١

فإن : د (٣) = ...

(أ) ٥٤ (ب) ٨٦ (جـ) ٩٨ (د) ١٠٦

(٦) إذا كانت : دَ (س) = $\sqrt{\frac{٣}{س} + \frac{٤}{س^{٢}}}$

فإن : د (٠) − د (−١) = ...

(أ) $\frac{١٤}{٩}$ (ب) $\frac{١٦}{٩}$ (جـ) $\frac{٨}{٩}$ (د) ١

(٧) إذا كانت : دَ (س) = لو$_{هـ}$ س وكان د (١) = ١

فإن د (٢) = ...

(أ) لو$_{هـ}$ $\sqrt{٢}$ (ب) لو$_{هـ}$ ٢ (جـ) لو$_{هـ}$ ٤ (د) لو ٨

(٨) إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د (س) عند س = ١ يساوى − $\frac{١}{٢}$ وكان دَ (س) = س + ١ فإن دَ (٢) = ...

(أ) −٢ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٢

(٩) إذا كان : $\frac{ء ص}{ء س}$ = س + $\frac{١}{س}$ ، ص = $\frac{١}{٢}$ عند س = ١

فإن : ص = ... عندما س = هـ

(أ) $\frac{١}{٢}$ هـ^{٢} + ١ (ب) هـ + $\frac{١}{هـ}$ (جـ) هـ^{٢} (د) هـ^{٢} + ١

(١٠) إذا كان : دَّ (س) = ٦ س − ٤ ، دَ (١) = ٢ ، د (٠) = −٤

فإن : د (س) = ...

(أ) −٢ س^{٢} + ٣ س − ٤ (ب) س^{٣} − ٢ س^{٢} + ٣ س

(جـ) ٣ س^{٢} − ٤ س − ٤ (د) س^{٣} − ٢ س^{٢} + ٣ س − ٤

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(١١) إذا كان ميل المماس للمنحنى : ص = د (س) عند أى نقطة عليه يساوى ٦ س + ٢
حيث أ ثابت وكانت معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (١ ، −١) هى ص = ٤ − ٥ س
فإن معادلة المنحنى هى

(أ) ص = ٣ س^{٢} − ٤ (ب) ص = ٣ س^{٢} − ١١ س + ٧
(جـ) ص = ٣ س^{٢} − ٤ س + ٧ (د) ص = ٣ س^{٢} − ١١ س − ٤

(١٢) إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د (س) عند أى نقطة عليه (س ، ص) يساوى $\frac{١}{\sqrt{٣ + \text{لو}_{هـ} س}}$ حيث س > ٠ وكان المنحنى يمر بالنقطة (هـ ، ٤)
فإن العلاقة بين س ، ص هى

(أ) ص = $\sqrt{٣ + \text{لو}_{هـ} س}$ (ب) ص = ٢ $\sqrt{٣ + \text{لو}_{هـ} س}$
(جـ) ص = ٣ + لو$_{هـ}$ س (د) ص = ٢ $\sqrt{٣ + \text{لو}_{هـ} س - ٥}$

٢ أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة أ (٢ ، ٣) وميل العمودى عليه عند أى نقطة (س ، ص) هو ٣ − س
«ص = لو$_{هـ}$ |س − ٢| + ٠»

٣ (دور ثان ٢٠١٩) إذا كان ميل المماس لمنحنى عند نقطة (س ، ص) واقعة عليه هو س $\sqrt{س + ١}$ أوجد معادلة المنحنى علمًا بأن المنحنى يمر بالنقطة $(٠ ، \frac{١١}{١٥})$
«ص = $\frac{٢}{٥}$ (س + ١)$^{\frac{٥}{٢}}$ − $\frac{٢}{٣}$ (س + ١)$^{\frac{٣}{٢}}$ + ٠»

٤ أوجد معادلة المنحنى المار بالنقطة (٠ ، ١) والذى ميل المماس له عند أى نقطة (س ، ص) واقعة عليه يساوى س $\sqrt{س^{٢} + ١}$
«ص = $\frac{١}{٣}$ (س^{٢} + ١)$^{\frac{٣}{٢}}$ + ٠»

٥ إذا كان ميل العمودى لمنحنى عند أى نقطة عليه (س ، ص) هو $\frac{\sqrt{س}}{س − ١}$
حيث س ∈ ح$^{+}$ − {١} فأوجد معادلة المنحنى إذا كان يمر بالنقطة (٩ ، −١٢)
«ص = $\frac{٢}{٣}$ س $\sqrt{س}$ − ٢ − ١٠»

٦ إذا كان ميل العمودى لمنحنى عند أى نقطة عليه (س ، ص) يساوى $\frac{-٢ ص}{س}$
فأوجد معادلة هذا المنحنى إذا كان يقطع من محور الصادات الموجب جزءًا طوله ٣ وحدات.
«٢ ص^{٢} = − س^{٢} + ١٨»

٧ إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة (س ، ص) واقعة عليه يعطى بالعلاقة ر (س) = س هـ$^{٢ س}$ فأوجد معادلة المنحنى إذا كان يمر بالنقطة $(\frac{١}{٣} ، ٥)$
«ص = $\frac{١}{٣}$ س هـ$^{٢ س}$ − $\frac{١}{٩}$ هـ$^{٢ س}$ + ٥»

٨ إذا كان ميل العمودى على منحنى هو − (لو$_{هـ}$ س)$^{-٢}$ فأوجد معادلة المنحنى إذا كان يمر بالنقطة (هـ ، هـ)
«ص = − س (لو$_{هـ}$ س)^{٢} − ٢ س لو$_{هـ}$ س + ٢ س»

٩ إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة (س ، ص) واقعة عليه يعطى بالعلاقة ر (س) = $\frac{س هـ^{س}}{(س + ١)^{٢}}$ فأوجد معادلة المنحنى إذا كان يمر بالنقطة (١ ، ٢ هـ)
«ص = $\frac{- س هـ^{س}}{س + ١}$ + هـ^{س} + $\frac{٣}{٢}$ هـ»

١٠ (دور ثان ٢٠٠٦) إناء مملوء بسائل يتسرب من ثقب صغير بقاع الإناء ، فإذا كان حجم السائل فى الإناء يتغير بمعدل (٠,٤ ن − ٤٠) سم^{٣}/ث حيث ن تمثل الزمن بالثانية وكان حجم السائل بعد ٣٠ ث من بدء التسرب ٩٨٠ سم^{٣} أوجد سعة الإناء وبيِّن بعد كم ثانية يصبح الإناء فارغًا.
«٢٠٠٠ سم^{٣} ، ١٠٠ ثانية»

١١ (دور أول ٢٠٠٢) إذا كان ميل المماس للمنحنى : ص = د (س) عند أى نقطة عليه (س ، ص) يعطى بالعلاقة : $\frac{ع ص}{ع س} = \frac{س}{ص}$ فأوجد معادلة المنحنى علمًا بأنه يمر بالنقطة (١ ، ٢)
«ص^{٢} = س^{٢} + ٣»

١٢ (دور أول ٢٠٢٠) أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة (١ ، ٠) وميل المماس له عند أى نقطة عليه يساوى س هـ^{ص}
«هـ^{ص} = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ١»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

١٣ (دور أول ٢٠١٦) إذا كان ميل المماس عند أى نقطة (س ، ص) على المنحنى ص = د (س) يساوى ٣ س^{٢} − ٦ س − ٩ ، والقيمة العظمى المحلية للدالة د هى ١٧

أوجد القيمة الصغرى المحلية للدالة د

«−٥»

١٤ أوجد معادلة المنحنى ص = د (س) إذا كان $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ = أ س + ب حيث أ ، ب ثابتان وللمنحنى نقطة انقلاب عند النقطة (٠ ، ٢) وقيمة صغرى محلية عند النقطة (١ ، ٠) ثم أوجد القيمة العظمى المحلية لهذا المنحنى.

«٤»

١٥ (دور ثان ٢٠٠٧) إذا كان معدل تغير ميل المماس لمنحنى عند أى نقطة عليه هو ٦ س − ٢ وكان ميل المماس له عند النقطة (٣ ، ١) الواقعة عليه مساويًا ٢ فأوجد معادلة هذا المنحنى.

«ص = س^{٣} − س^{٢} − ١٩ س + ٥٠»

١٦ (دور أول ٢٠٠٨) **أوجد معادلة المنحنى :** ص = د (س) إذا علم أن : $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} = \frac{٢}{س^{٣}}$ وأن معادلة المماس للمنحنى عند النقطة $(٢ ، \frac{٥}{٢})$ الواقعة عليه هى : ٣ س − ٤ ص + ٤ = ٠

«ص = $\frac{١}{س}$ + س»

١٧ (دور ثان ٢٠١٢) **أوجد معادلة المنحنى :** ص = د (س) إذا علم أن : $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ = ٦ (١ − س) وللمنحنى قيمة صغرى محلية عند النقطة (صفر ، −٦)

«ص = ٣ س^{٢} − س^{٣} − ٦»

١٨ (دور أول ٢٠١٣) إذا كان : د$'$ (س) = ٦ س − ٤ عند أى نقطة على منحنى الدالة : ص = د (س) وكان هذا المنحنى يمر بالنقطة (١ ، −٥) وله قيمة صغرى محلية عند س = ٣ فأوجد معادلة هذا المنحنى والقيمة العظمى المحلية له.

«د (س) = س^{٣} − ٢ س^{٢} − ١٥ س + ١١ ، $\frac{٦٩٧}{٢٧}$»

١٩ إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = د (س) عند أى نقطة عليه يساوى ٦ س^{٢} + ب س وكان د (٠) = ٥ ، د (٢) = −٣ ، أوجد قيمة الثابت ب

ثم ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة د

«−١٢»

٢٠ إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة (س ، ص) على المنحنى هو ٣ (س^{٢} − ١) أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية لمنحنى الدالة د ونقط الانقلاب إن وجدت ، علمًا بأن المنحنى يمر بالنقطة (−٢ ، −١)

ثم ارسم شكلًا عامًا لهذا المنحنى.

«٣ ، −١ ، (٠ ، ١)»

٢١ إذا كان معدل تغير ميل المماس لمنحنى عند أى نقطة عليه (س ، ص) هو ٦ (١ − ٢ س) وكان للمنحنى نقطة حرجة عند س = ١ وللدالة قيمة صغرى محلية تساوى ٤

(١) أوجد معادلة العمودى للمنحنى عند س = −١

(٢) ارسم شكلًا عامًا للمنحنى موضحًا القيم العظمى والصغرى ونقط الانقلاب إن وجدت.

«س − ١٢ ص + ١٠٩ = ٠»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الدرس 2 تكامل الدوال المثلثية

درسنا فيما سبق اشتقاق الدوال المثلثية وكانت كالآتى :

① $\frac{د}{د س}$ (جا س) = جتا س

② $\frac{د}{د س}$ (جتا س) = − جا س

③ $\frac{د}{د س}$ (ظا س) = ق^{2} س

④ $\frac{د}{د س}$ (ظتا س) = − قتا^{2} س

⑤ $\frac{د}{د س}$ (ق س) = ق س ظا س

⑥ $\frac{د}{د س}$ (قتا س) = − قتا س ظتا س

وباستخدام تعريف المشتقة العكسية يمكن استنتاج قواعد تكامل بعض الدوال المثلثية كما يلى :

① ∫ جتا س د س = جا س + ث

② ∫ جا س د س = − جتا س + ث

③ ∫ ق^{2} س د س = ظا س + ث

④ ∫ قتا^{2} س د س = − ظتا س + ث

⑤ ∫ ق س ظا س د س = ق س + ث

⑥ ∫ قتا س ظتا س د س = − قتا س + ث

نتائج

① ∫ جا (أ س + ب) د س = − $\frac{1}{أ}$ جتا (أ س + ب) + ث

② ∫ جتا (أ س + ب) د س = $\frac{1}{أ}$ جا (أ س + ب) + ث

③ ∫ ق^{2} (أ س + ب) د س = $\frac{1}{أ}$ ظا (أ س + ب) + ث

④ ∫ قتا^{2} (أ س + ب) د س = − $\frac{1}{أ}$ ظتا (أ س + ب) + ث

⑤ ∫ ق (أ س + ب) ظا (أ س + ب) د س = $\frac{1}{أ}$ ق (أ س + ب) + ث

⑥ ∫ قتا (أ س + ب) ظتا (أ س + ب) د س = − $\frac{1}{أ}$ قتا (أ س + ب) + ث

تذكر أن :

① ∫ [د (س)]^{ن} د (س) د س = $\frac{(د (س))^{ن+1}}{ن+1}$ + ث

② ∫ $\frac{د (س)}{د (س)}$ د س = لو$_{هـ}$ | د (س) | + ث

③ ∫ ظا س د س = ∫ $\frac{جا س}{جتا س}$ د س = − ∫ $\frac{(- جا س)}{جتا س}$ د س

«لاحظ أن البسط هو تفاضل المقام»

= − لو$_{هـ}$ | جتا س | + ث = لو$_{هـ}$ | ق س | + ث

④ ∫ ظتا س د س = ∫ $\frac{جتا س}{جا س}$ د س «لاحظ أن البسط هو تفاضل المقام»

= لو$_{هـ}$ | جا س | + ث = − لو$_{هـ}$ | قتا س | + ث

⑤ ∫ ق س د س = ∫ $\frac{ق س (ق س + ظا س)}{(ق س + ظا س)}$ د س

«بالضرب بسطًا ومقامًا فى (ق س + ظا س)»

= ∫ $\frac{ق س ظا س + ق^{2} س}{(ق س + ظا س)}$ د س «لاحظ أن البسط هو تفاضل المقام»

= لو$_{هـ}$ | ق س + ظا س | + ث

⑥ ∫ قتا س د س = ∫ $\frac{قتا س (قتا س + ظتا س)}{قتا س + ظتا س}$ د س

«بالضرب بسطًا ومقامًا فى (قتا س + ظتا س)»

= ∫ $\frac{قتا س ظتا س + قتا^{2} س}{قتا س + ظتا س}$ د س

= − ∫ $\frac{- قتا س ظتا س - قتا^{2} س}{قتا س + ظتا س}$ د س

«لاحظ أن البسط هو تفاضل المقام»

= − لو$_{هـ}$ | قتا س + ظتا س | + ث

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

4

مثال ١

أوجد كلًّا مما يأتي :

١) $\int (٥ \text{ جتا } س - ٧ \text{ جا } \frac{س}{٢}) \, د س$

٢) $\int \text{قا}^{٢} \left(\frac{٢ س + ١}{٤}\right) \, د س$

٣) $\int \text{قا } س (\text{ظا } س + \text{قا } س) \, د س$

٤) $\int (١ + \text{قا } س)(١ - \text{قا } س) \, د س$

٥) $\int \text{قا}^{٢} (٣ - ٥ س) \, د س$

٦) $\int \text{قا } س (\text{قا } س + \text{ظا } س) \, د س$

٧) $\int \text{قا } ٣ س (\text{ظا } ٣ س + \text{ظا}^{٢} ٣ س) \, د س$

الحل

١) $\int (٥ \text{ جتا } س - ٧ \text{ جا } \frac{س}{٢}) \, د س = ٥ \text{ جا } س + ١٤ \text{ جتا } \frac{س}{٢} + ث$

٢) $\int \text{قا}^{٢} (٣ - ٥ س) \, د س = -\frac{١}{٥} \text{ ظا } (٣ - ٥ س) + ث$

٣) $\int \text{قا}^{٢} \left(\frac{٢ س + ١}{٤}\right) \, د س = \int \text{قا}^{٢} \left(\frac{١}{٢} س + \frac{١}{٤}\right) \, د س = -٢ \text{ ظا } \left(\frac{١}{٢} س + \frac{١}{٤}\right) + ث$

٤) $\int \text{قا } س (\text{قا } س + \text{ظا } س) \, د س = \int (\text{قا}^{٢} س + \text{قا } س \text{ ظا } س) \, د س = \text{ظا } س + \text{قا } س + ث$

٥) $\int \text{قا } س (\text{ظا } س + \text{قا } س) \, د س = \int (\text{قا } س \text{ ظا } س + \text{قا}^{٢} س) \, د س$

$= -\text{قا } س - \text{ظا } س + ث$

٦) $\int \text{قا } ٣ س (\text{ظا } ٣ س + \text{جتا}^{٢} ٣ س) \, د س$

$= \int (\text{قا } ٣ س \text{ ظا } ٣ س + \text{قا } ٣ س \text{ جتا}^{٢} ٣ س) \, د س$

$= \int (\text{قا } ٣ س \text{ ظا } ٣ س + \text{جتا } ٣ س) \, د س = \frac{١}{٣} \text{ قا } ٣ س + \frac{١}{٣} \text{ جا } ٣ س + ث$

٧) $\int (١ + \text{قا } س)(١ - \text{قا } س) \, د س = \int (١ - \text{قا}^{٢} س) \, د س = س + \text{ظا } س + ث$

مثال ٢

أوجد كلًّا مما يأتي :

١) $\int (١ + \text{ظا}^{٢} س) \text{ جتا}^{٢} س \, د س$

٢) $\int [١ + \text{ظا}^{٢} (٢ س - ٥)] \, د س$

٣) $\int (\text{قا}^{٢} \frac{س}{٤} + \text{قا}^{٢} \frac{\pi}{٤}) \, د س$

٤) $\int \text{ظا } (٢ س - ٥) \, د س$

٥) $\int (\text{جا } س + \text{جتا } س)^{٢} \, د س$

٦) $\int (١ + \text{جتا } س)^{٢} \, د س$

الحل

١) $\int (١ + \text{ظا}^{٢} س) \text{ جتا}^{٢} س \, د س$

$= \int \text{قا}^{٢} س \text{ جتا}^{٢} س \, د س$

$= \int ١ \, د س = س + ث$

تذكر أن :

$١ + \text{ظا}^{٢} س = \text{قا}^{٢} س$

$١ + \text{قا}^{٢} س = \text{جا}^{٢} س$

٢) $\int [١ + \text{ظا}^{٢} (٢ س - ٥)] \, د س = \int \text{قا}^{٢} (٢ س - ٥) \, د س = -\frac{١}{٢} \text{ ظا } (٢ س - ٥) + ث$

٣) $\int (\text{قا}^{٢} \frac{س}{٤} + \text{قا}^{٢} \frac{\pi}{٤}) \, د س$

$= -\frac{١}{\frac{١}{٤}} \text{ ظا } \frac{س}{٤} + س \text{ قا}^{٢} \frac{\pi}{٤} + ث$

$= -٤ \text{ ظا } \frac{س}{٤} + ٢ س + ث$

لاحظ أن

$\text{قا}^{٢} \frac{\pi}{٤} = \text{قا}^{٢} ٤٥ = (\sqrt{٢})^{٢} = ٢$ (مقدار ثابت).

٤) $\int \text{ظا } (٢ س - ٥) \, د س = \int \frac{\text{جا } (٢ س - ٥)}{\text{جتا } (٢ س - ٥)} \, د س = \frac{١}{٢} \int \frac{٢ \text{ جا } (٢ س - ٥)}{\text{جتا } (٢ س - ٥)} \, د س$

«لاحظ أن البسط هو تفاضل المقام»

$= \frac{١}{٢} \text{ لو}_{هـ} | \text{جتا } (٢ س - ٥) | + ث$

٥) $\int (\text{جا } س + \text{جتا } س)^{٢} \, د س = \int (\text{جا}^{٢} س + \text{جتا}^{٢} س + ٢ \text{ جا } س \text{ جتا } س) \, د س$

$= \int (١ + \text{جا } ٢ س) \, د س$

$= س - \frac{١}{٢} \text{ جتا } ٢ س + ث$

تذكر أن :

$\text{جا}^{٢} س + \text{جتا}^{٢} س = ١$

$\text{جا } ٢ س = ٢ \text{ جا } س \text{ جتا } س$

٦) $\int (١ + \text{جتا } س)^{٢} \, د س$

$= \int (١ + ٢ \text{ جتا } س + \text{جتا}^{٢} س) \, د س$

$= \int (١ + ٢ \text{ جتا } س + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} \text{ جتا } ٢ س) \, د س$

$= \frac{٣}{٢} س + ٢ \text{ جا } س + \frac{١}{٤} \text{ جا } ٢ س + ث$

تذكر أن :

$\text{جتا } ٢ س = ١ - ٢ \text{ جا}^{٢} س$

ومنها :

$\text{جا}^{٢} س = \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} \text{ جتا } ٢ س$

، $\text{جتا } ٢ س = ٢ \text{ جتا}^{٢} س - ١$

ومنها :

$\text{جتا}^{٢} س = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} \text{ جتا } ٢ س$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٣

أوجد كلًا مما يأتى :

① $\int \frac{1}{1 - \text{حتا}^2 س} \, ء س$

② $\int \frac{\text{حتا} س}{1 - \text{حتا}^2 س} \, ء س$

③ $\int \frac{\text{حتا} س + \text{حتا}^2 س}{\text{جا}^2 س + 2\,\text{حتا}^2 س} \, ء س$

④ $\int \frac{\text{حتا}^2 (2س - 3)}{1 - \text{جا}(2س - 3)} \, ء س$

⑤ $\int \frac{1}{1 + \text{حتا} س} \, ء س$

⑥ $\int \frac{\text{جا}\, 2س}{1 + \text{جا}^2 س} \, ء س$

الحل

① $\int \frac{1}{1 - \text{حتا}^2 س} \, ء س = \int \frac{1}{\text{جا}^2 س} \, ء س = \int \text{قتا}^2 س \, ء س = - \text{ظتا} س + ث$

② $\int \frac{\text{حتا} س}{1 - \text{حتا}^2 س} \, ء س = \int \frac{\text{حتا} س}{\text{جا}^2 س} \, ء س = \int \left(\frac{1}{\text{جا} س} \times \frac{\text{حتا} س}{\text{جا} س} \right) ء س$

$= \int (\text{قتا} س \, \text{ظتا} س) \, ء س = - \text{قتا} س + ث$

③ $\int \frac{\text{حتا} س + \text{حتا}^2 س}{\text{جا}^2 س + 2\,\text{حتا}^2 س} \, ء س = \int \frac{\text{حتا} س + \text{حتا}^2 س}{\text{جا}^2 س + \text{حتا}^2 س + \text{حتا}^2 س} \, ء س$

$= \int \frac{\text{حتا} س (1 + \text{حتا}^2 س)}{1 + \text{حتا}^2 س} ء س = \int \text{حتا} س \, ء س = \text{جا} س + ث$

④ $\int \frac{\text{حتا}^2 (2س - 3)}{1 - \text{جا}(2س - 3)} \, ء س = \int \frac{1 - \text{جا}^2 (2س - 3)}{1 - \text{جا}(2س - 3)} \, ء س$

$= \int \frac{(1 - \text{جا}(2س - 3))(1 + \text{جا}(2س - 3))}{(1 - \text{جا}(2س - 3))} ء س = \int [1 + \text{جا}(2س - 3)] ء س$

$= س - \frac{1}{2} \text{حتا}(2س - 3) + ث$

⑤ $\int \frac{1}{1 + \text{حتا} س} \, ء س = \int \frac{1}{1 + 2\,\text{حتا}^2 \frac{س}{2} - 1} ء س = \frac{1}{2} \int \text{قتا}^2 \frac{س}{2} \, ء س = \text{ظا} \frac{س}{2} + ث$

⑥ $\int \frac{\text{جا}\, 2س}{1 + \text{جا}^2 س} \, ء س = \int \frac{2\,\text{جا} س \, \text{حتا} س}{1 + \text{جا}^2 س} ء س$ «لاحظ أن البسط تفاضل المقام»

$= \text{لو}_م | 1 + \text{جا}^2 س | + ث$

تعميم

① $\int \text{جا} (د (س)) \times د' (س) ء س = - \text{حتا} (د (س)) + ث$

② $\int \text{حتا} (د (س)) \times د' (س) ء س = \text{جا} (د (س)) + ث$

③ $\int \text{قا}^2 (د (س)) \times د' (س) ء س = \text{ظا} (د (س)) + ث$

④ $\int \text{قتا}^2 (د (س)) \times د' (س) ء س = - \text{ظتا} (د (س)) + ث$

⑤ $\int \text{قا} (د (س)) \, \text{ظا} (د (س)) \times د' (س) ء س = \text{قا} (د (س)) + ث$

⑥ $\int \text{قتا} (د (س)) \, \text{ظتا} (د (س)) \times د' (س) ء س = - \text{قتا} (د (س)) + ث$

مثال ٤

أوجد كلًا مما يأتى :

① $\int ١٠ س \, \text{قا} (٥ س^2 + ١٧) \, \text{ظا} (٥ س^2 + ١٧) ء س$

② $\int [\text{حتا} (\text{ظا} س + ١)] \times \text{قا}^2 س \, ء س$

③ $\int [\text{قتا}^2 (س + \text{جا} س)] \times (١ + \text{حتا} س) ء س$

الحل

① بوضع د (س) = ٥ س^2 + ١٧ ∴ د' (س) = ١٠ س

∴ $\int ١٠ س \, \text{قا} (٥ س^2 + ١٧) \, \text{ظا} (٥ س^2 + ١٧) ء س = \text{قا} (٥ س^2 + ١٧) + ث$

② بوضع د (س) = ظا س + ١ ∴ د' (س) = قا^2 س

∴ $\int [\text{حتا} (\text{ظا} س + ١)] \times \text{قا}^2 س \, ء س = \text{جا} (\text{ظا} س + ١) + ث$

③ بوضع د (س) = س + جا س ∴ د' (س) = ١ + حتا س

∴ $\int [\text{قتا}^2 (س + \text{جا} س)] \times (١ + \text{حتا} س) ء س = - \text{ظتا} (س + \text{جا} س) + ث$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٥

أوجد كلًا مما يأتى :

(١) $\int$ جتا^{٥} س جا س د س
(٢) $\int$ ظا س قا^{٢} س د س
(٣) $\int$ (جا س + ظا س)^{٨} (جتا س − قا^{٢} س) د س
(٤) $\int$ قا^{٥} س ظا س د س
(٥) $\int$ س^{٢} قا^{٢} (س^{٣} + ٥) د س
(٦) $\int$ $\sqrt{١ + \text{جا س}}$ جتا س د س
(٧) $\int$ قا^{٢} س هـ$^{\text{ظا س}}$ د س

الحل

(١) بوضع ع = جتا س
∴ د ع = − جا س د س
∴ $\int$ جتا^{٥} س جا س د س
= − $\int$ ع^{٥} د ع = $-\frac{١}{٦}$ ع^{٦} + ث
= $-\frac{١}{٦}$ جتا^{٦} س + ث

(٢) بوضع ع = قا س
∴ د ع = قا س ظا س د س
∴ $\int$ قا^{٥} س ظا س د س = $\int$ قا^{٤} س × قا س ظا س د س
= $\int$ ع^{٤} د ع = $\frac{١}{٥}$ ع^{٥} + ث = $\frac{١}{٥}$ قا^{٥} س + ث

(٣) بوضع ع = قتا س
∴ د ع = − قتا س ظتا س د س
∴ $\int$ ظتا س قتا^{٣} س د س = $\int$ قتا^{٢} س × قتا س ظتا س د س
= − $\int$ ع^{٢} د ع = $-\frac{١}{٣}$ ع^{٣} + ث
= $-\frac{١}{٣}$ قتا^{٣} س + ث

(٤) بوضع ع = ١ + جا س
∴ د ع = جتا س د س
∴ $\int$ $\sqrt{١ + \text{جا س}}$ جتا س د س = $\int$ ع$^{\frac{١}{٢}}$ د ع = $\frac{٢}{٣}$ ع$^{\frac{٣}{٢}}$ + ث = $\frac{٢}{٣}$ (١ + جا س)$^{\frac{٣}{٢}}$ + ث

(٥) بوضع ع = جا س + ظا س
∴ د ع = (جتا س − قا^{٢} س) د س
∴ $\int$ (جا س + ظا س)^{٨} (جتا س − قا^{٢} س) د س = $\int$ ع^{٨} د ع = $\frac{١}{٩}$ ع^{٩} + ث
= $\frac{١}{٩}$ (جا س + ظا س)^{٩} + ث

لاحظ أن

تحل هذه المسائل بطريقة التعويض أو باستخدام القاعدة :

$\int$ [د (س)]^{ن} × د′ (س) د س = $\frac{[\text{د (س)}]^{ن+١}}{ن+١}$ + ث

حيث ن ≠ −١

(٦) بوضع ع = س^{٢} + ٥
∴ د ع = ٣ س^{٢} د س
∴ $\int$ س^{٢} قا^{٢} (س^{٣} + ٥) د س = $\frac{١}{٣}$ $\int$ قا^{٢} (س^{٣} + ٥) × ٣ س^{٢} د س
= $\frac{١}{٣}$ $\int$ قا^{٢} ع د ع = $\frac{١}{٣}$ ظا ع + ث
= $\frac{١}{٣}$ ظا (س^{٣} + ٥) + ث

(٧) بوضع ع = ظا س
∴ د ع = − قا^{٢} س د س
∴ $\int$ قا^{٢} س هـ$^{\text{ظا س}}$ د س = − $\int$ هـ^{ع} د ع = − هـ^{ع} + ث = − هـ$^{\text{ظا س}}$ + ث

مثال ٦

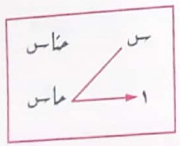
أوجد كلًا مما يأتى :

(١) $\int$ س جتا س د س
(٢) $\int$ س جتا س^{٢} د س

الحل

(١) $\int$ س جتا س د س
= س جا س − $\int$ جا س د س
= س جا س + جتا س + ث

(٢) بوضع ع = س^{٢}
∴ د ع = ٢ س د س
∴ $\int$ س جتا س^{٢} د س = $\frac{١}{٢}$ $\int$ ٢ س جتا س^{٢} د س
= $\frac{١}{٢}$ $\int$ جتا ع د ع
= $\frac{١}{٢}$ جا ع + ث = $\frac{١}{٢}$ جا س^{٢} + ث



لاحظ أن

فى رقم (١) يكون الحل بطريقة التجزئ
أما رقم (٢) يكون الحل بطريقة «التعويض»
أو «دالة ومشتقتها».

ملاحظة

هناك بعض التكاملات إذا حُسبت بالتجزئ مرتين يظهر التكامل الأصلى فى المرة الثانية مما يتيح حسابه من العلاقة التى نحصل عليها كما بالمثال التالى.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٧

أوجد : $\int هـ^{٢س} \sin ٣س \, د س$

الحل

∵ التكامل (ك) = $\int هـ^{٢س} \sin ٣س \, د س$

$= هـ^{٢س} \sin ٣س - ٢ \int هـ^{٢س} \sin ٣س \, د س$

∴ ك = $هـ^{٢س} \sin ٣س - ٢ [- \frac{١}{٣} \sin ٣س \, هـ^{٢س}$

$+ \frac{٢}{٣} \int هـ^{٢س} \cos ٣س \, د س]$

$= هـ^{٢س} \sin ٣س + \frac{٢}{٣} \sin ٣س \, هـ^{٢س} - \frac{٤}{٩} \int هـ^{٢س} \cos ٣س \, د س$

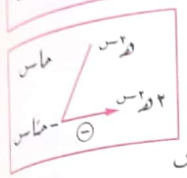
∴ ك = $هـ^{٢س} \sin ٣س + \frac{٢}{٣} \sin ٣س \, هـ^{٢س} - \frac{٤}{٩}$ ك

وبإضافة $\frac{٤}{٩}$ ك للطرفين

∴ $\frac{٥}{٩}$ ك = $هـ^{٢س} \sin ٣س + \frac{٢}{٣} \sin ٣س \, هـ^{٢س}$ + ث

∴ ك = $\frac{١}{٥} هـ^{٢س} [\sin ٣س + \frac{٢}{٣} \sin ٣س]$ + ث





لاحظ أن

الفرق بين تكاملين متماثلين يساوى ثابت وليس بالضرورة صفر

أى أن : ٤ ك − ٤ ك = ث (ثابت).

معلومة إثرائية

$\int هـ^{س} [د(س) + د'(س)] \, د س = هـ^{س} د(س) + ث$

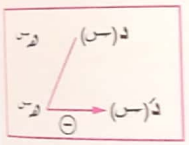
فمثلاً : $\int هـ^{س} [\sin ٢س + ٢ \cos ٢س] \, د س = هـ^{س} \sin ٢س + ث$

الإثبات :

$\int هـ^{س} [د(س) + د'(س)] \, د س$

$= \int هـ^{س} د'(س) \, د س + \int هـ^{س} د(س) \, د س$

$= \int هـ^{س} د'(س) \, د س + هـ^{س} د(س) - \int هـ^{س} د'(س) \, د س = هـ^{س} د(س) + ث$



* لاحظ أننا لا نستخدم المعلومة الإثرائية كقاعدة عند الحل ولكننا نستخدم فكرة إثباتها فى الحل كما بالمثال التالى.

مثال ٨

أوجد كلًا مما يأتى :

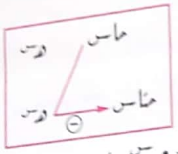
① $\int هـ^{س} (\sin ٣س + \cos ٣س) \, د س$ ② $\int هـ^{س} (\sin ٣س - \sin^{٢} ٣س) \, د س$

الحل

① $\int هـ^{س} (\sin ٣س + \cos ٣س) \, د س$

$= \int هـ^{س} \sin ٣س \, د س + \int هـ^{س} \cos ٣س \, د س$

$= \int هـ^{س} \sin ٣س \, د س + هـ^{س} \cos ٣س - \int هـ^{س} \sin ٣س \, د س = هـ^{س} \cos ٣س + ث$

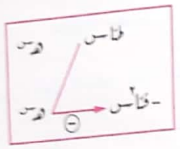


② $\int هـ^{س} (\sin ٣س - \sin^{٢} ٣س) \, د س$

$= \int هـ^{س} \sin ٣س \, د س - \int هـ^{س} \sin^{٢} ٣س \, د س$

$= هـ^{س} \sin ٣س + \int هـ^{س} \sin^{٢} ٣س \, د س - \int هـ^{س} \sin^{٢} ٣س \, د س$

$= هـ^{س} \sin ٣س + ث$



مثال ٩

أوجد معادلة المنحنى : ص = د (س) إذا كان ميل المماس عند أى نقطة عليه يساوى $\sin^{٢} ٣س$ والمنحنى يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{٤} ، ٢)$

الحل

∵ $\frac{د ص}{د س} = \sin^{٢} ٣س$ ∴ ص = $\int \sin^{٢} ٣س \, د س$

∴ ص = $- \frac{١}{٣} \sin ٣س + ث$

∵ المنحنى يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{٤} ، ٢)$ ∴ ٢ = $- \frac{١}{٣} \sin \frac{\pi}{٤} + ث$

∴ ٢ = $- \frac{١}{٣} + ث$ ∴ ث = $\frac{٣}{٣}$

∴ معادلة المنحنى هى : ص = $- \frac{١}{٣} \sin ٣س + ٣$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ١٠

إذا كان معدل تغير ميل المماس للمنحنى ص = د (س) يساوى −٤ ما س مَتا س وكان معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (٠ ، ٢) الواقعة عليه هى : ص = ٢ (س + ١) فأوجد معادلة المنحنى.

الحـــل

∵ معدل تغير ميل المماس للمنحنى = −٤ ما س مَتا س = −٢ ما ٢ س

∴ $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ = −٢ ما ٢ س

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ⌠ −٢ ما ٢ س ء س = مَتا ٢ س + ث حيث ث ثابت.

، ∵ معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (٠ ، ٢) الواقعة على المنحنى هى : ص = ٢ س + ٢

∴ ميل المماس عند النقطة (٠ ، ٢) = ٢ ∴ $\left(\frac{ء ص}{ء س}\right)_{س = ٠}$ = ٢

∴ مَتا (٢ × ٠) + ث = ٢ ∴ ث = ١

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = مَتا ٢ س + ١

∴ ص = ⌠ (مَتا ٢ س + ١) ء س = $\frac{١}{٢}$ ما ٢ س + س + ثَ حيث ثَ ثابت.

، ∵ النقطة (٠ ، ٢) تقع على المنحنى.

∴ ٢ = $\frac{١}{٢}$ ما (٢ × ٠) + ٠ + ثَ ∴ ثَ = ٢

∴ معادلة المنحنى هى : ص = $\frac{١}{٢}$ ما ٢ س + س + ٢

اختبار تفاعلى

• فهم • تطبيق **مستويات عليا** من أسئلة الكتاب المدرسى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① ⌠ مَتا (٣ س − ١) ء س = ... + ث

(أ) ما (٣ س − ١) (ب) $\frac{١}{٣}$ ما (٣ س − ١)

(جـ) ٣ ما (٣ س − ١) (د) $\frac{١}{٣}$ ما (٣ س − ١)

② ⌠ قَتا^{٢} (٣ س) ء س = ... + ث

(أ) − طتا (٣ س) (ب) $\frac{١}{٣}$ طتا (٣ س)

(جـ) −٣ طتا ٣ س (د) $\frac{١}{٣}$ طتا (٣ س)

③ ⌠ قا ص طا ص ء ص = ... + ث

(أ) قا ص (ب) قتا ص (جـ) طا ص (د) طتا ص

④ ⌠ قا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$ ء س = ... + ث

(أ) طا $\frac{\pi}{٤}$ (ب) − طتا $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) طا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$ (د) ٢ س

⑤ ⌠ (٢ مَتا^{٢} س − ١) ء س = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٢}$ ما ٢ س (ب) $\frac{١}{٢}$ مَتا ٢ س (جـ) ما ٢ س (د) مَتا ٢ س

⑥ ⌠ (١ + طتا^{٢} س) ء س = ... + ث

(أ) طتا س (ب) − طتا س (جـ) طا^{٢} س (د) − طتا^{٢} س

⑦ ⌠ $\frac{\text{طا س}}{\text{مَتا س}}$ ء س = ... + ث

(أ) قا^{٢} س (ب) قا س (جـ) طا س قا س (د) لو$_{هـ}$ مَتا س

⑧ ⌠ $\frac{\text{مَتا س}}{\text{قتا س}}$ ء س = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٢}$ ما ٢ س (ب) $\frac{١}{٤}$ مَتا ٢ س

(جـ) −$\frac{١}{٤}$ مَتا ٢ س (د) − ٤ مَتا ٢ س

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢ أوجد كلًّا من التكاملات الآتية :

١ ∫ جا (٢ س − ٥) ء س
٢ ∫ جا س جتا ٣ س ء س
٣ ∫ (٣ − س − جا ٤ س) ء س
٤ ∫ (جا س + جتا س)٢ ء س
٥ ∫ قا٢ (٥ − ٣ س) ء س
٦ ∫ ظا٢ ٣ س ء س
٧ ∫ (جا ٣ س − قا٢ ٢ س) ء س
٨ ∫ قا٢ (س + ٣ / ٢) ء س
٩ ∫ قا ٢ س ظا ٢ س ء س
١٠ ∫ قتا ٥ س ظتا ٥ س ء س
١١ ∫ (٤ جتا ٢ س + ١ / جا٢ س) ء س
١٢ ∫ قا س (قا س − ظا س) ء س
١٣ ∫ قتا س (ظتا س − قتا س) ء س
١٤ ∫ ٦ قا ٢ س (ظ ٢ س + جتا٢ ٢ س) ء س
١٥ ∫ قا س (٣ جتا س − ٢ قا س) ء س

٣ أوجد كلًّا من التكاملات الآتية :

١ ∫ (جتا٢ س − جا٢ س) ء س
٢ ∫ جا ٣ س جتا ٣ س ء س
٣ ∫ (١ + ظا٢ س) جتا٢ س ء س
٤ ∫ (١ + ظتا٢ س) جا٢ س ء س
٥ ∫ ظا س جتا س ء س
٦ ∫ (جا س − جتا س)٢ ء س
٧ ∫ [١ + ظا٢ (٣ س − ١)] ء س
٨ ∫ (٣ + ظتا٢ س) ء س
٩ ∫ ٤ / جا٢ ٥ س ء س
١٠ ∫ ٥ / جتا٢ ٣ س ء س
١١ ∫ ء س / جتا ٢ س قتا ٢ س
١٢ ∫ ظتا ٥ س / جا ٥ س ء س
١٣ ∫ [(١ − ظا س)٢ + ٢ ظا س] ء س
١٤ ∫ ١ / (١ − جتا٢ س) ء س
١٥ ∫ جتا٢ س / (١ − جا س) ء س
١٦ ∫ (١ + جا٢ س) / (١ − جتا٢ س) ء س

١٧ ∫ (١ + جا س) / (١ − جا س) ء س
١٨ ∫ (جا٢ س − جتا٢ س) / (جا س + جتا س) ء س
١٩ ∫ (جا٢ س − ٤) / جا٢ س ء س
٢٠ ∫ ١ / جا٢ س جتا٢ س ء س
٢١ ∫ ١ / (١ − جتا س) ء س
٢٢ ∫ (١ − جا٢ س) / جا٢ س ء س
٢٣ ∫ ء س / جا٢ س
٢٤ ∫ جا س جا ٢ س ء س
٢٥ ∫ (ظا س − ظتا س)٢ ء س

٤ أوجد كلًّا من التكاملات الآتية :

١ ∫ جا٢ س ء س
٢ ∫ جتا٢ س ء س
٣ ∫ (١ + جتا س)٢ ء س
٤ ∫ (جتا٢ س + جتا س) ء س
٥ ∫ (جا س + قتا س)٢ ء س
٦ ∫ (جا س + قتا س)٢ ء س
٧ ∫ (٣ / قتا٢ س − ٤ قا٢ ٥ س) ء س
٨ ∫ (جتا س + ظا س)٢ ء س
٩ ∫ قا٢ ٣ س ء س
١٠ ∫ ظا (٥ − ٢ س) ء س
١١ ∫ قا٢ س / ظا س ء س

١٢ ∫ (١ − جا س) / (١ + جا س) ء س
١٣ ∫ (جا٢ س + ظا س)٢ ء س
١٤ ∫ ظا (٣ س + ١) ء س
١٥ ∫ (جا س + جتا س)٢ ء س
١٦ ∫ جا ٢ س / (جا س + جتا س) ء س
١٧ ∫ ١ / (١ − جا س) ء س
١٨ ∫ (١ − ظا٢ س) / جا٢ س ء س
١٩ ∫ جا٢ س / جتا٢ س ء س
٢٠ ∫ ظا٢ س ء س
٢١ ∫ جتا س جتا ٢ س ء س
٢٢ ∫ (ظا س − ظتا س)٢ ء س

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(١٩) $\int \frac{١ - \text{ظا}\, س}{١ + \text{ظا}\, س}$ ء س

(٢١) $\int \frac{\text{جا}\, ٢س}{١ + \text{جا}^٢ س}$ ء س

(٢٣) $\int \frac{٢\, \text{ظا}\, س}{١ + \text{ظا}^٢ س}$ ء س

(٢٠) $\int \frac{\text{قا}\, س\, \text{ظا}\, س}{\text{قا}\, س - ١}$ ء س

(٢٢) $\int \frac{\text{ظا}\, س}{\text{قا}^٢ س}$ ء س

(٢٤) $\int (\text{جتا}^٢ س - \text{جتا}^٤ س)$ ء س

٥ أوجد كلًا من التكاملات الآتية :

(١) $\int س\, \text{جا}\, س^٢$ ء س

(٢) $\int س\, \text{ظا}\, ٣س^٢$ ء س

(٣) $\int س^٢ \text{جتا}\, (س^٣ + ٥)$ ء س

(٤) $\int س\, \text{قا}^٢ (س^٢ + ٢)$ ء س

(٥) $\int \text{هـ}^{\text{جا}\, س} \text{جتا}\, س$ ء س

(٦) $\int \frac{\text{جتا}\, ٢س}{\sqrt{٢ + \text{جا}\, ٢س}}$ ء س

(٧) $\int \frac{١}{س^٢} \text{جا}\left(\frac{١}{س}\right)$ ء س

(٨) $\int [\text{جا}\, (٣س^٤ + ٥س - ٧)] \times [١٢س^٣ + ٥]$ ء س

(٩) $\int [\text{جتا}\, (س + \text{ظا}\, س)] \times [١ - \text{قا}^٢ س]$ ء س

(١٠) $\int [\text{قا}\, (\text{جا}\, س)]^٢ \times \text{جتا}\, س$ ء س

(١١) $\int [\text{قتا}^٢ (\text{قا}\, س)] \times \text{قا}\, س\, \text{ظا}\, س$ ء س

(١٢) $\int [\text{قا}\, (٥س^٣ - ٧)\, \text{ظا}\, (٥س^٣ - ٧)] \times ١٥س^٢$ ء س

(١٣) $\int \text{جا}\, (\text{جا}\, س)\, \text{جتا}\, س$ ء س

٦ أوجد كلًا مما يأتي :

(١) $\int \text{قتا}^٢ س\, \text{ظا}\, س$ ء س

(٢) $\int \text{قا}^٢ س\, \text{ظا}\, س$ ء س

(٣) $\int \text{جا}^٣ س\, \text{جتا}\, س$ ء س

(٤) $\int \text{جا}\, س\, \text{جتا}^٣ س$ ء س

(٥) $\int ١٥\, \text{ظا}^{١٤} س\, \text{قا}^٢ س$ ء س

(٦) $\int (\text{جا}\, س + \text{ظا}\, س)^٥ (\text{جتا}\, س - \text{قتا}^٢ س)$ ء س

(٧) $\int (٣ + \text{جا}\, س)^٥ \text{جتا}\, س$ ء س

(٨) $\int \sqrt{١ + \text{جا}\, س} \times \text{جتا}\, س$ ء س

(٩) $\int \text{قا}^٥ س\, \text{ظا}\, س$ ء س

(١٠) $\int \text{ظا}\, س\, \text{قا}^٢ س$ ء س

(١١) $\int (س + \text{جا}\, س + \text{ظا}\, س)^٢ (١ + \text{جتا}\, س + \text{قا}^٢ س)$ ء س

(١٢) $\int \text{هـ}^{\text{جا}\, س} \times \text{جتا}\, س$ ء س

(١٣) $\int ٢\, \text{جا}^٥ س\, \text{جتا}\, ٢س$ ء س

(١٤) $\int \text{جا}^٤ س\, \text{جتا}^٢ س$ ء س

(١٥) $\int \text{جتا}^٢ س$ ء س

(١٦) $\int ٤\, \text{جا}^٤ س$ ء س

(١٧) $\int \text{ظا}^٢ س$ ء س

(١٨) $\int \text{ظتا}^٢ س$ ء س

(١٩) $\int \text{ظا}^٣ س\, \text{قا}^٥ س$ ء س

(٢٠) $\int \text{ظا}^٣ س\, \text{قا}^٢ س$ ء س

(٢١) $\int (١ + \text{جا}\, س)\, \text{هـ}^{(س - \text{جتا}\, س)}$ ء س

(٢٢) $\int \text{هـ}^{س}\, \text{جتا}\, \text{هـ}^{س}$ ء س

(٢٣) $\int \text{هـ}^{س} (\text{ظا}\, س - \text{قا}^٢ س)$ ء س

(٢٤) $\int \text{هـ}^{س}\, \text{قا}\, س\, (١ - \text{ظا}\, س)$ ء س

(٢٥) $\int \text{هـ}^{س}\, \text{قا}\, س\, (١ + \text{ظا}\, س)$ ء س

(٢٦) $\int (\text{جتا}\, س\, \text{هـ}^{\text{جا}\, س} + ٣س^٢)$ ء س

(٢٧) $\int (\text{قا}\, س\, \text{هـ}^{\text{ظا}\, س})^٢$ ء س

(٢٨) $\int ٢\, \text{جا}^٣ س\, \text{جتا}\, س$ ء س

(٢٩) $\int \frac{٥\, \text{ظا}\, س}{\text{جا}^٢ س}$ ء س

(٣٠) $\int س\, \text{جا}\, س$ ء س

(٣١) $\int (٣س + ٢)\, \text{جا}\, س$ ء س

(٣٢) $\int س\, \text{جتا}\, ٤س$ ء س

(٣٣) $\int س\, \text{قا}^٢ س$ ء س

٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{قا}^٢ س$ ، ص = ٢ عندما س = $\frac{\pi}{٤}$

فإن : ص تساوى

(أ) $-٢ - \text{ظا}\, س$ (ب) $٢ - \text{ظا}\, س$ (جـ) $-٣ - \text{ظا}\, س$ (د) $٣ - \text{ظا}\, س$

(٢) $\int (٤ - \text{قا}\, س\, \text{ظا}\, س)$ ء س = ... + ث

(أ) $٤س - \text{قا}\, س$ (ب) $٤س + \text{قا}\, س$

(جـ) $٤س - \text{ظا}\, س$ (د) $٤س + \text{ظا}\, س$

(٣) $\int \text{ظا}^٢ س$ ء س = ... + ث

(أ) $\text{ظا}\, س - س$ (ب) $\text{ظا}\, س + س$

(جـ) $\text{قا}^٤ س$ (د) $\frac{١}{٣} \text{ظا}^٣ س$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

④ $\int \sin\theta \cos^5\theta \, d\theta =$ + ث

(أ) $|\sin\theta| - \frac{1}{6}\cos^6\theta$ (ب) $-\frac{1}{6}\cos^6\theta$

(جـ) $|\sin\theta| + \frac{1}{6}\cos^6\theta$ (د) $\sin\theta + \frac{1}{6}\cos^6\theta$

⑤ $\int \sin^2\theta \cos^3\theta \, d\theta$ (توجيهي ٢٠١٧ د)

$= \frac{1}{3}\sin^3\theta - \frac{1}{5}\sin^5\theta +$ + ث

(أ) $\frac{1}{3}\sin^3\theta + \frac{1}{5}\sin^5\theta$ (ب) $\frac{1}{3}\sin^3\theta - \frac{1}{5}\sin^5\theta$

(جـ) $\sin^3\theta - \sin^5\theta$ (د) $\sin^3\theta + \sin^5\theta$

⑥ $\int \sin^3\theta \cos^4\theta \, d\theta$ (توجيهي ٢٠١٧ د)

$= -\frac{1}{5}\cos^5\theta + \frac{1}{7}\cos^7\theta +$ + ث

(أ) $-\frac{1}{5}\cos^5\theta + \frac{1}{7}\cos^7\theta$ (ب) $\frac{1}{5}\cos^5\theta - \frac{1}{7}\cos^7\theta$

(جـ) $\frac{1}{5}\cos^5\theta + \frac{1}{7}\cos^7\theta$ (د) $-\frac{1}{5}\cos^5\theta - \frac{1}{7}\cos^7\theta$

⑦ $\int \sin^4\theta \cos^3\theta \, d\theta$ (توجيهي ٢٠١٧ د)

$= \frac{1}{5}\sin^5\theta - \frac{1}{7}\sin^7\theta +$ + ث

(أ) $\frac{1}{5}\sin^5\theta + \frac{1}{7}\sin^7\theta$ (ب) $\frac{1}{4}\sin^4\theta - \frac{1}{6}\sin^6\theta$

(جـ) $\frac{1}{4}\sin^4\theta + \frac{1}{6}\sin^6\theta$ (د) $\frac{1}{5}\sin^5\theta - \frac{1}{7}\sin^7\theta$

⑧ $\int \sin^3\theta \cos^3\theta \, d\theta =$ + ث

(أ) $\frac{1}{4}\sin^4\theta \cos^4\theta$ (ب) $\frac{1}{4}\sin^4\theta$

(جـ) $\frac{1}{4}\cos^4\theta$ (د) $-\frac{1}{4}\cos^4\theta$

⑨ $\int \frac{\sin^2\theta}{\cos^6\theta} \, d\theta =$ + ث

(أ) $\frac{1}{7}\tan^7\theta$ (ب) $\frac{1}{7}\sec^7\theta$ (جـ) $\frac{1}{7}\tan^7\theta$ (د) $\tan^7\theta$

⑩ $\int \sec^4\theta \left(1 + \frac{\tan\theta}{\sec\theta}\right) d\theta =$ + ث

(أ) $\tan\theta$ (ب) $\sec\theta$ (جـ) $\tan\theta + \sec\theta$ (د) $\tan\theta - \sec\theta$

⑪ $\int \left(\sec^2\theta + \tan\theta \sec^2\theta\right) d\theta =$ + ث

(أ) $\tan\theta + 1$ (ب) $\sec\theta$

(جـ) $\tan\theta + \sec\theta$ (د) $\tan\theta - \sec\theta$

⑫ $\int \sec^2\theta (\tan^2\theta + \tan\theta + 1) \, d\theta =$ + ث

(أ) $\tan\theta$ (ب) $\sec\theta$

(جـ) $\sec\theta \tan\theta$ (د) $\sec^2\theta$

⑬ $\int \sec^2\theta \tan^2\theta \, d\theta =$ + ث

(أ) $\tan^3\theta$ (ب) $\sec^3\theta$ (جـ) $\tan^3\theta + \sec^3\theta$ (د) $\frac{1}{3}\tan^3\theta$

⑭ $\int \sec^2\theta \tan\theta \, d\theta =$ + ث

(أ) $\frac{1}{2}\tan^2\theta$ (ب) $\frac{1}{2}\sec^2\theta$ (جـ) $\tan^2\theta$ (د) $\sec^2\theta$

⑮ $\int \sec^3\theta \tan\theta \, d\theta =$ + ث

(أ) $\frac{1}{3}\sec^3\theta$ (ب) $\frac{1}{3}\tan^3\theta$ (جـ) $\sec^3\theta$ (د) $\tan^3\theta$

⑯ $\int \sec^3\theta \tan^3\theta \, d\theta =$ + ث

(أ) $\frac{1}{3}\sec^3\theta - \sec\theta$ (ب) $\frac{1}{3}\sec^3\theta + \sec\theta$

(جـ) $\frac{1}{3}\sec^3\theta \tan\theta$ (د) $\frac{1}{3}\sec^3\theta \tan\theta - \sec\theta$

⑰ $\int \sec^3\theta \tan^3\theta \, d\theta$ (توجيهي ٢٠١٧ د)

$= \frac{1}{5}\sec^5\theta - \frac{1}{3}\sec^3\theta +$ + ث

(أ) $\frac{1}{5}\sec^5\theta - \frac{1}{3}\sec^3\theta$ (ب) $\frac{1}{5}\sec^5\theta + \frac{1}{3}\sec^3\theta$

(جـ) $\frac{1}{3}\sec^3\theta - \frac{1}{5}\sec^5\theta$ (د) $\frac{1}{3}\sec^3\theta + \frac{1}{5}\sec^5\theta$

⑱ $\int \sec^4\theta \tan^4\theta \, d\theta =$ + ث

(أ) $\frac{1}{5}\sec^5\theta - \frac{1}{7}\sec^7\theta$ (ب) $\frac{1}{5}\sec^5\theta + \frac{1}{7}\sec^7\theta$

(جـ) $\frac{1}{4}\sec^4\theta - \frac{1}{6}\sec^6\theta$ (د) $\frac{1}{4}\sec^4\theta + \frac{1}{6}\sec^6\theta$

⑲ $\int \sec^4\theta \tan^2\theta \, d\theta =$ + ث

(أ) $\frac{1}{5}\sec^5\theta - \frac{1}{3}\sec^3\theta$ (ب) $\frac{1}{5}\sec^5\theta + \frac{1}{3}\sec^3\theta$

(جـ) $\frac{1}{3}\sec^3\theta - \frac{1}{5}\sec^5\theta$ (د) $\frac{1}{3}\sec^3\theta + \frac{1}{5}\sec^5\theta$

⑳ $\int \sec^2\theta \tan^4\theta \, d\theta =$ + ث

(أ) $\frac{1}{5}\tan^5\theta$ (ب) $\frac{1}{5}\sec^5\theta$ (جـ) $\frac{1}{5}\tan^5\theta + \frac{1}{3}\tan^3\theta$ (د) $\frac{1}{5}\tan^5\theta - \frac{1}{3}\tan^3\theta$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(١٨) $\int$ حتا^{٩٩} س قا^{١٠٠} س ء س = ... + ث

(أ) $\frac{١}{١٠٠}$ حتا^{١٠٠} س
(ب) $\frac{١}{١٠١}$ قا^{١٠١} س
(جـ) قا س ظا س
(د) لو$_{هـ}$ | قا س + ظا س |

(١٩) $\int \frac{٢ \text{ ظا س}}{١ - \text{ظا}^{٢} \text{ س}}$ ء س = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٢}$ ظا ٢ س
(ب) ٢ قا^{٢} ٢ س
(جـ) − لو$_{هـ}$ | حتا س |
(د) − $\frac{١}{٢}$ لو$_{هـ}$ | حتا ٢ س |

(٢٠) $\int$ (حا^{٢} س + حا^{٢} س ظا^{٢} س) ء س = ... + ث

(أ) حا^{٢} س + قتا^{٢} س
(ب) ظا س − س
(جـ) ظا^{٢} س
(د) قا س

(٢١) $\int \frac{\text{قا}^{٢} \text{ س}}{١ + \text{ظا}^{٢} \text{ س}}$ ء س = ... + ث

(أ) قا^{٢} س
(ب) قا^{٢} س ظا^{٢} س
(جـ) ٢ قا^{٢} س
(د) س

(٢٢) $\int$ ظا^{٢} س قتا^{٢} س ء س = ... + ث

(أ) ظا س
(ب) قا^{٢} س
(جـ) قتا^{٢} س
(د) − ظتا س

(٢٣) $\int$ (حا ٣ س حتا س − حتا ٣ س حا س) ء س = ... + ث

(أ) حا ٢ س
(ب) − $\frac{١}{٢}$ حتا ٢ س
(جـ) حتا ٢ س
(د) − $\frac{١}{٤}$ حتا ٤ س

(٢٤) $\int$ (حتا س حتا $\frac{\pi}{٤}$ − حا س حا $\frac{\pi}{٤}$) ء س = ... + ث

(أ) حتا (س + $\frac{\pi}{٤}$)
(ب) حا (س + $\frac{\pi}{٤}$)
(جـ) $\frac{١}{٤}$ حتا (س + $\frac{\pi}{٤}$)
(د) $\frac{١}{٤}$ حا (س + $\frac{\pi}{٤}$)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٨ إذا كان $\frac{ص}{س} = ٧ - ما ٢ س$ أوجد : ص بدلالة س إذا كان ص = ٥ عند س = .
«ص = ٧ س + $\frac{١}{٢}$ ما ٢ س + $\frac{٩}{٢}$»

٩ إذا كان ميل المماس لمنحنى عند أى نقطة عليه (س ، ص) معطى بالعلاقة : $\frac{ص}{س} = ما س$ ما س ، أوجد معادلة المنحنى علمًا بأنه يمر بالنقطة : $(\frac{\pi}{٦} ، ١)$
«ص = $\frac{١}{٢}$ ما^{٢} س + $\frac{٧}{٨}$»

١٠ (دور أول ٢٠٠٦) إذا كان ميل المماس للمنحنى : ص = د (س) عند أى نقطة عليه يساوى ق^{٢} س − ما س ، أوجد معادلة المنحنى علمًا بأنه يمر بالنقطة : $(\frac{\pi}{٤} ، \frac{١}{٢\sqrt{٢}})$
«ص = ظا س + ما س − ١»

١١ (دور ثان ٢٠٠٢) إذا كان ميل المماس للمنحنى : ص = د (س) عند أى نقطة عليه (س ، ص) يعطى بالعلاقة : $\frac{ص}{س} = \pi$ ق^{٢} π س فأوجد معادلة المنحنى علمًا بأنه يمر بالنقطة : $(\frac{١}{٤} ، ٥)$
«ص = ظا π س + ٤»

١٢ أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة : (١ ، −٢) وميل المماس له عند أى نقطة عليه (س ، ص) هو $\frac{ص}{س} = ٣ \pi$ ما^{٢} π س − ٢ π ما π س
«ص = ٣ ما π س + ٢ ما^{٢} π س»

١٣ أوجد معادلة المنحنى : ص = د (س) إذا علم أن ص$''$ = ٢ ما ٢ س وأن معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (٠ ، ١) هى ص = س + ١
«ص = − $\frac{١}{٢}$ ما ٢ س + س + $\frac{٣}{٢}$»

١٤ (دور ثان ٢٠٠٠) إذا كان ميل المماس للمنحنى : ص = د (س) عند أى نقطة عليه (س ، ص) يعطى بالعلاقة $\frac{ص}{س} = \frac{س}{١ + ما ص}$ أوجد معادلة المنحنى علمًا بأنه يمر بنقطة الأصل.
«ص + ما ص = $\frac{١}{٢}$ س^{٢}»

١٥ أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة : $(\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi^{٢}}{٤} + ٩)$ إذا كان ميل المماس له عند أى نقطة (س ، ص) عليه يعطى بالعلاقة التالية م = ٢ س + $\frac{١}{٢}$ ق^{٢} $\frac{س}{٢}$
«ص = س^{٢} + ظا $\frac{س}{٢}$»

١٦ (دور أول ٢٠١٩) منحنى ميل المماس عند أى نقطة يساوى ٢ ق^{٢} س حيث ٢ ثابت فإذا كان المنحنى يمر بالنقطتين $(\frac{\pi}{٤} ، ٥)$ ، $(\frac{\pi ٣}{٤} ، ١)$ أوجد معادلة المنحنى.
«ص = ٢ ظا س + ٣»

١٧ أوجد معادلة المنحنى : ص = د (س) إذا كان ميل المماس عند أى نقطة عليه يساوى ق^{٢} س ظا س والمنحنى يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{٤} ، ٢\frac{١}{٢})$
«ص = − $\frac{١}{٢}$ ظا^{٢} س + ٣»

١٨ أوجد معادلة المنحنى : ص = د (س) إذا كان ميل العمودى عليه عند أى نقطة على المنحنى هو (٢ ص + ١) ق^{٢} س ظا س والمنحنى يمر بنقطة الأصل.
«ص^{٢} + ص = ما س − ١»

١٩ (دور ثان ٢٠١٣) إذا كان : $\frac{ص}{س} = \frac{ما^{٢} س}{ص^{٢}}$ عند أى نقطة من نقط منحنى للدالة ص = د (س) وكان هذا المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ١) فأثبت أن :
٤ ص^{٣} = ٣ (٢ س − ما ٢ س) + ٤

٢٠ إذا كان ميل المماس لمنحنى عند أى نقطة (س ، ص) عليه هو (ما س − ما س) وكانت له نقطة قيمة صغرى محلية تساوى −٢ $\sqrt{٢}$ أوجد معادلة هذا المنحنى علمًا بأن س ∈ [٠ ، ٢ π]
«ص = ما س + ما س − $\sqrt{٢}$»

مسائل تقيس مهارات التفكير

٢١ أوجد كلًا من التكاملات الآتية :

① ∫ هـ^{س} ما س ق س
② ∫ هـ^{س} ما س ق س
③ ∫ $\frac{س}{ما^{٢} ٥ س}$ ق س
④ ∫ ق^{٢} س ق س
⑤ ∫ ما (لو$_{هـ}$ س) ق س
⑥ ∫ ما ٥ س ما ٣ س ق س

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الدرس 3

التكامل المحدد

النظرية الأساسية فى التفاضل

إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [أ ، ب] ، وكانت ت أى مشتقة عكسية للدالة د على نفس الفترة ، فإن : $\int_{أ}^{ب} د(س)\,ه س = ت(ب) - ت(أ)$

* $\int_{أ}^{ب} د(س)\,ه س$ يسمى بالتكامل المحدد ويقرأ «تكامل د (س) بالنسبة إلى س من أ إلى ب»
كما يسمى أ ، ب بالحدين السفلى والعلوى للتكامل.

* رمز المتغير س يمكن استبداله بأى رمز أخر دون أن يؤثر ذلك على مقدار التكامل.

أى أن : $\int_{أ}^{ب} د(س)\,ه س = \int_{أ}^{ب} د(ص)\,ه ص = \int_{أ}^{ب} د(ع)\,ه ع$ وهكذا ...

* يعبر عن ت (ب) - ت (أ) بالصورة $[ت(س)]_{أ}^{ب}$ أو $ت(س)\Big|_{أ}^{ب}$

* التكامل المحدد هو عدد حقيقى تتوقف قيمته على :

① الحدان السفلى والعلوى للتكامل المحدد أى على العددين أ ، ب على الترتيب.

② قاعدة الدالة د

* يمكن الحصول على التكامل المحدد بإيجاد التكامل غير المحدد مع إهمال ثابت التكامل ثم التعويض عن المتغير بحدى التكامل.

لاحظ إهمال ثابت التكامل لأن :

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\,ه س = [ت(س) + ث]_{أ}^{ب} = [ت(ب) + ث] - [ت(أ) + ث]$$
$$= ت(ب) - ت(أ) + ث - ث$$
$$= ت(ب) - ت(أ)$$

* تطبق جميع قواعد التكامل الغير محدد وجدول التكاملات القياسية عند إيجاد قيمة التكامل المحدد لدالة متصلة.

فإذا كانت : د ، ر دالتين متصلتين على الفترة [أ ، ب] فإن :

① $\int_{أ}^{ب} [د(س) \pm ر(س)]\,ه س = \int_{أ}^{ب} د(س)\,ه س \pm \int_{أ}^{ب} ر(س)\,ه س$

② $\int_{أ}^{ب} ك \cdot د(س)\,ه س = ك \int_{أ}^{ب} د(س)\,ه س$ حيث $ك \in ح$

نظرية

إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [أ ، ب] فإنها تكون قابلة للتكامل على هذه الفترة.

لاحظ أن النظرية السابقة تبين أن الاتصال شرط كاف لقابلية التكامل ولكنه ليس ضروريًا بمعنى أن كل دالة متصلة على فترة ما تكون قابلة للتكامل على هذه الفترة ولكن ليس كل دالة قابلة للتكامل على فترة ما تكون متصلة فى هذه الفترة.

الفرق بين التكامل المحدد و التكامل غير المحدد

① $\int د(س)\,ه س$ «تكامل غير محدد»
عبارة عن عائلة من الدوال تفاضل كل منها يعطى د (س)

② $\int_{أ}^{ب} د(س)\,ه س$ «تكامل محدد» عبارة عن عدد حقيقى.

خواص التكامل المحدد

إذا كانت د دالة متصلة على [أ ، ب] ، حـ ∈]أ ، ب[فإن :

① $\int_{ب}^{أ} د(س)\,ه س = -\int_{أ}^{ب} د(س)\,ه س$

② $\int_{أ}^{أ} د(س)\,ه س$ = صفر

③ $\int_{أ}^{ب} د(س)\,ه س = \int_{أ}^{حـ} د(س)\,ه س + \int_{حـ}^{ب} د(س)\,ه س$

مثال ١

أوجد التكامل المحدد للدالة : د من س = -١ إلى س = ٣ حيث : د (س) = ٤ س^{٣} + ١

الحل

∵ الدالة د كثيرة حدود ∴ متصلة على ح

$\therefore \int_{-١}^{٣} (٤ س^{٣} + ١)\,ه س = [س^{٤} + س]_{-١}^{٣} = [(٣)^{٤} + ٣] - [(-١)^{٤} + (-١)] = ٨٤$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

• يمكن استخدام الآلة الحاسبة العلمية لإيجاد الناتج على النحو الآتى



مثال ٦

أوجد قيمة كل مما يأتى :

① $\int_{1}^{2} (٣س^{٢} + ٢س - ١)\,د س$

② $\int_{\frac{-\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}} جتا س\,د س$

③ $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{د س}{جتا^{٢} س}$

④ $\int_{٢}^{٥} \frac{٢}{\sqrt{س - ١}}\,د س$

⑤ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} ظا\theta\,قا\theta\,د\theta$

الحـل

① $\int_{1}^{2} (٣س^{٢} + ٢س - ١)\,د س = [س^{٣} + س^{٢} - س]_{1}^{٢}$

$= (٢^{٣} + ٢^{٢} - ٢) - (١ + ١ - ١) = ٩$

② $\int_{٢}^{٥} \frac{٢}{\sqrt{س - ١}}\,د س = \int_{٢}^{٥} ٢(س - ١)^{-\frac{١}{٢}}\,د س = [٤(س - ١)^{\frac{١}{٢}}]_{٢}^{٥}$

$= ٤(٤)^{\frac{١}{٢}} - ٤(١)^{\frac{١}{٢}} = ٤$

③ $\int_{\frac{-\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}} جتا س\,د س = [جا س]_{\frac{-\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}} = جا\frac{\pi}{٢} - جا(\frac{-\pi}{٢})$

$= ١ - (-١) = ٢$

④ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} ظا\theta\,قا\theta\,د\theta = [قا\theta]_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} = قا\frac{\pi}{٤} - قا صفر = \sqrt{٢} - ١$

⑤ $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}} \frac{د س}{جتا^{٢} س} = \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}} قا^{٢} س\,د س = [ظا س]_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}} = ظا\frac{\pi}{٣} - ظا\frac{\pi}{٤} = \sqrt{٣} - ١$

ملاحظة : عند حساب التكامل باستخدام الآله الحاسبة

فى حالة إجراء عملية تكامل بها متغير يعبر عن زاوية فإن هذه الزاوية بالتقدير الدائرى لذلك نستخدم فى الآله الحاسبه إحدى الطريقتين :

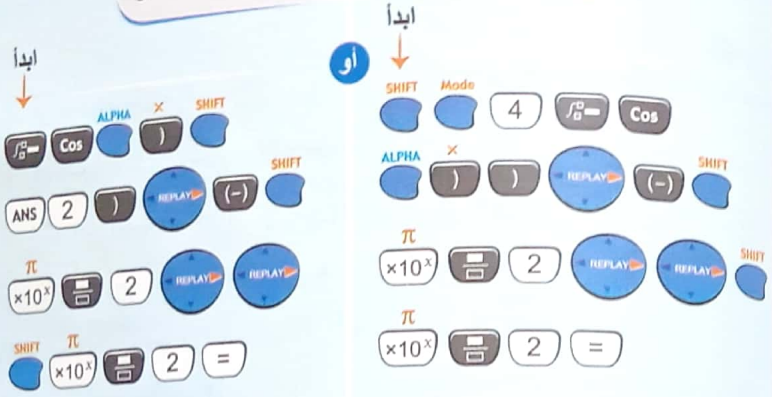
الطريقة الأولى

يجب أن تغير نظام الآله إلى النظام الدائرى Rad

الطريقة الثانية

نستخدم النظام الستينى المعتاد Deg مع كتابة الزاوية متبوعة بالأزرار التاليه من اليسار SHIFT (ANS) (2)

فمثلاً لحساب $\int_{\frac{-\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}} جتا س\,د س$ نستخدم الآله كالتالى



فتكون الإجابة الظاهرة هى ٢

مثال ٣

أوجد قيمة كل مما يأتى :

① $\int_{1}^{هـ} \frac{د ص}{ص}$

② $\int_{٠}^{لو_{هـ} هـ^{س}}\,د س$

③ $\int_{-٣}^{-١} \frac{٢}{س}\,د س$

الحـل

① $\int_{1}^{هـ} \frac{د ص}{ص} = [لو_{هـ} |ص|]_{1}^{هـ} = لو_{هـ} هـ - لو_{هـ} ١ = ١ - صفر = ١$

② $\int_{-٣}^{-١} \frac{٢}{س}\,د س = ٢\,[لو_{هـ} |س|]_{-٣}^{-١}$

$= ٢\,[لو_{هـ} |-١| - لو_{هـ} |-٣|] = -٢ لو_{هـ} ٣$

② $\int_{\text{صفر}}^{\text{لوغ}^{\circ}\text{هـ}} \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{د س} = [\text{هـ}^{\text{س}}]_{\text{صفر}}^{\text{لوغ}^{\circ}\text{هـ}}$

$= \text{هـ}^{\text{لوغ}^{\circ}\text{هـ}} - \text{هـ}^{\text{صفر}}$

$= ٥ - ١ = ٤$

تذكر أن:
$\text{هـ}^{\text{لوغ}_{\text{هـ}}\text{ا}} = \text{ا}$

مثال ٤

إذا كان: $\int_{١}^{٥} \text{د}(\text{س})\,\text{د س} = ٨$ ، $\int_{٥}^{١} \text{ر}(\text{س})\,\text{د س} = ٣$

أوجد قيمة: $\int_{١}^{٥} [\text{د}(\text{س}) + ٣\,\text{ر}(\text{س}) - ٢]\,\text{د س}$

الحل

$\because \int_{٥}^{١} \text{ر}(\text{س})\,\text{د س} = ٣$ $\quad \therefore \int_{١}^{٥} \text{ر}(\text{س})\,\text{د س} = -٣$

$\therefore \int_{١}^{٥} [\text{د}(\text{س}) + ٣\,\text{ر}(\text{س}) - ٢]\,\text{د س}$

$= \int_{١}^{٥} \text{د}(\text{س})\,\text{د س} + ٣ \int_{١}^{٥} \text{ر}(\text{س})\,\text{د س} - \int_{١}^{٥} ٢\,\text{د س}$

$= ٨ + ٣ \times (-٣) - [٢\text{س}]_{١}^{٥} = ٨ - ٩ - [١٠ - ٢] = -٩$

مثال ٥

إذا كانت: د دالة متصلة على ح ، $\int_{١}^{٤} \text{د}(\text{س})\,\text{د س} = ٧$ ، $\int_{٦}^{٤} \text{د}(\text{س}) = -١٢$

أوجد: $\int_{١}^{٦} \text{د}(\text{س})\,\text{د س}$

الحل

∵ د متصلة على ح ، $[١ ، ٦] \subset$ ح

$\therefore \int_{١}^{٦} \text{د}(\text{س})\,\text{د س} = \int_{١}^{٤} \text{د}(\text{س})\,\text{د س} + \int_{٤}^{٦} \text{د}(\text{س})\,\text{د س}$

$= \int_{١}^{٤} \text{د}(\text{س})\,\text{د س} - \int_{٦}^{٤} \text{د}(\text{س})\,\text{د س}$

$= ٧ - (-١٢) = ١٩$

مثال ٦

أوجد: $\int_{-٢}^{٢} \text{د}(\text{س})\,\text{د س}$ حيث $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س}^{٣} + ٣ & ، \text{س} \geq -١ \\ ٣\text{س} + ٤ & ، \text{س} < -١ \end{cases}$

الحل

* لاحظ أن د متصلة على $[-٢ ، ٢]$ لأن: $\text{د}(-١^{+}) = \text{د}(-١^{-}) = \text{د}(-١) = ١$

$\therefore$ د قابلة للتكامل على الفترة $[-٢ ، ٢]$

$\therefore \int_{-٢}^{٢} \text{د}(\text{س})\,\text{د س} = \int_{-٢}^{-١} (٢\text{س}^{٣} + ٣)\,\text{د س} + \int_{-١}^{٢} (٣\text{س} + ٤)\,\text{د س}$

$= \left[\frac{١}{٢}\text{س}^{٤} + ٣\text{س}\right]_{-٢}^{-١} + \left[\frac{٣}{٢}\text{س}^{٢} + ٤\text{س}\right]_{-١}^{٢}$

$= \left(-٢\frac{١}{٢} - ٢\right) + \left(١٤ + ٢\frac{١}{٢}\right) = ١٢$

مثال ٧

أوجد قيمة كل مما يأتى: ① $\int_{٠}^{٦} |\text{س} - ٤|\,\text{د س}$ ② $\int_{-٢}^{٤} |\text{س}^{٢} - ٣\text{س}|\,\text{د س}$

الحل

① $\because |\text{س} - ٤| = \begin{cases} \text{س} - ٤ & ، \text{س} \geq ٤ \\ -\text{س} + ٤ & ، \text{س} < ٤ \end{cases}$

، $\because$ د متصلة عند س $= ٤$

$\therefore \int_{٠}^{٦} |\text{س} - ٤|\,\text{د س} = \int_{٠}^{٤} (-\text{س} + ٤)\,\text{د س} + \int_{٤}^{٦} (\text{س} - ٤)\,\text{د س}$

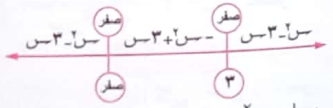
$= \left[-\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + ٤\text{س}\right]_{٠}^{٤} + \left[\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} - ٤\text{س}\right]_{٤}^{٦}$

$= (٨ - ٠) + ((-٦) - (-٨)) = ١٠$

② بوضع د $(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٣\text{س} = ٠$

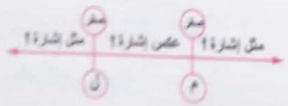
$\therefore$ س $(\text{س} - ٣) = ٠$

$\therefore$ س $= ٠$ أ، س $= ٣$



$\therefore |\text{س}^{٢} - ٣\text{س}| = \begin{cases} \text{س}^{٢} - ٣\text{س} & ، \text{س} \geq ٠ \\ -\text{س}^{٢} + ٣\text{س} & ، ٠ < \text{س} \leq ٣ \\ \text{س}^{٢} - ٣\text{س} & ، \text{س} > ٣ \end{cases}$

تذكر أن:
إذا كان للدالة د : د $(\text{س}) = \text{ا}\text{س}^{٢} + \text{ب}\text{س} + \text{حـ}$
جذران حقيقيان مختلفان ل ، م حيث ل < م
فإن: د (س) يكون لها نفس إشارة ا (معامل س٢)
عندما س $\in$ ح - [ل ، م]
وتكون إشارتها مخالفة لإشارة ا عندما س $\in$]ل ، م[
، د (س) = صفر عندما س $\in$ {ل ، م}



$$\therefore \int_{-2}^{2} |س^3 - 3س| \, ؤ س$$

$$= \int_{-2}^{1} (س^3 - 3س) \, ؤ س + \int_{1}^{2} (-س^3 + 3س) \, ؤ س$$

$$= \left[\frac{1}{4}س^4 - \frac{3}{2}س^2\right]_{-2}^{1} + \left[-\frac{1}{4}س^4 + \frac{3}{2}س^2\right]_{1}^{2}$$

$$= \left(\frac{1}{4} - 2\frac{3}{4}\right) + \left(-4\frac{1}{4} + 2\frac{2}{3}\right) = 15$$

خواص التكامل المحدد للدوال الفردية و الدوال الزوجية

① إذا كانت الدالة د متصلة وفردية على الفترة $[-ا، ا]$

فإن : $\int_{-ا}^{ا} د(س) \, ؤ س = صفر$

② إذا كانت الدالة د متصلة وزوجية على الفترة $[-ا، ا]$

فإن : $\int_{-ا}^{ا} د(س) \, ؤ س = 2 \int_{0}^{ا} د(س) \, ؤ س$

مثال ٨

أوجد قيمة كل مما يأتى : ① $\int_{-3}^{3} \frac{س^5 + ما س}{س^2 + 1} \, ؤ س$ ② $\int_{-2}^{2} (س^4 - 1) \, ؤ س$

③ $\int_{-4}^{4} س^5 \sqrt{س^4 + 1} \, ؤ س$

الحل

① ∵ $د(س) = \frac{س^5 + ما س}{س^2 + 1}$ متصلة على ح

، ∵ $د(-س) = \frac{(-س)^5 + ما(-س)}{(-س)^2 + 1} = \frac{-س^5 - ما س}{س^2 + 1} = -\left(\frac{س^5 + ما س}{س^2 + 1}\right)$

$= -د(س)$

∴ الدالة د فردية ∴ $\int_{-3}^{3} \frac{س^5 + ما س}{س^2 + 1} \, ؤ س = صفر$

② ∵ $د(س) = س^4 - 1$ كثيرة حدود

∴ د متصلة على ح

، ∵ $د(-س) = (-س)^4 - 1 = س^4 - 1 = د(س)$

∴ الدالة د زوجية

تذكر أن :

إذا كان : س ، − س ينتميان لمجال الدالة فإن

* فى الدالة الزوجية يكون : $د(-س) = د(س)$

* فى الدالة الفردية يكون : $د(-س) = -د(س)$

$$\therefore \int_{-2}^{2} (س^4 - 1) \, ؤ س = 2 \int_{0}^{2} (س^4 - 1) \, ؤ س$$

$$= 2\left[\frac{س^5}{5} - س\right]_{0}^{2}$$

$$= 2\left[\frac{32}{5} - 0\right] = \frac{64}{5} = 8,8$$

② ∵ $د(س) = س^5 \sqrt{س^4 + 1}$ متصلة على ح

، $د(-س) = (-س)^5 \sqrt{(-س)^4 + 1} = -س^5 \sqrt{س^4 + 1} = -د(س)$

∴ الدالة د فردية

∴ $\int_{-4}^{4} س^5 \sqrt{س^4 + 1} \, ؤ س = صفر$

مثال ٩

إذا كانت الدالة د دالة زوجية متصلة على الفترة $[-5، 5]$ ، $\int_{0}^{5} د(س) \, ؤ س = 30$

، $\int_{0}^{2} د(س) \, ؤ س = 9$ أوجد قيمة : $\int_{-5}^{-3} د(س) \, ؤ س$

الحل

∵ الدالة د زوجية على الفترة $[-5، 5]$

، ∵ $\int_{0}^{5} د(س) \, ؤ س = 30$

∴ $2 \int_{0}^{5} د(س) \, ؤ س = 30$

∴ $\int_{0}^{5} د(س) \, ؤ س = 15$

∴ $\int_{0}^{2} د(س) \, ؤ س + \int_{2}^{5} د(س) \, ؤ س = 15$ ∴ $9 + \int_{2}^{5} د(س) \, ؤ س = 15$

∴ $\int_{2}^{5} د(س) \, ؤ س = 6$ ∴ $\int_{-5}^{-3} د(س) \, ؤ س = 6$

لاحظ أن

① إذا كانت : د زوجية ، ا ، ب أعداد موجبة فإن :

$\int_{-ب}^{-ا} د(س) \, ؤ س = \int_{ا}^{ب} د(س) \, ؤ س$

② إذا كانت : د فردية ، ا ، ب أعداد موجبة فإن :

$\int_{-ب}^{-ا} د(س) \, ؤ س = -\int_{ا}^{ب} د(س) \, ؤ س$

مثال ١٠

أوجد قيمة كل مما يأتى :

① $\int_{-2}^{2} س(س + 2)^3 \, ؤ س$ ② $\int_{0}^{\sqrt{5}} س \sqrt{س^2 + 4} \, ؤ س$

الحـــل

① بوضع ع = س + ٢

∴ س = ع − ٢ ، ء س = ء ع

∴ ∫ س (س + ٢)³ ء س = ∫ (ع − ٢) × ع³ ء ع = ∫ (ع⁴ − ٢ ع³) ء ع

$= \frac{1}{5} ع^5 - \frac{1}{2} ع^4 + ث$

$= \frac{1}{10} ع^4 (2 ع - 5) + ث$

$= \frac{1}{10} (س + 2)^4 (2 (س + 2) - 5) + ث$

$= \frac{1}{10} (س + 2)^4 (2 س - 1) + ث$

$\therefore \int_{-3}^{-2} س (س + 2)^3 ء س = \left[\frac{1}{10} (س + 2)^4 (2 س - 1)\right]_{-3}^{-2}$

$= صفر - \left[\frac{1}{10} \times 1 \times -7\right] = \frac{7}{10}$

* يمكن الحل مباشرة بإيجاد قيم ع المناظرة لقيم حدى التكامل [س = −٣ ، س = −٢]

عند س = −٣ فإن : ع = −١

، عند س = −٢ فإن : ع = ٠

$\therefore \int_{-3}^{-2} س (س + 2)^3 ء س = \int_{-1}^{0} (ع^4 - 2 ع^3) ء ع$

$= \left[\frac{1}{5} ع^5 - \frac{1}{2} ع^4\right]_{-1}^{0}$

$= صفر - \left[-\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right] = \frac{7}{10}$

② بوضع ع = س² + ٤ ∴ ء ع = ٢ س ء س

$\therefore \int س \sqrt{س^2 + 4}\ ء س = \frac{1}{2} \int \sqrt{س^2 + 4} \times 2 س ء س$

$= \frac{1}{2} \int \sqrt{ع}\ ء ع = \frac{1}{2} \int ع^{\frac{1}{2}} ء ع$

$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} ع^{\frac{3}{2}} + ث = \frac{1}{3} \sqrt{(س^2 + 4)^3} + ث$

$\therefore \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} س \sqrt{س^2 + 4}\ ء س = \left[\frac{1}{3} \sqrt{(س^2 + 4)^3}\right]_{\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}$

لاحظ أن

الحل باستخدام طريقة التعويض

* يمكن الحل مباشرة بإيجاد قيم ع المناظرة لقيم حدى التكامل

عند س = ٠ فإن : ع = ٤ ، عند س = $\sqrt{5}$ فإن : ع = ٩

$\therefore \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} س \sqrt{س^2 + 4}\ ء س = \frac{1}{2} \int_{4}^{9} ع^{\frac{1}{2}} ء ع$

$= \left[\frac{1}{3} ع^{\frac{3}{2}}\right]_{4}^{9} = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}$

ملاحظات هامة

① فى التكامل غير المحدد كان ∫ د (س) ء س − ∫ د (س) ء س = ثابت

أما فى التكامل المحدد يكون $\int_{أ}^{ب}$ د (س) ء س − $\int_{أ}^{ب}$ د (س) ء س = صفر

② لاحظ الفرق بين هاتين الإجابتين :

* $\int_{1}^{2} \frac{1}{س^2} ء س = \left[\frac{-1}{س}\right]_{1}^{2} = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$ «إجابة صحيحة»

* $\int_{-2}^{2} \frac{1}{س^2} ء س = \left[\frac{-1}{س}\right]_{-2}^{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$ «إجابة خطأ»

وذلك لأن الدالة د : د (س) = $\frac{1}{س^2}$ غير متصلة عند س = ٠

ولذلك لا نستطيع إيجاد قيمة التكامل فى فترة تحتوى على س = ٠ ولتكن [−٢ ، ٢] لأن النظرية الأساسية فى التفاضل تشترط أن تكون الدالة متصلة على الفترة ولذلك

«$\int_{-2}^{2} \frac{1}{س^2} ء س$» لا نستطيع إيجاد قيمته.

CamScanner بواسطة ممدوح

تمارين 17

على التكامل المحدد

اختبار تفاعلي

• فهم • تطبيق • مستويات عليا — من أسئلة الكتاب المدرسي

١ أوجد التكامل المحدد للدالة د من س = −٢ إلى س = ٤

حيث : د (س) = ٣ س^{٢} − ٢ ٦٠

٢ أوجد قيمة كل مما يأتي :

(١) $\int_{١}^{٤} ٧ \, ؤ س$ ٢١

(٢) $\int_{-١}^{٢} (٢ س + ٣) \, ؤ س$ ١٢

(٣) $\int_{-١}^{٣} (٤ س^{٣} − ٦ س^{٢} + ٥) \, ؤ س$ ٤٤

(٤) $\int_{٠}^{٤} (٥ س \sqrt{س} − ٣ س^{\frac{١}{٢}}) \, ؤ س$ ٤٨

(٥) $\int_{٢}^{٤} (س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}}) \, ؤ س$ $\frac{٢٢٧}{١٢}$

(٦) $\int_{١}^{٣} \frac{٦ − س^{٤}}{٢ س^{٢}} \, ؤ س$ $\frac{-٧}{٣}$

(٧) $\int_{٠}^{٥} \sqrt{٣ س + ١} \, ؤ س$ ١٤

(٨) $\int_{٠}^{٤} (٢ س + ١)^{\frac{٣}{٢}} \, ؤ س$ $\frac{٢٤٢}{٥}$

(٩) $\int_{٠}^{٥} \frac{٣}{\sqrt{ن + ٤}} \, ؤ ن$ ٦

(١٠) $\int_{٤}^{٨} \frac{ؤ ن}{\sqrt{ن − ٨}}$ $٤ − ٤\sqrt{٢}$

(١١) $\int_{١}^{٤} \frac{س − ١}{\sqrt{س − ١}} \, ؤ س$ $\frac{٢٣}{٣}$

(١٢) $\int_{-١}^{١} \frac{س + ٨}{\sqrt{س^{٢} + ٢}} \, ؤ س$ $\frac{٤٦}{٥}$

٣ أوجد قيمة كل مما يأتي :

(١) $\int_{٠}^{\pi} \text{ما} س \, ؤ س$ ٢٠

(٢) $\int_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}} \text{ما} \theta \, ؤ \theta$ ٢٠

(٣) $\int_{-\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} \text{قا} س \text{ظا} س \, ؤ س$ $١٠ − ٢\sqrt{٢}$

(٤) $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} \text{قتا} \theta \text{ظا} \theta \, ؤ \theta$ صفر

(٥) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{قا}^{٢} س \, ؤ س$ $٣\sqrt{٣}$

(٦) $\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٣}} \text{قا}^{٢} س \, ؤ س$ $٢٠\sqrt{٣}$

(٧) $\int_{٠}^{١} ٢ \text{ما} \pi ع \, ؤ ع$ $\frac{٤}{\pi}$

(٨) $\int_{-\pi}^{\pi} (٤ + \pi \text{ما} ٢ س) \, ؤ س$ ٨٠

(٩) $\int_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}} (\text{ما} س + \text{ما} س) \, ؤ س$ ٢٠

(١٠) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{ظا} ع \text{قا}^{٢} ع \, ؤ ع$ $\frac{١}{٢}$

(١١) $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{ؤ س}{\text{ما}^{٢} س}$ ١٠

(١٢) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{\text{ما} س}{\text{جتا}^{٢} س} \, ؤ س$ ١٠

٤ أوجد قيمة كل مما يأتي :

(١) $\int_{١}^{٢} \frac{٢}{س} \, ؤ س$ ٢٠

(٢) $\int_{١}^{٢} \frac{١}{س} \, ؤ س$ ١٠

(٣) $\int_{-٥}^{-١} \frac{٣}{س} \, ؤ س$ -٣ لو$_{هـ}$ ٥

(٤) $\int_{٠}^{٢} هـ^{-٣س} \, ؤ س$ $-\frac{١}{٢}(هـ^{-٦} − ١)$

(٥) $\int_{٠}^{\text{لو}_{هـ}٣} هـ^{س} \, ؤ س$ ٢٠

(٦) $\int_{٠}^{٣} (٢ س − ٧ هـ^{س}) \, ؤ س$ $١٦٠ − ٧ هـ^{٣}$

(٧) $\int_{٠}^{١} ٣ س هـ^{س^{٢}} \, ؤ س$ $\frac{٣}{٢}(هـ − ١)$

(٨) $\int_{\text{لو}_{هـ}٣}^{\text{لو}_{هـ}٤} (٢ هـ^{٢س} − هـ^{س}) \, ؤ س$ ١٠٠

٥ عبر عن كل مما يأتي باستخدام تكامل واحد :

(١) $\int_{٠}^{٥} س^{٢} \, ؤ س + \int_{-٢}^{٥} س^{٢} \, ؤ س$

(٢) $\int_{-٤}^{-١} \sqrt{س + ٦} \, ؤ س − \int_{-١}^{٤} \sqrt{س + ٦} \, ؤ س$

(٣) $\int_{٢}^{٦} ل \, ؤ س + \int_{٣}^{٢} ل \, ؤ س$

(٤) $\int_{٠}^{٤} ٢ س^{٢} \, ؤ س + \int_{٤}^{٥} س^{٢} \, ؤ س$

٦ إذا كان : $\int_{١}^{٥} د (س) \, ؤ س = ١٠$ ، $\int_{١}^{٥} ر (س) \, ؤ س = −٢$

احسب قيمة كل مما يأتي :

(١) $\int_{١}^{٥} [د (س) + ر (س)] \, ؤ س$ ٨ ، ١٢

(٢) $\int_{١}^{٥} [د (س) − ر (س)] \, ؤ س$

(٣) $\int_{٥}^{١} ٣ ر (س) \, ؤ س$

٧ إذا كان : $\int_{٢}^{٤} د (س) \, ؤ س = ٥$ ، $\int_{٢}^{٤} ر (س) \, ؤ س = −٢$ فأوجد :

(١) $\int_{٢}^{٤} ٣ د (س) \, ؤ س$ ١٥

(٢) $\int_{٢}^{٤} ٢ ر (س) \, ؤ س$ ٤

(٣) $\int_{٢}^{٤} [٣ د (س) − ٢ ر (س)] \, ؤ س$ ٢٩

(٤) $\int_{٢}^{٤} [٣ ر (س) + ١٠ س] \, ؤ س$ ٢٠ + ٣٠ = ٥٠

٨ إذا كان : $\int_{-٢}^{٥} د(س)\,ء س = ٩$ ، $\int_{٥}^{٢} د(س)\,ء س = ٤$ ،

أوجد قيمة : $\int_{-٢}^{٥} [٣ د(س) - ٦ س]\,ء س$ ٤٨ وحدة

٩ إذا كانت د دالة متصلة على ح ، $\int_{-١}^{٤} د(س)\,ء س = ٢٥٥$ ،

$\int_{-١}^{-٢} د(س)\,ء س = -١٥$ فأوجد : $\int_{-٢}^{٤} د(س)\,ء س$ ٢٤٠ وحدة

١٠ إذا كانت : د(س) = $\begin{cases} س^{٢} & ، س < ٢ \\ ٣س - ٢ & ، س \geq ٢ \end{cases}$ أوجد : $\int_{٠}^{٦} د(س)\,ء س$ $\frac{٤٩}{٦}$ وحدة

١١ إذا كانت : د(س) = $\begin{cases} ٢ & ، س < ٢ \\ س & ، س \geq ٢ \end{cases}$ أوجد : $\int_{٠}^{٦} د(س)\,ء س$ ٢٠٠ وحدة

١٢ [دور ثان ٢٠١٩] إذا كانت : د(س) = $\begin{cases} ٢س + س^{٢} & ، س < ٠ \\ ٢س - س^{٢} & ، س \geq ٠ \end{cases}$

أوجد : $\int_{-١}^{٣} د(س)\,ء س$ $\frac{-٢}{٣}$ وحدة

١٣ إذا كانت : د(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ١ & ، س \geq ١ \\ ٣س - ١ & ، س < ١ \end{cases}$ أوجد : $\int_{٠}^{٦} د(س)\,ء س$ $\frac{٢٩}{٦}$ وحدة

١٤ أوجد قيمة كل مما يأتى :

(١) $\int_{-١}^{٣} |س - ١|\,ء س$ ٤ وحدة

(٢) $\int_{٠}^{٥} |س - ٣|\,ء س$ $\frac{١٣}{٢}$ وحدة

(٣) $\int_{-٢}^{٤} |س - ٢|\,ء س$ ١٠٠ وحدة

(٤) $\int_{-٤}^{٢} |س + ١|\,ء س$ ٩ وحدة

(٥) $\int_{٠}^{٣} |٢س - ٣|\,ء س$ $\frac{٩}{٢}$ وحدة

(٦) $\int_{٠}^{٢} |٢س - ١|\,ء س$ $\frac{٥}{٢}$ وحدة

(٧) $\int_{-٣}^{١} \sqrt{س^{٢} + ٤س + ٤}\,ء س$ ٥ وحدة

(٨) $\int_{-١}^{٣} |س|\,ء س$ $٨\frac{١}{٢}$ وحدة

(٩) $\int_{-١}^{٣} |س - ٤|\,ء س$ ٢٠٠ وحدة

(١٠) $\int_{-٢}^{٣} |س - ١|\,ء س$ $-٣\frac{١}{٢}$ وحدة

(١١) $\int_{-١}^{١} |س^{٢} - ٩|\,ء س$ $١٧\frac{١}{٢}$ وحدة

(١٢) $\int_{-٣}^{٣} |س^{٢} - ٤|\,ء س$ $١٥\frac{١}{٢}$ وحدة

(١٣) $\int_{-١}^{٥} |س^{٢} - ٤س|\,ء س$ $١٥\frac{١}{٢}$ وحدة

١٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\int_{١}^{٣} د(س)\,ء س = ٥$ ، $\int_{١}^{٤} د(س)\,ء س = ٧$

فإن : $\int_{٣}^{٤} (٤ د(س) + ٣)\,ء س$ يساوى

(أ) ١٢ (ب) ٧ (جـ) ١٢ (د) ١٩

(٢) $\int_{ب}^{ب} د(س)\,ء س =$

(أ) د(ب) - د(أ) (ب) $\int_{أ}^{ب} د(س)\,ء س$

(جـ) $-\int_{ب}^{أ} د(س)\,ء س$ (د) ب - أ

(٣) إذا كان : $\int_{٢}^{٥} د(س)\,ء س = ٤$

فإن : $\int_{٢}^{٥} [٣ د(س) - ١]\,ء س$ يساوى

(أ) ٩ (ب) ١١ (جـ) ١٢ (د) -٨

(٤) إذا كان : $\int_{-٣}^{٣} د(س)\,ء س = ١٢$ ، $\int_{-٣}^{٥} د(س)\,ء س = ١٦$

فإن : $\int_{٣}^{٥} د(س)\,ء س$ يساوى

(أ) -٢٨ (ب) -٤ (جـ) ٤ (د) ٢٨

(٥) إذا كانت د دالة متصلة على ح ، $\int_{-١}^{٣} د(س)\,ء س = ٧$

، $\int_{٣}^{٥} د(س)\,ء س = -١١$ فإن : $\int_{-١}^{٥} د(س)\,ء س$ تساوى

(أ) -٤ (ب) ١٨ (جـ) -١٨ (د) ٧٧

(٦) [دور أول ٢٠١٧] إذا كانت : د(س) = |س| فإن : $\int_{-٢}^{٢} د(س)\,ء س$ يساوى

(أ) -١ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) ٤

(٧) $\int_{٠}^{٢} (٢ - |س|)\,ء س$ يساوى

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) صفر

(٨) إذا كانت : دَ متصلة على الفترة [أ ، ب]

فإن : د(أ) + $\int_{أ}^{ب} دَ(س)\,ء س =$

(أ) دَ(ب) (ب) د(ب) (جـ) د(أ) (د) دَ(أ)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٥ $\int_{-1}^{1} \frac{\text{ه}^{\text{س}}}{\sqrt{\text{ه}^{\text{س}} + ٤}}$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

٦ $\int_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جا}^{٣}\text{س}$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) صفر (ج) ١ (د) ٢

٧ إذا كان : $\int_{-٢}^{٢} \text{د}(\text{س})$ د س = ٤ فإن : $\int_{-٢}^{٢} [\text{د}(\text{س}) + ٣]$ د س = ...

(أ) ٤ (ب) ٧ (ج) ١٠ (د) ١٢

٨ $\int_{-٢}^{٢} |\text{س}^{٣}|$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٩ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

١٠ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

١١ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

١٢ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

١٣ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

١٤ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

١٥ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

١٦ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

١٧ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

١٨ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

١٩ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٢٠ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٢١ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٢٢ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٢٣ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٢٤ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٢٥ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٢٦ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٢٧ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٢٨ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٢٩ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٣٠ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٣١ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٣٢ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٣٣ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٣٤ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٣٥ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٣٦ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٣٧ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٣٨ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٣٩ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٤٠ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٤١ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٤٢ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٤٣ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٤٤ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٤٥ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٤٦ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٤٧ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٤٨ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٤٩ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٥٠ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٥١ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٥٢ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٥٣ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٥٤ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٥٥ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٥٦ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٥٧ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٥٨ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٥٩ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٦٠ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٦١ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٦٢ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٦٣ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٦٤ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٦٥ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٦٦ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٦٧ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٦٨ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٦٩ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٧٠ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٧١ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٧٢ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٧٣ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٧٤ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٧٥ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٧٦ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٧٧ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٧٨ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٧٩ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٨٠ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٨١ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٨٢ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٨٣ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٨٤ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٨٥ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٨٦ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٨٧ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٨٨ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٨٩ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٩٠ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٩١ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٩٢ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٩٣ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٩٤ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٩٥ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٩٦ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٩٧ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

٩٨ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

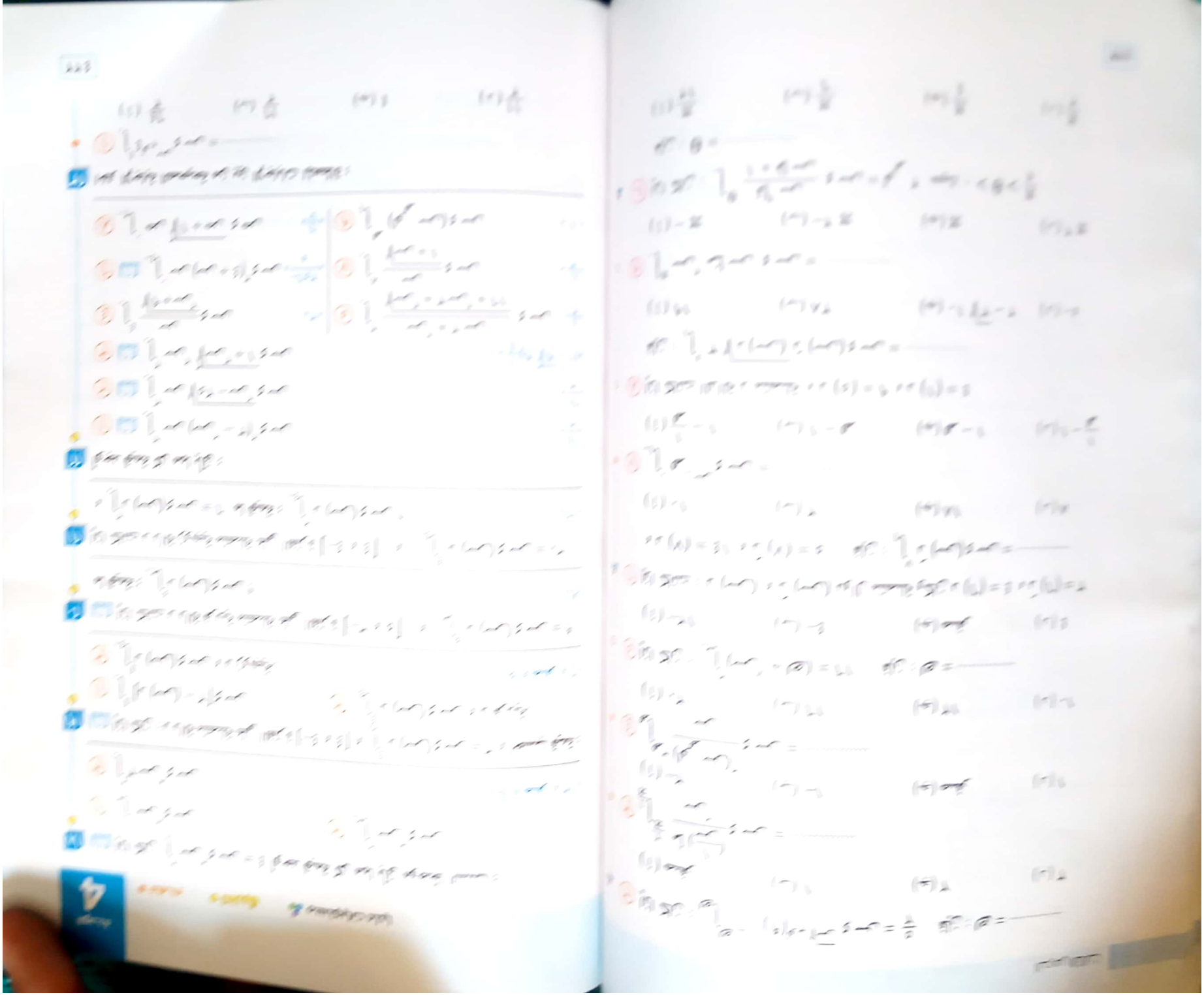
٩٩ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

١٠٠ $\int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$ د س = ...

(أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(١١) إذا كان : $\int_{١}^{٨} د(س)\,ء س + \int_{٣}^{١} د(س)\,ء س = \int_{٣}^{٨} د(س)\,ء س$

فإن : ب = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

(١٢) إذا كان : $\int_{١}^{هـ} (٣س^{٢} - ١)\,ء س = هـ^{٣} - ٢$ فإن : هـ = ...

(أ) ٦ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) ١

(١٣) إذا كان : $\int_{٢}^{أ} (٤س - ١)\,ء س = ٩$ ، أ ∈ ص$^{+}$ فإن : أ = ...

(أ) −٣ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٤) إذا كان : $\left(\int_{٠}^{أ} س\,ء س\right)^{٣} = \int_{٠}^{أ} س^{٣}\,ء س$ ، أ ∈ ح$^{+}$ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) ٣ (د) $\sqrt{٣}$

(١٥) إذا كان : $\int_{٢}^{١٠} د(س)\,ء س + \int_{٨}^{١١} د(س)\,ء س + \int_{١٠}^{٨} د(س)\,ء س = ٩$

فإن : $\int_{٢}^{١١} د(س)\,ء س$ = ...

(أ) ٤,٥ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ١٨

(١٦) $\int_{٢٠١٩}^{٢٠٢١} (س - ٢٠٢٠)^{٢}\,ء س$ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) ١ (د) $\frac{٤}{٣}$

(١٧) إذا كان : $\int_{٣}^{٩} د(س)\,ء س = ٢٠$ ، $\int_{٥}^{١١} د(س)\,ء س = ٢٥$

فإن : $\int_{٣}^{٥} د(س)\,ء س - \int_{٩}^{١١} د(س)\,ء س$ = ...

(أ) −١٠ (ب) −٥ (جـ) صفر (د) ٥

(١٨) إذا كان : $\int_{أ}^{ب} (٣س^{٢} + ٢)\,ء س = ٩٦$ ، $\int_{أ}^{ب} ء س = ٤$

فإن : أ × ب = ...

(أ) ١ (ب) ١,٥ (جـ) ٢ (د) ٢,٥

(١٩) إذا كان : $\int_{لو هـ ب}^{لو هـ أ} هـ^{س}\,ء س = ٢$ ، $أ^{٢} - ب^{٢} = ١٢$ فإن : أ = ...

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٢

(٢٠) $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} ظا^{٤} س\,ء س + \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} ظا^{٤} س\,ء س$ = ...

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ (ب) $\frac{-\sqrt{٣}}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{-١}{٤}$

(٢١) إذا كان : أ = $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} قا^{٢} س\,ء س$ ، ب = $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} ظا^{٢} س\,ء س$

فإن : أ + ب = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) $\frac{-\pi}{٢}$

(٢٢) إذا كان د دالة متصلة على [−٧ ، ٧] وكان د (−س) = د (س)

وكان $\int_{-٥}^{٠} د(س)\,ء س = ٨$ ، $\int_{٥}^{٧} د(س)\,ء س = ٤$

فإن $\int_{-٥}^{٧} د(س)\,ء س$ = ...

(أ) ٢٢ (ب) ٢٠ (جـ) ١٩ (د) ١٧

(٢٣) إذا كانت د (س) معرفة على ح وكان د (−س) = د (س)

وكان $\int_{-٥}^{١} د(س)\,ء س = ٢٤$ ، $\int_{١}^{٥} د(س)\,ء س = ١٦$

فإن : $\int_{٠}^{١} د(س)\,ء س$ = ...

(أ) −٨ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ٢٠

(٢٤) إذا كانت د دالة فردية ومتصلة على ح وكان $\int_{-٦}^{٤} د(س)\,ء س = -٣$

، $\int_{٠}^{٦} د(س)\,ء س = ١١$ فإن : $\int_{٠}^{٤} د(س)\,ء س$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٠

(٢٥) إذا كانت : د دالة زوجية ، $\int_{٠}^{١} د(س)\,ء س = ٧$

فإن : $\int_{-١}^{١} [د(س) - د(-س)]\,ء س$ = ...

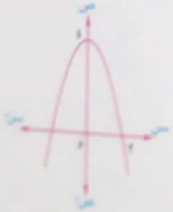
(أ) صفر (ب) −٧ (جـ) −١٤ (د) ٧

(٢٦) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة ص = د (س)

فإن : $\int_{٠}^{٢} د(س)\,ء س$ = ...

(أ) ٢ (ب) −٢

(جـ) −٤ (د) ٤



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٢٧) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة ص = د (س) وكان ن (س) = س ، د (س)



فإن : $\int_{1}^{2} ن'(س)\, ع س$ =

(أ) −١ (ب) −٢

(ج) −٣ (د) −٤

مسائل تقيس مهارات التفكير

(٢٨) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت د دالة حيث : $\int_{1}^{11} د(٢س)\, ع س = ١٠$

فأى مما يأتى يكون صحيح ؟

(أ) $\int_{١٢}^{٢٤} د(ن)\, ع ن = ٥$ (ب) $\int_{١٢}^{٢٤} د(ن)\, ع ن = ٢٠$

(ج) $\int_{1}^{11} د(ن)\, ع ن = ٥$ (د) $\int_{1}^{11} د(ن)\, ع ن = ٢٠$

(٢) إذا كان : ن (٩) = ٧ ، ن (٤) = ٣

فإن : $\int_{1}^{2} ٢س\, ن(س^{٢})\, ن'(س^{٢})\, ع س$ =

(أ) ١٢ (ب) ١٦ (ج) ٢٠ (د) ٢١

(٣) $\int_{0}^{\pi/٢٠} |جا س|\, ع س$ =

(أ) ٢٠ (ب) π ٢٠ (ج) ٤٠ (د) π ٤٠

(٤) إذا كان : $\int_{جا\theta}^{1} \frac{جا\theta}{٢}\, ع س = \frac{\sqrt{٣}-٢}{٨}$ فإن إحدى قيم θ تساوى

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (ج) ٦٠° (د) ٧٥°

(٥) $\int_{1}^{هـ} \left(\frac{١ + س لو_{هـ} س}{س}\right) ع س$ =

(أ) هـ (ب) هـ − ١ (ج) هـ (د) هـ + ١

(٦) إذا كانت د دالة متصلة على ح وكان $\int_{1}^{٥} د(س)\, ع س = ٧$

وكان منحنى الدالة يمر بالنقطتين (١ ، ٣) ، (٥ ، ٩)

فإن : $\int_{1}^{٥} س\, د'(س)\, ع س$ = ...

(أ) ٢٠ (ب) ٤٢ (ج) ٣٥ (د) ٧

(٧) إذا كانت : د (س) = − س لو$_{هـ}$ س فإن : $\int_{1}^{هـ} 3\, د(س)\, ع س$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢

(ج) $\frac{1}{٢}$ (هـ^{٢} − هـ − ١) (د) $\frac{1}{هـ}$ (١ − هـ)

(٨) $\int_{1}^{٥} \frac{١}{س + ٢}\, ع س$ = ...

(أ) $\int_{0}^{٢} \frac{١}{س + ٤}\, ع س$ (ب) $\int_{0}^{٢} \frac{١}{س + ٤}\, ع س$

(ج) $\int_{٢}^{٢} \frac{١}{س + ١}\, ع س$ (د) كل ما سبق

(٩) إذا كان : ٢ < ب < ٤ وكان $\int_{2}^{ب} |س - ٢|\, ع س = ٤$ فإن : $\frac{٢ + ب^{٢}}{٢ + ب}$ = ...

(أ) $\frac{1}{٢}$ (ب) ٢ (ج) ٤ (د) −٤

(١٠) $\int_{0}^{٢} (س + ٦)^{٢}$ هـ$^{س^{٢}}\, ع س - \int_{0}^{٢} (س - ٦)^{٢}$ هـ$^{س^{٢}}\, ع س$ = ...

(أ) ١٢ هـ^{٢} (ب) ١٢ هـ^{٢} (ج) ١٢ (هـ^{٢} − ١) (د) ٢٤ (هـ^{٢} − ١)

(١١) إذا كان : $\int_{0}^{٥} د(٣س + ٢)\, ع س = ٤٥$ فإن : $\int_{2}^{١٧} د(٥س + ٢)\, ع س$ = ...

(أ) ٩ (ب) ١٨ (ج) ٢٧ (د) ٣٦

(١٢) إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق فى ح وكان د (١) = ٤ ، د (٣) = ١٠

فإن : $\int_{1}^{٢} [د(س) + س\, د'(س)]\, ع س$ = ...

(أ) ٢٢ (ب) ٢٤ (ج) ٢٦ (د) ٢٨

(١٣) نهـا$_{س \to ٠}$ $\left[\frac{١}{هـ^{س}} \int_{1}^{هـ^{س}} \sqrt{س^{٢} + ١٦}\, ع س\right]$ =

(أ) ٣ (ب) ٥ (ج) ٩ (د) ١٦

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(١٤) إذا كان : $\int_{أ}^{ب} (٣ س^{٢} - ٢ س) د س \geq ٢$ أ حيث أ $\in$ ح فإن أ $\in$

(أ) $[٠ ، ٢]$ (ب) $]٠ ، ٢]$ (جـ) $]٢ ، \infty[$ (د) $]١ ، \infty[$

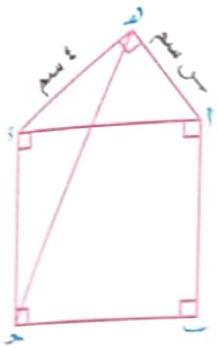
(١٥) إذا كانت د : د (س) دالة قابلة للاشتقاق مرتين فى الفترة $[أ ، ب]$ وكان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند س = أ يساوى ١ وميل المماس لمنحنى الدالة د عند س = ب يساوى $\sqrt{٢}$ فإن : $\int_{أ}^{ب} ٢ د'(س) د'(س) د س$ = ...

(أ) -٢ (ب) -١ (جـ) ١ (د) ٢

(١٦) $\int_{٠}^{١٠} [(س - ١)(س - ٢)(س - ٣) (س - ٨)(س - ٩)] د س$ = ...

(أ) صفر (ب) ١٠ (جـ) ٥٠ (د) ١٠٠

(١٧) فى الشكل المقابل :



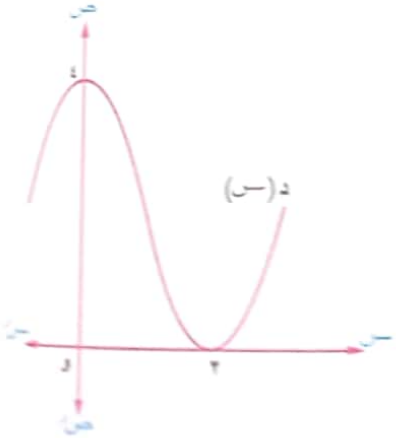
إذا كان : أ ب جـ د مربع ، ق (∠ أ هـ د) = ٩٠°

فإن : $\int_{٠}^{١} (هـ جـ)^{٢} د س$ = ...

(أ) $\frac{٨٢}{٣}$ (ب) $\frac{٩١}{٣}$

(جـ) $\frac{١٠٠}{٣}$ (د) $\frac{١٠٩}{٣}$

(١٨) فى الشكل المقابل :



$\int_{٠}^{٢} [د (س)]^{٢} د'(س) د س$ = ...

(أ) $-\frac{٦٤}{٣}$

(ب) $\frac{٦٤}{٣}$

(جـ) $\frac{٨}{٣}$

(د) -٦٤

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الدرس 4

المساحات فى المستوى

أولاً مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات فى الفترة [أ ، ب]

* إذا كانت : د دالة متصلة على الفترة [أ ، ب] وكانت م مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب وكان

① د (س) ≤ ٠

أى : «المنطقة فوق محور السينات»

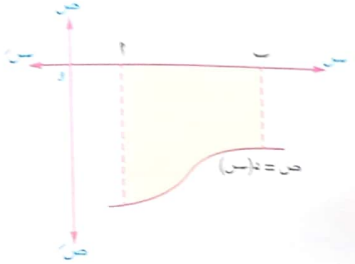


فإن :

$$م = \int_{أ}^{ب} د(س)\,ﻫ س$$

② د (س) ≥ ٠

أى : «المنطقة تحت محور السينات»

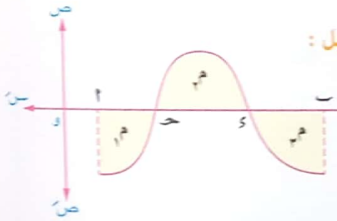


فإن :

$$م = -\int_{أ}^{ب} د(س)\,ﻫ س = \left|\int_{أ}^{ب} د(س)\,ﻫ س\right|$$

* إذا قطع منحنى الدالة د محور السينات عند س = حـ ، س = ء

حيث حـ ، ء ينتميان للفترة [أ ، ب] كما بالشكل المقابل :



نجد أن : د (س) ≤ ٠ لكل س ∈ [حـ ، ء]

، د (س) ≥ ٠ لكل س ∈ [أ ، حـ] ، س ∈ [ء ، ب]

∴ المساحة المظللة (م) = م١ + م٢ + م٣

أى أن :

$$م = \left|\int_{أ}^{حـ} د(س)\,ﻫ س\right| + \left|\int_{حـ}^{ء} د(س)\,ﻫ س\right| + \left|\int_{ء}^{ب} د(س)\,ﻫ س\right|$$

* لاحظ أن : تم وضع علامة القيمة المطلقة للمنطقتين م١ ، م٣ لأنها تقع أسفل محور السينات

ملاحظات

① يفضل الإستعانة برسم منحنى الدالة المعطاة لتحديد المناطق التى تقع فوق أو تحت محور السينات.

② نظرًا لصعوبة رسم كثير من المسائل بيانيًا فيفضل إيجاد أصفار الدالة (حتى إذا علم حدود التكامل) والتى تجزئ مجال الدالة [أ ، ب] إن وجدت إلى فترات جزئية ثم نحدد إشارة الدالة فى كل فترة جزئية ومنها يتم تحديد المناطق التى تقع فوق أو تحت محور السينات.

③ قيمة التكامل المحدد قد تكون موجبة أو سالبة أما المساحة تكون دائمًا موجبة.

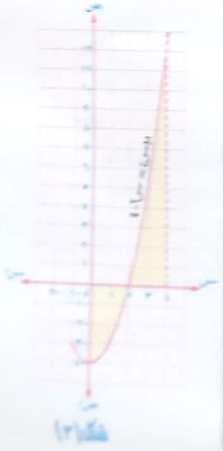
④ بصفة عامة مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى أى دالة متصلة :

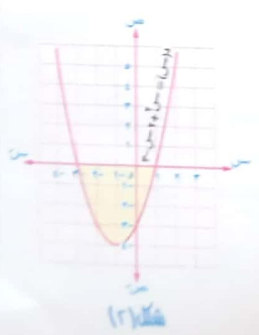
ص = د (س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب

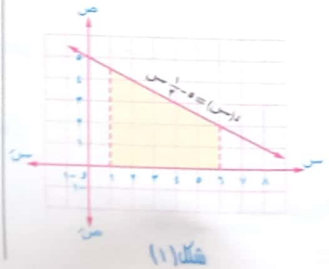
هى : $م = \int_{أ}^{ب} |د(س)|\,ﻫ س$

مثال ١

أوجد مساحة المنطقة المظللة فى كل الأشكال الآتية :







الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحـــل

شكل(١) : ∵ المنطقة المظللة تقع أعلى محور السينات.

∴ مساحة المنطقة المظللة = $\int_{-١}^{٠}$ د (س) ء س = $\int_{-١}^{٠}$ $\left(\frac{١}{٤}\ س - ٥\right)$ ء س

= $\left[\frac{١}{٨}\ س^{٢} - ٥ س\right]_{-١}^{٠}$ = $\left(٠ - ٠\right) - \left(\frac{١}{٨} - ٥\right)$

= $\frac{١}{٨}$ ١٦ وحدة مربعة.

شكل(٢) : ∵ المنطقة المظللة تقع أسفل محور السينات.

∴ مساحة المنطقة المظللة = $\left|\int_{-٣}^{١}\right.$ د (س) ء س $\left.\right|$

= $\left|\int_{-٣}^{١}\right.$ $(س^{٢} + ٢ س - ٣)$ ء س $\left.\right|$

= $\left|\left[\frac{١}{٣}\ س^{٣} + س^{٢} - ٣ س\right]_{-٣}^{١}\right|$

= $\left|\left(\frac{١}{٣} + ١ - ٣\right) - (-٩ + ٩ + ٩)\right|$ = $\left|\frac{-٣٢}{٣}\right|$

= $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة.

شكل(٣) : ∵ المنطقة المظللة تقع أسفل محور السينات لكل س ∈ [٠ ، ٢] وتقع أعلى محور السينات لكل س ∈ [٢ ، ٤]

∴ مساحة المنطقة المظللة = $\left|\int_{٠}^{٢}\right.$ د (س) ء س $\left.\right|$ + $\int_{٢}^{٤}$ د (س) ء س

= $\left|\int_{٠}^{٢}\right.$ $(س^{٢} - ٤)$ ء س $\left.\right|$ + $\int_{٢}^{٤}$ $(س^{٢} - ٤)$ ء س

= $\left|\left[\frac{١}{٣}\ س^{٣} - ٤ س\right]_{٠}^{٢}\right|$ + $\left[\frac{١}{٣}\ س^{٣} - ٤ س\right]_{٢}^{٤}$

= $\left|\frac{٨}{٣} - ٨\right|$ + $\left(\left(١٦ - \frac{٦٤}{٣}\right) - \left(٨ - \frac{٨}{٣}\right)\right)$ = ١٦ وحدة مربعة.

مثال ٢

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى : الدالة د : د (س) = $س^{٢}$ + ٤ ومحور السينات والمستقيمين : س = − ١ ، س = ٢

الحـــل

∵ الدالة متصلة على الفترة [− ١ ، ٢]

، ∵ د (س) = $س^{٢}$ + ٤ > ٠ لكل س ∈ [− ١ ، ٢]

∴ م (مساحة المنطقة المظللة) = $\int_{-١}^{٢}$ د (س) ء س

= $\int_{-١}^{٢}$ $(س^{٢} + ٤)$ ء س

= $\left[\frac{١}{٣}\ س^{٣} + ٤ س\right]_{-١}^{٢}$

= $\left(\frac{٨}{٣} + ٨\right) - \left(-\frac{١}{٣} - ٤\right)$ = ١٥ وحدة مربعة.

مثال ٣

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى : الدالة د : د (س) = $هـ^{س}$

والمستقيمين س = ٠ ، س = لو$_{هـ}$ ٣

الحـــل

∵ الدالة متصلة على الفترة [٠ ، لو$_{هـ}$ ٣]

، ∵ د (س) = $هـ^{س}$ > ٠

لكل س ∈ [٠ ، لو$_{هـ}$ ٣]

∴ م = $\int_{٠}^{\text{لو}_{هـ}٣}$ $هـ^{س}$ ء س

= $\left[هـ^{س}\right]_{٠}^{\text{لو}_{هـ}٣}$

= $هـ^{\text{لو}_{هـ}٣}$ − $هـ^{\text{صفر}}$ = ٣ − ١

= ٢ وحدة مربعة.

تذكر أن :

$هـ^{\text{لو}_{هـ}}$ = ؟

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٤

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين : منحنى الدالة ص = ١ − س^{٢} والمستقيمات ص = ٠ ، س = −١ ، س = ٢

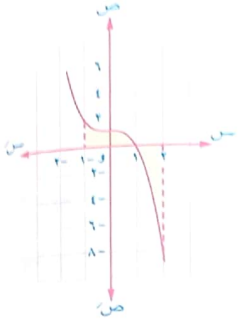
الحل

• نضع ص = ٠ ∴ ١ − س^{٢} = ٠ ∴ س^{٢} = ١ ∴ س = ١

• نبحث اشارة الدالة د : د (س) = ١ − س^{٢}



∴ د (س) ≤ ٠ لكل س ∈ [−١ ، ١] ، د (س) ≥ ٠ لكل س ∈ [١ ، ٢]



∴ م = $\int_{-١}^{١}$ |ص ء س| + $\int_{١}^{٢}$ |ص ء س|

= $\int_{-١}^{١}$ |(١ − س^{٣}) ء س| + $\int_{١}^{٢}$ |(١ − س^{٣}) ء س|

= $\left|\left[س - \frac{١}{٤}س^{٤}\right]_{-١}^{١}\right|$ + $\left|\left[س - \frac{١}{٤}س^{٤}\right]_{١}^{٢}\right|$

= $\left|\left(\frac{٣}{٤} + \frac{٥}{٤}\right)\right|$ + $\left|-٢ - \frac{٣}{٤}\right|$

= ٢ + $\frac{٣}{٤}$ ٢ = $\frac{٣}{٤}$ ٤ وحدة مربعة.

مثال ٥

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين : منحنى الدالة ص = س^{٣} − ٤ س ومحور السينات.

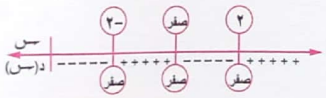
الحل

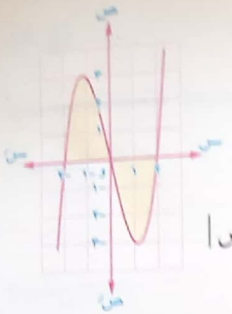
* نضع ص = ٠

∴ س^{٣} − ٤ س = ٠ ∴ س (س^{٢} − ٤) = ٠

∴ س (س − ٢) (س + ٢) = ٠ ∴ س = ٠ أ، س = ٢ أ، س = −٢

* نبحث اشارة الدالة د (س) = س^{٣} − ٤ س





∴ د (س) ≤ ٠ لكل س ∈ [−٢ ، ٠]

∴ د (س) ≥ ٠ لكل س ∈ [٠ ، ٢]

∴ م = $\int_{-٢}^{٠}$ |ص ء س| + $\int_{٠}^{٢}$ |ص ء س|

= $\int_{-٢}^{٠}$ |(س^{٢} − ٤ س) ء س| + $\int_{٠}^{٢}$ |(س^{٢} − ٤ س) ء س|

= $\left|\left[\frac{١}{٤}س^{٤} - ٢س^{٢}\right]_{-٢}^{٠}\right|$ + $\left|\left[\frac{١}{٤}س^{٤} - ٢س^{٢}\right]_{٠}^{٢}\right|$

= ٤ + ٤ = ٨ وحدات مربعة.

مثال ٦

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين : منحنى الدالة د : د (س) = $\sqrt[٣]{س + ٢}$ والمستقيم س = ٦ وفوق محور السينات.

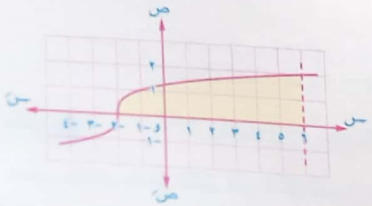
الحل

* بوضع د (س) = ٠

∴ $\sqrt[٣]{س + ٢}$ = ٠ ∴ س + ٢ = ٠ ∴ س = −٢

* نبحث إشارة الدالة د





∴ د (س) ≥ ٠ لكل س ∈ [−٢ ، ٦]

∴ المساحة = $\int_{-٢}^{٦}$ د (س) ء س

= $\int_{-٢}^{٦}$ (س + ٢)$^{\frac{١}{٣}}$ ء س

= $\left[\frac{٣}{٤}(س + ٢)^{\frac{٤}{٣}}\right]_{-٢}^{٦}$ = $\frac{٣}{٤}$ (٨)$^{\frac{٤}{٣}}$ − صفر = ١٢ وحدة مربعة.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٧

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين : منحنى الدالة ص = $\frac{1}{2}$ (٩ − س^{2})

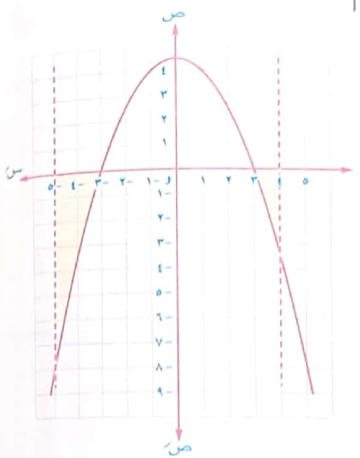
والمستقيمات ص = ٠ ، س = −٥ ، س = ٤ وتقع أسفل محور السينات.

الحل

• بوضع ص = ٠ ∴ ٩ − س^{2} = ٠ ∴ س = ± ٣

• نبحث إشارة الدالة





• المساحة = $\left|\int_{-5}^{-3} ص\,د س\right| + \left|\int_{3}^{4} ص\,د س\right|$

$= \left|\int_{-5}^{-3} \frac{1}{2}(٩ - س^{2})\,د س\right|$

$+ \left|\int_{3}^{4} \frac{1}{2}(٩ - س^{2})\,د س\right|$

$= \left|\left[\frac{9}{2}س - \frac{1}{6}س^{3}\right]_{-5}^{-3}\right|$

$+ \left|\left[\frac{9}{2}س - \frac{1}{6}س^{3}\right]_{3}^{4}\right|$

$= \left|\left(\frac{9}{2} \times -٣ - \frac{1}{6}(-٣)^{3}\right)\right.$

$\left. - \left(\frac{9}{2} \times -٥ - \frac{1}{6}(-٥)^{3}\right)\right|$

$+ \left|\left(\frac{9}{2} \times ٤ - \frac{1}{6} \times ٤^{3}\right)\right.$

$\left. - \left(\frac{9}{2} \times ٣ - \frac{1}{6}(٣)^{3}\right)\right|$ = ٩ وحدة مربعة.

مثال ٨

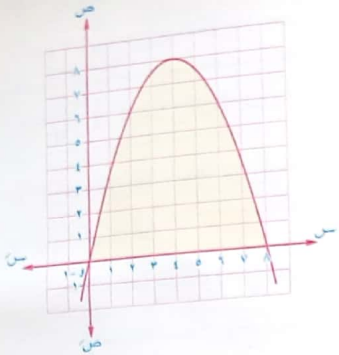
صمم مهندس مدخل فندق على شكل منحنى معادلته ص = ٤ س − $\frac{1}{2}$ س^{2} حيث س بالأمتار فإذا غطى هذا المدخل بزجاج تكلفة المتر المربع الواحد ١٢٠٠ جنيه.

كم تكون تكلفة الزجاج.

الحل

• بوضع ص = ٠ ∴ ٤ س − $\frac{1}{2}$ س^{2} = ٠

∴ $\frac{1}{2}$ س (٨ − س) = ٠ ∴ س = ٠ أ، س = ٨



∴ المساحة (م) = $\int_{0}^{8}$ (٤ س − $\frac{1}{2}$ س^{2}) د س

$= \left[٢س^{2} - \frac{1}{6}س^{3}\right]_{0}^{8}$

$= \left[٢ \times (٨)^{2} - \frac{1}{6} \times (٨)^{3}\right]$

− صفر = $\frac{١٢٨}{٣}$ متر مربع.

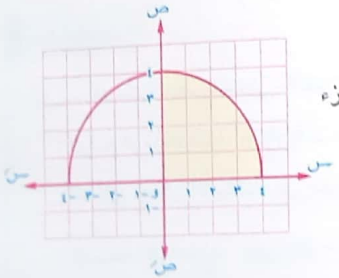
∴ التكلفة = المساحة × تكلفة المتر المربع الواحد.

= $\frac{١٢٨}{٣}$ × ١٢٠٠ = ٥١٢٠٠ جنيه.

مثال ٩

باستخدام المساحة تحت منحنى الدالة ص = $\sqrt{١٦ - س^{2}}$ أوجد : $\int_{0}^{4} \sqrt{١٦ - س^{2}}$ د س

الحل



∴ الدالة ص = $\sqrt{١٦ - س^{2}}$ متصلة وغير سالبة على [٠ ، ٤] ، ص = $\sqrt{١٦ - س^{2}}$ تمثل الجزء الواقع فوق محور السينات من الدائرة الناتجة من تربيع الطرفين أى ص^{2} = ١٦ − س^{2}

∴ س^{2} + ص^{2} = ١٦

وهى دائرة مركزها (٠ ، ٠) وطول نصف قطرها = ٤ وحدات كما بالشكل.

∴ $\int_{0}^{4} \sqrt{١٦ - س^{2}}$ = مساحة المنطقة المظللة المحصورة بين منحنى الدالة ومحور السينات والمستقيمان س = ٠ ، س = ٤

= $\frac{1}{4}$ × مساحة الدائرة = $\frac{1}{4}$ × π نق^{2}

= $\frac{1}{4}$ × π × (٤)^{2} = **π ٤**

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

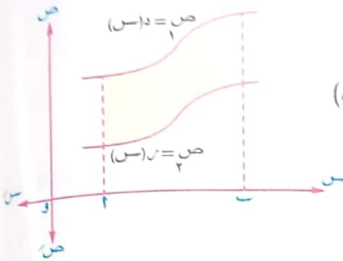
ثانيًا مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين منحنيين

إذا كانت د ، ر دالتين متصلتين على الفترة [أ ، ب] وكانت د (س) ≥ ر (س)

لكل س ∈ [أ ، ب] فإن مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين ص١ = د (س)

، ص٢ = ر (س) والمستقيمان س = أ ، س = ب تعطى بالعلاقة

$$م = \int_{أ}^{ب} [د(س) - ر(س)] \, ء س$$



وذلك لأن : مساحة المنطقة بين المنحنيين ص١ = د (س)

، ص٢ = ر (س)

= [المساحة تحت د (س) وفوق محور السينات]

- [المساحة تحت ر (س) وفوق محور السينات]

$$= \int_{أ}^{ب} ص_1 \, ء س - \int_{أ}^{ب} ص_2 \, ء س = \int_{أ}^{ب} د(س) \, ء س - \int_{أ}^{ب} ر(س) \, ء س$$

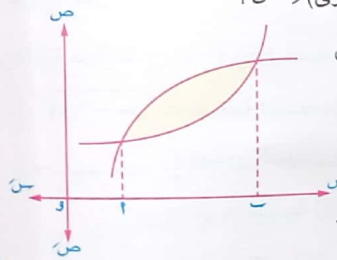
$$= \int_{أ}^{ب} [د(س) - ر(س)] \, ء س$$

ملاحظات

① سوف نتعرف على المنحنى الأعلى ص١ ≥ ص٢ لكل س ∈ [أ ، ب] باستخدام الرسم أو بأخذ قيمة اختيارية لـ س ∈ [أ ، ب] والتعويض بها فى معادلتين الدالتين ويمكن الاستغناء عن معرفة ذلك بوضع علامة القيمة المطلقة كما يلى :

المساحة (م) = $\left| \int_{أ}^{ب} \text{(أى دالة - الدالة الأخرى)} \, ء س \right|$

② عندما تنحصر منطقة بين منحنيين متقاطعين فإن حدود التكامل بالنسبة إلى س هى الإحداثيات السينية لنقط التقاطع والتى نوجدها بحل معادلتى المنحنيين جبريًا.

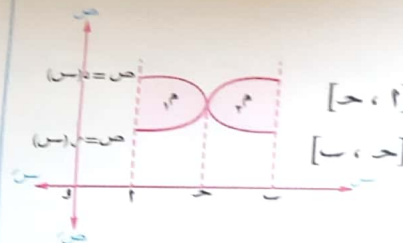


③ إذا كان المنحنيان يتقاطعان فى نقطة

وكانت : حـ ∈] أ ، ب [

وكانت : د (س) ≥ ر (س) لكل س ∈ [أ ، حـ]

وكانت : ر (س) ≥ د (س) لكل س ∈ [حـ ، ب]



فإن : م = م١ + م٢

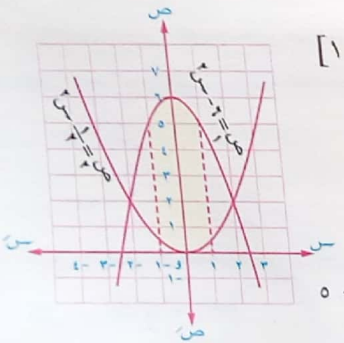
$$= \int_{أ}^{حـ} [د(س) - ر(س)] \, ء س + \int_{حـ}^{ب} [ر(س) - د(س)] \, ء س$$

مثال ١٠

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين : ص١ = ٦ - س٢ ، ص٢ = $\frac{1}{2}$ س٢

والمستقيمين س = -١ ، س = ١

الحل



من الرسم نلاحظ أن ص١ > ص٢ لكل س ∈ [-١ ، ١]

$$\therefore \text{المساحة (م)} = \int_{-1}^{1} [ص_1 - ص_2] \, ء س$$

$$= \int_{-1}^{1} (٦ - س^2 - \frac{1}{2} س^2) \, ء س$$

$$= \int_{-1}^{1} (٦ - \frac{3}{2} س^2) \, ء س$$

$$= [٦ س - \frac{1}{2} س^3]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} ٥ + ٥ \frac{1}{2}$$

= ١١ وحدة مربعة.

مثال ١١

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين : منحنى الدالة ص١ = ٤ - س٢ والمستقيم ص٢ = ٣ س

الحل

* نعين الإحداثيات السينية لنقط التقاطع بحل المعادلتين جبريًا :

نضع ص١ = ص٢

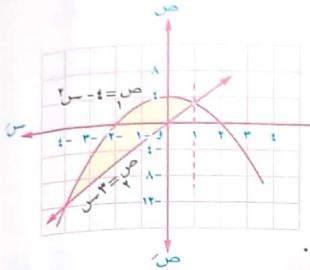
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$\therefore$ $٣ س = ٤ - س^{٢}$

$\therefore$ $(س + ٤)(س - ١) = ٠$ $\quad\therefore$ $س^{٢} + ٣ س - ٤ = ٠$

$\therefore$ $س = -٤$ أ، $س = ١$

ومن الرسم نلاحظ أن : $ص_{١} \geq ص_{٢}$ لكل $س \in [-٤ ، ١]$



$\therefore$ المساحة (م) $= \int_{-٤}^{١} [ص_{١} - ص_{٢}]$ د س

$= \int_{-٤}^{١} (٤ - س^{٢} - ٣ س)$ د س

$= [٤ س - \frac{١}{٣} س^{٣} - \frac{٣}{٢} س^{٢}]_{-٤}^{١}$

$= ٢\frac{١}{٦} + ١٨\frac{٢}{٣} = ٢٠\frac{٥}{٦}$ وحدة مربعة.

مثال ١٢

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين : $ص_{١} = ١٢ - س^{٢}$ ، $ص_{٢} = ٢ س^{٢}$

الحـل

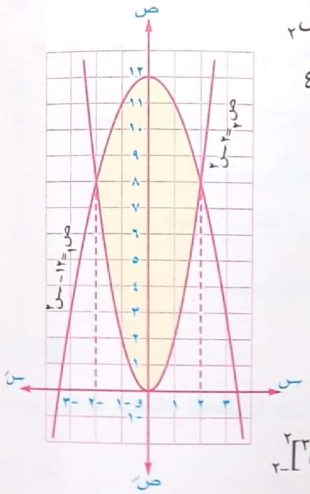
* نعين الإحداثيات السينية لنقط التقاطع بوضع $ص_{١} = ص_{٢}$

$\therefore$ $١٢ - س^{٢} = ٢ س^{٢}$ $\quad\therefore$ $س^{٢} = ٤$

$\therefore$ $س = ٢$ أ، $س = -٢$

، من الرسم نلاحظ أن $ص_{١} \geq ص_{٢}$

لكل $س \in [-٢ ، ٢]$



$\therefore$ م $= \int_{-٢}^{٢} (ص_{١} - ص_{٢})$ د س

$= \int_{-٢}^{٢} (١٢ - س^{٢} - ٢ س^{٢})$ د س

$= \int_{-٢}^{٢} (١٢ - ٣ س^{٢})$ د س $= [١٢ س - س^{٣}]_{-٢}^{٢}$

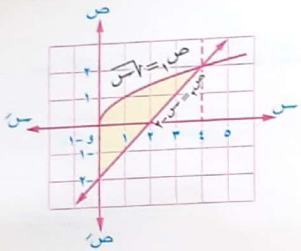
$= ١٦ + ١٦ = ٣٢$ وحدة مربعة.

مثال ١٢

أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى : $ص_{١} = \sqrt{س}$ والمستقيم $ص_{٢} = س - ٢$ ومحور الصادات.

الحـل

* نعين الإحداثيات السينية لنقط التقاطع بوضع $ص_{١} = ص_{٢}$



$\therefore$ $س - ٢ = \sqrt{س}$ $\quad$ (١)

بتربيع الطرفين : $\therefore$ $س^{٢} - ٤ س + ٤ = س$

$\therefore$ $س^{٢} - ٥ س + ٤ = ٠$

$\therefore$ $(س - ١)(س - ٤) = ٠$

$\therefore$ $س = ١$ (مرفوض) أ، $س = ٤$ (يحقق)

$\therefore$ توجد نقطة تقاطع عند $س = ٤$

$\therefore$ حدا التكامل هما $س = ٤$

، $س = ٠$ (محور الصادات)

* نأخذ قيمة اختيارية تنتمى إلى الفترة

$]٠ ، ٤[$ ولتكن $س = ١$

• عند $س = ١$

$\because$ $ص_{١} = ١$ ، $ص_{٢} = -١$

$\therefore$ $ص_{١} \geq ص_{٢}$ لكل $س \in [٠ ، ٤]$

$\therefore$ مساحة المنطقة المظللة $= \int_{٠}^{٤} (ص_{١} - ص_{٢})$ د س $= \int_{٠}^{٤} (\sqrt{س} - س + ٢)$ د س

$= [\frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} - \frac{١}{٢} س^{٢} + ٢ س]_{٠}^{٤}$

$= \frac{٢}{٣}(٤)^{\frac{٣}{٢}} - \frac{١}{٢}(٤)^{٢} + ٢(٤) = \frac{١٦}{٣}$ وحدة مربعة.

لاحظ أن

* عند الحل تم تربيع المعادلة (١) ولذلك لابد من التعويض بقيم $س = ١$ ، $س = ٤$ فى المعادلة الأصلية (١) فنجد أن الحل $س = ١$ (مرفوض) لأنه لا يحقق المعادلة الأصلية.
* يمكن حل المعادلة (١) بالتحليل كما يلى :

$س - \sqrt{س} - ٢ = ٠$

$(\sqrt{س} - ٢)(\sqrt{س} + ١) = ٠$

$\therefore$ $\sqrt{س} = ٢$ ومنها $س = ٤$

أ، $\sqrt{س} = -١$ (مرفوض)

مثال ١٥

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى: $ص = س^٣ - ٣س^٢ + ٥$ ، $ع(س) = س + ٢$ والمستقيم الذي معادلته $س = ٠$

الحل

* نجد إحداثيات النقطة المشتركة بين المنحنى والمستقيم:

$$س^٣ - ٣س^٢ + ٥ = س + ٢$$

$$س^٣ - ٣س^٢ - س + ٣ = ٠$$

$$(س - ١)(س^٢ - ٢س - ٣) = ٠$$

$$(س - ١)(س - ٣)(س + ١) = ٠$$

$$س = ١ ، ٣ ، -١$$

* نجد مساحة المنطقة المشتركة:

$$م = \int_{-١}^{١} |ع(س) - ص| \, د س + \int_{١}^{٣} |ع(س) - ص| \, د س$$

$$= \int_{-١}^{١} |(س + ٢) - (س^٣ - ٣س^٢ + ٥)| \, د س + \int_{١}^{٣} |(س + ٢) - (س^٣ - ٣س^٢ + ٥)| \, د س$$

$$= \int_{-١}^{١} |-س^٣ + ٣س^٢ + س - ٣| \, د س + \int_{١}^{٣} |-س^٣ + ٣س^٢ + س - ٣| \, د س$$

$$= \int_{-١}^{١} (-س^٣ + ٣س^٢ + س - ٣) \, د س + \int_{١}^{٣} -(-س^٣ + ٣س^٢ + س - ٣) \, د س$$

$$= \left[-\frac{١}{٤}س^٤ + س^٣ + \frac{١}{٢}س^٢ - ٣س\right]_{-١}^{١} + \left[\frac{١}{٤}س^٤ - س^٣ - \frac{١}{٢}س^٢ + ٣س\right]_{١}^{٣}$$

$$= \left|-\frac{٧}{٤} - \frac{٩}{٤}\right| + \left|\frac{٩}{٤} + \frac{٧}{٤}\right| = ٤ + ٤ = ٨ \text{ وحدة مربعة}$$

تذكر أن

نجد فترات تعريف المنطقة عند إيجاد المساحة لكل جزء وذلك لتحديد حدود التكامل.

مثال ١٤

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين: $ص_١ = ٤س$ ، $ص_٢ = س^٢$

الحل

$$س^٢ = ٤س \quad ، \quad ص_١ = ص_٢$$

$$س^٢ - ٤س = ٠$$

$$س(س - ٤) = ٠$$

$$س = ٠ \quad ، \quad س = ٤$$

* نجد إحداثيات نقطتي التقاطع بتعويض $س_١ = ٠$ ، $س_٢ = ٤$

$$ص_١ = ٤س \quad ، \quad ص_٢ = \sqrt{٤س}$$

$$ص_١ = ٠ \quad ، \quad ص_٢ = ٤$$

* نجد إحداثيات النقطة المشتركة بين المنحنيين:

$$\frac{١}{٢}س^٢ = ٢\sqrt{س} \quad (١)$$

بتربيع الطرفين

$$\frac{١}{٤}س^٤ = ٤س \quad \therefore$$

$$س^٤ - ٨س = ٠ \quad \therefore$$

$$س(س^٣ - ٨) = ٠ \quad \therefore$$

$$س = ٠ \quad ، \quad س = ٢$$

* نجد مساحة المنطقة المشتركة:

$$م = \int_{٠}^{٢} [ص_٢ - ص_١] \, د س$$

$$= \int_{٠}^{٢} [\sqrt{٤س} - \frac{١}{٢}س^٢] \, د س = \left[\frac{٢\sqrt{٤}}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} - \frac{١}{٦}س^٣\right]_{٠}^{٢}$$

$$= \frac{٤}{٣}(٢)^٣ - \frac{١}{٦}(٢)^٣ = \frac{٣٢}{٦} - \frac{٨}{٦} = \frac{٢٤}{٦} = ٤ \text{ وحدات مربعة}$$

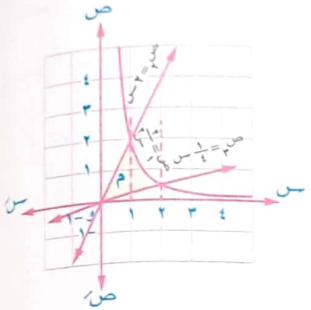
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال (١٦)

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيات :

ص = $\frac{٢}{س^{٢}}$ ، س > ٠ ، ص = ٢ س ، ص = $\frac{١}{٤}$ س

الحل



ص$_{١}$ = $\frac{٢}{س^{٢}}$ (١)

، ص$_{٢}$ = ٢ س (٢)

، ص$_{٣}$ = $\frac{١}{٤}$ س (٣)

، بوضع ص$_{١}$ = ص$_{٢}$

∴ $\frac{٢}{س^{٢}}$ = ٢ س ∴ س^{٣} = ١ ∴ س = ١

∴ ص$_{١}$ ، ص$_{٢}$ يتقاطعان فى نقطة إحداثيها السينى س = ١

، بوضع ص$_{١}$ = ص$_{٣}$ ∴ $\frac{٢}{س^{٢}}$ = $\frac{١}{٤}$ س

∴ س^{٣} = ٨ ∴ س = ٢

∴ ص$_{١}$ ، ص$_{٣}$ يتقاطعان فى نقطة إحداثيها السينى س = ٢

∴ م = $\int_{٠}^{١}$ (ص$_{٢}$ − ص$_{٣}$) ﻫ س + $\int_{١}^{٢}$ (ص$_{١}$ − ص$_{٣}$) ﻫ س

= $\int_{٠}^{١}$ (٢ س − $\frac{١}{٤}$ س) ﻫ س + $\int_{١}^{٢}$ ($\frac{٢}{س^{٢}}$ − $\frac{١}{٤}$ س) ﻫ س

= $\int_{٠}^{١}$ $\frac{٧}{٤}$ س ﻫ س + $\int_{١}^{٢}$ (٢ س$^{-٢}$ − $\frac{١}{٤}$ س) ﻫ س

= [$\frac{٧}{٨}$ س^{٢}]$_{٠}^{١}$ + [−٢ س$^{-١}$ − $\frac{١}{٨}$ س^{٢}]$_{١}^{٢}$

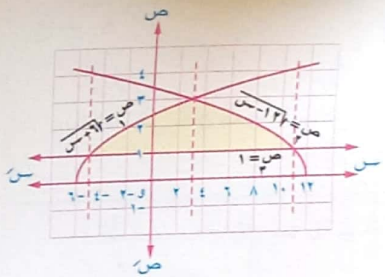
= [$\frac{٧}{٨}$ − صفر] + [−١ − $\frac{١}{٨}$ × ٤] − [−٢ − $\frac{١}{٨}$] = $\frac{١}{٢}$ ١ وحدة مربعة.

مثال (١٧)

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الدوال :

ص = $\sqrt{٦ + س}$ ، ص = $\sqrt{١٢ - س}$ ، ص = ١

الحل



ص$_{١}$ = $\sqrt{٦ + س}$ (١)

، ص$_{٢}$ = $\sqrt{١٢ - س}$ (٢)

، ص$_{٣}$ = ١

، بوضع ص$_{١}$ = ص$_{٣}$

∴ $\sqrt{٦ + س}$ = $\sqrt{١٢ - س}$

∴ س = ٣

∴ ص$_{١}$ ، ص$_{٢}$ يتقاطعان فى نقطة إحداثيها السينى س = ٣

، بوضع ص$_{١}$ = ص$_{٣}$ ∴ $\sqrt{٦ + س}$ = ١ ∴ س = −٥

∴ ص$_{١}$ ، ص$_{٣}$ يتقاطعان فى نقطة إحداثيها السينى س = −٥

، بوضع ص$_{٢}$ = ص$_{٣}$ ∴ $\sqrt{١٢ - س}$ = ١ ∴ س = ١١

∴ ص$_{٢}$ ، ص$_{٣}$ يتقاطعان فى نقطة إحداثيها السينى س = ١١

∴ م = $\int_{-٥}^{٣}$ (ص$_{١}$ − ص$_{٣}$) ﻫ س + $\int_{٣}^{١١}$ (ص$_{٢}$ − ص$_{٣}$) ﻫ س

= $\int_{-٥}^{٣}$ ($\sqrt{٦ + س}$ − ١) ﻫ س + $\int_{٣}^{١١}$ ($\sqrt{١٢ - س}$ − ١) ﻫ س

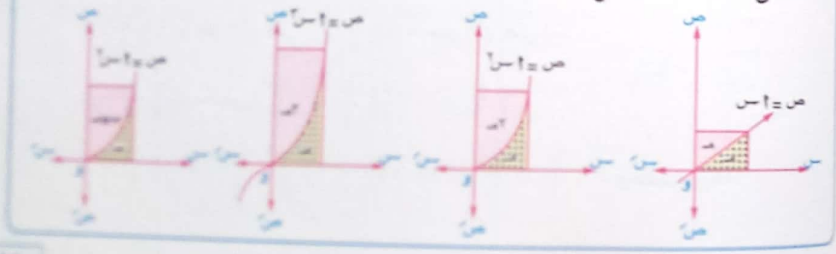
= [$\frac{٢}{٣}$ (٦ + س)$^{\frac{٣}{٢}}$ − س]$_{-٥}^{٣}$ + [− $\frac{٢}{٣}$ (١٢ − س)$^{\frac{٣}{٢}}$ − س]$_{٣}^{١١}$

= ($\frac{٢}{٣}$ × ٢٧ − ٣) − (٥ + $\frac{٢}{٣}$) + (− $\frac{٢}{٣}$ − ١١) − (− $\frac{٢}{٣}$ × ٢٧ − ٣)

= ١٥ − $\frac{٢}{٣}$ ٥ − $\frac{٢}{٣}$ ١١ + ٢١ = ١٨ $\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة.

ملاحظة

في كل من الأشكال الآتية لاحظ النسبة بين المساحة المظللة والمساحة المنقطة والتي يحصرها المنحنى ص = أ س^{ن} مع محورى الإحداثيات الموجبة حيث أ > ٠ ، ن ∈ ص$^{+}$



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

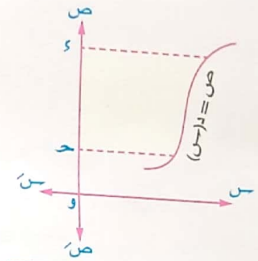
معلومة إثرائية

* إذا كانت د دالة متصلة لكل س ∈ [حـ ، ء] وكانت م مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومحور الصادات (بدلًا من محور السينات) والمستقيمين ص = حـ ، ص = ء وكان :

① س ≤ ٠

أى أن :

«المنطقة على يمين محور الصادات»

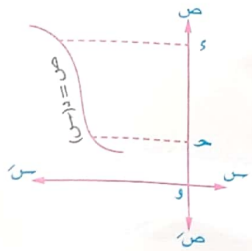


فإن : $م = -\int_{حـ}^{ء} س \, ء ص$

② س ≥ ٠

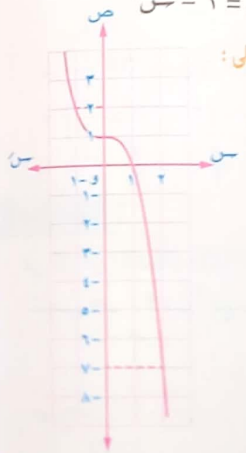
أى أن :

«المنطقة على يسار محور الصادات»



فإن : $م = \int_{حـ}^{ء} س \, ء ص = \left| \int_{حـ}^{ء} س \, ء ص \right|$

فمثلاً : لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة ص = ١ − س² والمستقيمات س = ٠ ، ص = −٧ ، ص = ٢ يكون الحل كما يلى :



* ص = ١ − س² ∴ س = $(١ - ص)^{\frac{١}{٢}}$

، س ≤ ٠ لكل ص ∈ [−٧ ، ١]

، س ≥ ٠ لكل ص = [١ ، ٢]

∴ م = $\int_{-٧}^{١} س \, ء ص + \left| \int_{١}^{٢} س \, ء ص \right|$

= $\int_{-٧}^{١} (١ - ص)^{\frac{١}{٢}} ء ص + \left| \int_{١}^{٢} (١ - ص)^{\frac{١}{٢}} ء ص \right|$

= $-\frac{٣}{٤} [(١ - ص)^{\frac{٤}{٣}}]_{-٧}^{١} + \frac{٣}{٤} [(١ - ص)^{\frac{٤}{٣}}]_{١}^{٢}$

= $-\frac{٣}{٤} (٠ - ١٦) + \frac{٣}{٤} (١ - ٠) = ١٢ + \frac{٣}{٤} = \frac{٣}{٤}$ ١٢ وحدة مربعة.

على المساحات فى المستوى

اختبار تفاعلى

فهم • تطبيق • مستويات عليا | من أسئلة الكتاب المدرسى

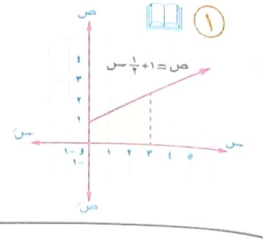
١ أوجد مساحة المنطقة الواقعة تحت منحنى الدالة ص وفوق محور السينات فى الفترة المعطاة فى كل مما يأتى :

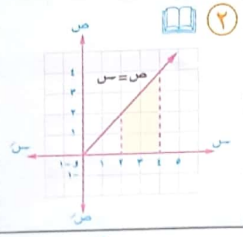
① ص = ٢ س + ٣ فوق الفترة [−١ ، ٤]

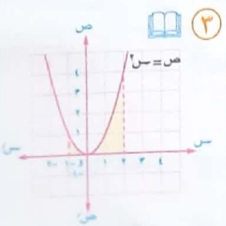
② ص = | س − ٣ | فوق الفترة [٢ ، ٥]

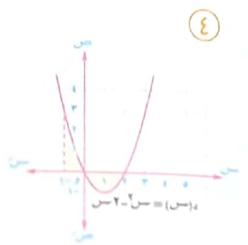
③ ص = ٣ − س² فوق الفترة [−٣ ، ١]

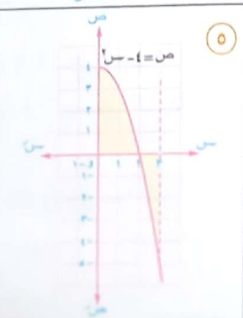
٢ اكتب التكامل المحدد الذى يعطى المساحة المظللة فى كل مما يأتى واحسب قيمته :

① 

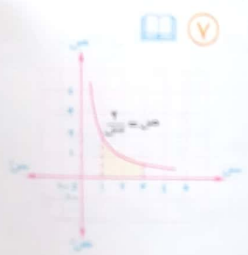
② 

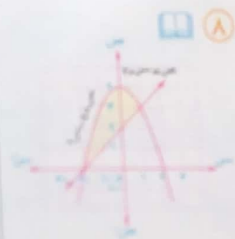
③ 

④ 

⑤ 

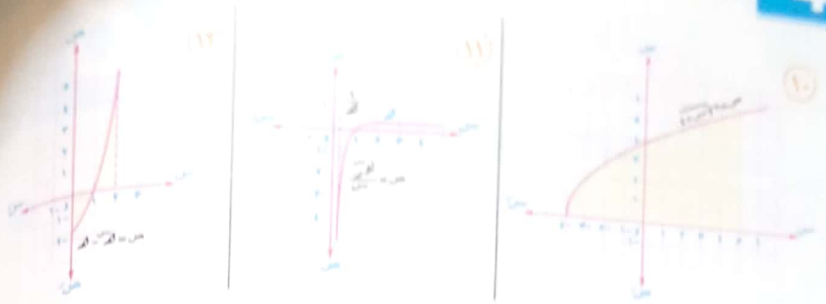
⑥ 

⑦ 

⑧ 

⑨ 

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



٣ أوجد فى كل مما يأتى مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين :

(١) المستقيمات : س + ٢ ص = ٩ ، س = ١ ، س = ٣ ، ص = ٠ ، ٧ وحدة مربعة

(٢) المنحنى : ص = س^{٢} − ٥ س ومحور السينات. ، $\frac{٥}{٦}$ ٢٠ وحدة مربعة

(٣) المنحنى : ص = ٥ − س^{٢} ومحور السينات والمستقيمين : س = −٢ ، س = ١ ، ١٢ وحدة مربعة

(٤) المنحنى : ص = ٣ − ٢ س − س^{٢} ومحور السينات. ، $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

(٥) المنحنى : ص = ٣ + ٢ س − س^{٢} والمستقيمات :

س = −١ ، س = ٤ ، ص = ٠ ، ١٣ وحدة مربعة

(٦) المنحنى : ص = س^{٢} + ٣ ومحور السينات ومحور الصادات والمستقيم س = ٣ ، ١٨ وحدة مربعة

(٧) منحنى الدالة د : د (س) = ٣ س^{٢} + ١ ومحور السينات والمستقيمين

س = −١ ، س = ٢ ، ١٢ وحدة مربعة

(٨) المنحنى : ص = $\sqrt{٤ س}$ والمستقيم : س = ٩ ومحور السينات. ، ٣٦ وحدة مربعة

(٩) المنحنى : ص = $\sqrt{س + ٤}$ والمستقيمات : س = ٠ ، س = ٥ ، ص = ٠ ، $\frac{٣٨}{٣}$ وحدة مربعة

(١٠) المنحنى : ص = $\sqrt{١ − س}$ والمستقيمين : س = −٣ ، ص = ٠ ، $\frac{١}{٣}$ ٥ وحدة مربعة

(١١) المنحنى د : د (س) = $\sqrt[٣]{٢ س + ٢}$ والمستقيم س = ٣ وفوق محور السينات. ، ٦ وحدة مربعة

(١٢) المنحنى : ص = $\frac{٤}{س^{٢}}$ والمستقيمات :

س = ١ ، س = ٤ ، ص = ٠ ، ٣ وحدة مربعة

(١٣) المنحنى : ص = هـ^{س} والمستقيمات :

س = ٠ ، س = لو$_{هـ}$ ٤ ، ص = ٠ ، ٣ وحدة مربعة

(١٤) المنحنى : ص = جا س والمستقيمات :

س = ٠ ، س = $\frac{\pi}{٢}$ ، ص = ٠ ، وحدة مربعة

(١٥) المنحنى : ص = جتا س والمستقيمات :

س = ٠ ، س = $\frac{\pi}{٢}$ ، ص = ٠ ، وحدة مربعة

٤ أوجد فى كل مما يأتى مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين :

(١) المنحنى : ص = ٢ − س^{٢} والمستقيم : س + ص = ٠ ، $\frac{٩}{٢}$ وحدة مربعة

(٢) المنحنيين : ص + س^{٢} = ٦ ، ص + ٢ س − ٣ = ٠ ، $\frac{٢٢}{٣}$ وحدة مربعة

(٣) منحنيى الدالتين : د (س) = ٢ س^{٢} ، ر (س) = ٢ س + ٤ ، ٩ وحدة مربعة

(٤) المنحنيين : ص = س^{٢} ، ص = ٢ − س ، $\frac{١}{٢}$ ٤ وحدة مربعة

(٥) المنحنى : ص = ٩ − س^{٢} ، المستقيم : ص = ٥ ، $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

(٦) المنحنى : ص = − س^{٢} + ١ ، المستقيم : ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٣

والمستقيمين : س = −٢ ، س = ١ ، $\frac{٢٣}{٤}$ وحدة مربعة

(٧) المنحنى : ص = س^{٢} − س ، المستقيم : ص = ٢ س

والمستقيمين : س = −٢ ، س = ٣ ، $\frac{١}{٢}$ ١٢ وحدة مربعة

(٨) المنحنى : ص = ٣ $\sqrt{س}$ ، المستقيم : ص = ٣ س ، $\frac{١}{٢}$ وحدة مربعة

(٩) المنحنى : ص$_{١}$ = $\sqrt{س}$ ، المستقيم : ص$_{٢}$ = س − ٢ ومحور الصادات ، $\frac{١}{٢}$ ٥ وحدة مربعة

(١٠) المنحنيين ص = $\frac{١}{٤}$ س^{٢} ، ص = ٢ $\sqrt{س}$ ، $\frac{١}{٢}$ ٥ وحدة مربعة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(١١) منحنيى الدالتين د (س) = س^{٢} − ٢ ، ن (س) = ٣ − (س + ١)^{٢} ٩ وحدة مربعة.

(١٢) المنحنيين : ص = ٧ + ٢ س − س^{٢} ، ص = (س − ١)^{٢} ٢١ $\frac{١}{٣}$ وحدة مربعة.

(١٣) المنحنيين : ص = ٩ − س^{٢} ، ص = س^{٢} + ١
والمستقيمين : س = ٠ ، س = ٣ ١٥ $\frac{١}{٣}$ وحدة مربعة.

(١٤) المنحنيين : ص = ٩ − س^{٢} ، ص = س^{٢} + ١ ومحور السينات
والمستقيمين : س = ٠ ، س = ٣ ٢٢ $\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة.

(١٥) المنحنيين : ص = $\sqrt{س}$ ، ص = س^{٣} ٥ $\frac{٥}{١٢}$ وحدة مربعة.

(١٦) المنحنيين : ص = س^{٣} − ٤ س ، ص = ٤ س − س^{٣} ١٦ وحدة مربعة.

(١٧) المنحنيين : ص = ما س ، ص = مـا س والمستقيمين :
س = ٠ ، س = $\frac{\pi}{٤}$ $\sqrt{٢}$ − ١ وحدة مربعة.

(١٨) المنحنيين : ص = س^{٤} + ١ ، ص = ٢ س^{٢} ١٦ $\frac{١٦}{١٥}$ وحدة مربعة.

(١٩) المنحنى : ص = س^{٣} والمستقيمين : ص = ٨ ، س = ٠ ١٢ وحدة مربعة.

(٢٠) المنحنى : ص = س^{٣} − س والمستقيم : ص = ٠ ١ $\frac{١}{٢}$ وحدة مربعة.

٥ باستخدام المساحة تحت المنحنى أوجد قيمة كل مما يأتى :

(١) $\int_{٠}^{٢} \sqrt{٤ - س^{٢}}$ د س ، π وحدة مربعة.

(٢) $\int_{-٣}^{٣} \sqrt{٩ - س^{٢}}$ د س ، $\frac{٩}{٢}$ π وحدة مربعة.

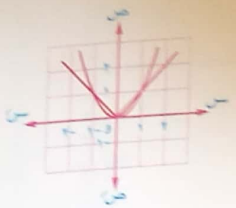
(٣) $\int_{-٧}^{٧} \sqrt{٤٩ - س^{٢}}$ د س ، $\frac{٤٩}{٤}$ π وحدة مربعة.

(٤) $\int_{-٥}^{٥} \sqrt{٢٥ - س^{٢}}$ د س ، $\frac{٢٥}{٢}$ π وحدة مربعة.

(٥) $\int_{٠}^{١} \sqrt{٤ - س^{٢}}$ د س ، $\frac{\pi}{٣} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ وحدة مربعة.

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :



مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين ص = س^{٢} ، ص = |س| تساوى

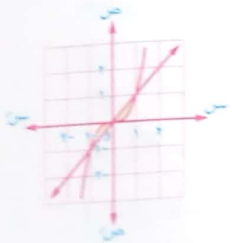
(أ) ٢ $\int_{-١}^{٠}$ (س^{٢} − س) د س

(ب) $\int_{٠}^{١}$ (س − س^{٢}) د س

(جـ) ٢ $\int_{٠}^{١}$ (س − س^{٢}) د س

(د) $\int_{-١}^{١}$ (س − س^{٢}) د س

(٢) فى الشكل المقابل :



مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى ص = س^{٣}
والمستقيم ص = س تساوى

(أ) $\int_{-١}^{١}$ (س^{٣} − س) د س

(ب) ٢ $\int_{٠}^{١}$ (س^{٣} − س) د س

(جـ) $\int_{٠}^{١}$ (س − س^{٣}) د س

(د) ٢ $\int_{٠}^{١}$ (س − س^{٣}) د س

(٣) (دور ثان ٢٠١٩) مساحة المنطقة المحددة بالمستقيمات
ص = س ، س = ٢ ، ص = ٠ تساوى وحدة مربعة.

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

(٤) (دور ثان ٢٠١٩) مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى ص = س^{٣} والمستقيمات
ص = ٠ ، س = ٢ تساوى وحدة مربعة.

(أ) ٨ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) ١

(٥) $\int_{-1}^{1} \sqrt{16 - 16س^2}$ ء س = ... وحدة مربعة.

(أ) ١٦ π (ب) π (جـ) ٢ π (د) ٤ π

(٦) مساحة المنطقة المحددة بالمستقيمات

ص = ٢ س − ٣ ، ص = س + ١ ، س = ٢ تساوى

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) $\frac{9}{2}$ (د) ٦

(٧) مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى ص = $\sqrt{4 - س^2}$ ومحور السينات مقدرة بالوحدات المربعة تساوى

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٢ π (د) ٤ π

(٨) إذا كانت د دالة متصلة على الفترة [أ ، ب] وكانت مـ مساحة المنطقة المحصورة بمنحنى الدالة ص = د (س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب فإن : مـ = ...

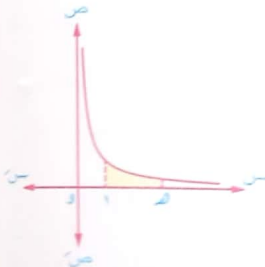
(أ) $\int_{أ}^{ب}$ | ص | ء س (ب) | $\int_{أ}^{ب}$ ص ء س |

(جـ) $\int_{أ}^{ب}$ ص ء س (د) $\int_{أ}^{ب}$ | س | ء س

(٩) في الشكل المقابل :

إذا كانت : د (س) = $\frac{1}{س}$

فإن مساحة المنطقة المظللة = ... وحدة مربعة.

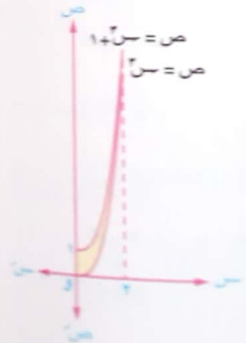


(أ) ١ (ب) هـ

(جـ) هـ^2 (د) ٢

(١٠) في الشكل المقابل :

مساحة الجزء المظلل = ... وحدة مربعة.



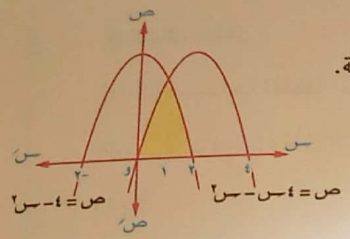
(أ) ١

(ب) $\frac{1}{2}$

(جـ) ٢

(د) $\frac{3}{2}$

(١١) في الشكل المقابل :

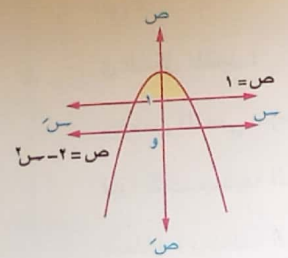


مساحة الجزء المظلل = ... وحدة مربعة.

(أ) ٢ (ب) $\frac{7}{3}$

(جـ) ٣ (د) $\frac{10}{3}$

(١٢) في الشكل المقابل :



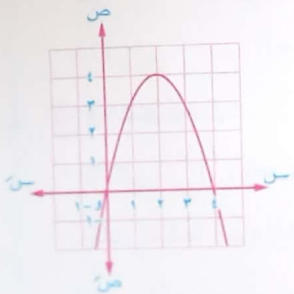
مساحة المنطقة المظللة

= وحدة مربعة.

(أ) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{4}{3}$

(جـ) $\frac{5}{3}$ (د) ٢

(١٣) الشكل المقابل يمثل منحنى



الدالة د : د (س) = − س (س − ٤)

فإن كل مما يأتى صحيح ما عدا

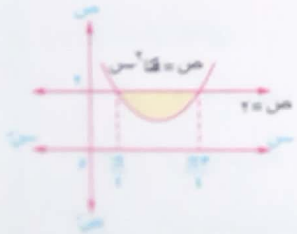
(أ) $\int_{0}^{1}$ د (س) ء س = $\int_{3}^{4}$ د (س) ء س

(ب) $\int_{0}^{4}$ د (س) ء س = ٢ $\int_{0}^{2}$ د (س) ء س

(جـ) $\int_{-1}^{0}$ | د (س) | ء س = $\int_{0}^{1}$ د (س) ء س

(د) $\int_{-1}^{0}$ د (س) ء س = $\int_{4}^{5}$ د (س) ء س

(١٤) المساحة المظللة في الشكل



المقابل تساوى

(أ) π + ٢

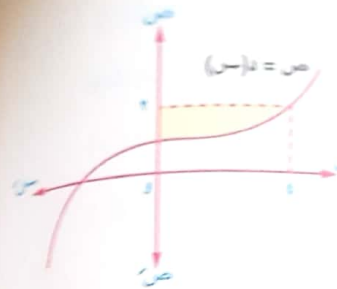
(ب) π − ٢

(جـ) ٢

(د) π

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(١٥) في الشكل المقابل :



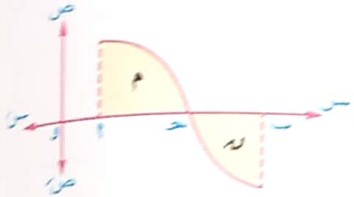
إذا كانت مساحة المنطقة المظللة = ٣ وحدة مربعة

فإن : $\int_{0}^{2}$ د (س) ء س = ...

(أ) ٣ (ب) ٤

(جـ) ٥ (د) ٦

(١٦) في الشكل المقابل :



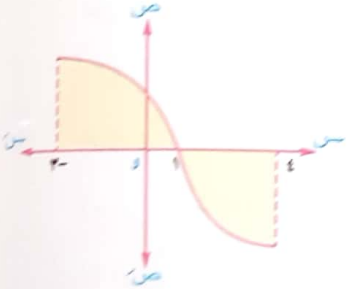
جزء من المنحنى د (س) في الفترة [أ ، ب]

فإذا كانت مساحة السطح م تساوى ٥ وحدة مساحة ، ومساحة السطح $ر_م$ تساوى ٣ وحدة مساحة

فإن : $م_1 \int_{ب}^{ج}$ د (س) ء س = ...

(أ) ٥- (ب) ٢- (جـ) ٢ (د) ٨

(١٧) في الشكل المقابل :



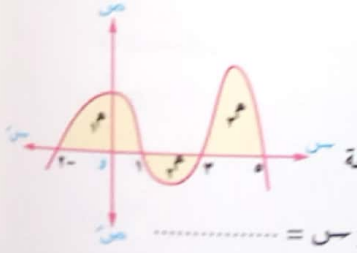
إذا كان : $\int_{-3}^{4}$ د (س) ء س = ١٢

وكانت مساحة الجزء المظلل = ٢٨ وحدة مربعة

فإن : $\int_{1}^{4}$ د (س) ء س = ...

(أ) ١٦ (ب) ٨- (جـ) ٨ (د) ٢٠

(١٨) في الشكل المقابل :



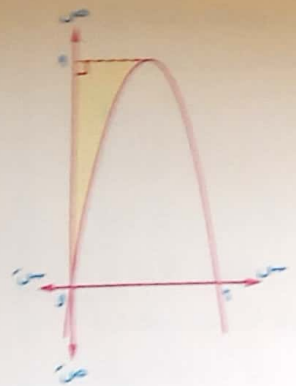
إذا كان : $م_1$ = ٥ وحدة مربعة

، $م_2$ = ٢ وحدة مربعة ، $م_3$ = ٨ وحدة مربعة

فإن : $\int_{-3}^{5}$ د (س) ء س + $\int_{-3}^{5}$ | د (س) | ء س = ...

(أ) ١٥ (ب) ٢٠ (جـ) ٢٢ (د) ٣٦

(١٩) الشكل المقابل يمثل منحنى دالة تربيعية نقطة الرأس (ك ، ٩)



فإن مساحة المنطقة المظللة = ... وحدة مربعة.

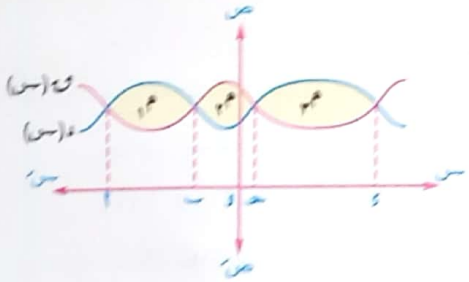
(أ) ٦

(ب) ٩

(جـ) ١٢

(د) ٨

(٢٠) في الشكل المقابل :



إذا كانت كل من د ، ق دوال متصلة

والشكل البياني يوضح منحنى

كل من د (س) ، ق (س)

وكانت $م_1$ = ٣ وحدات مربعة

، $م_2$ = وحدتان مربعتان ، $م_3$ = ٤ وحدات مربعة

أى من العبارات الآتية غير صحيح ؟

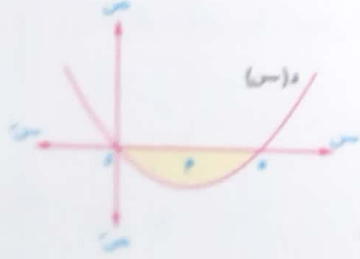
(أ) $\int_{1}^{2}$ [د (س) - ق (س)] ء س = ١

(ب) $\int_{-2}^{1}$ [ق (س) - د (س)] ء س = ٢-

(جـ) $\int_{1}^{3}$ [د (س) - ق (س)] ء س = ٥

(د) $\int_{3}^{4}$ [د (س) - ق (س)] ء س = ٤

(٢١) في الشكل المقابل :



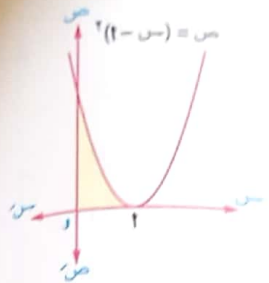
إذا كانت المساحة م المحصورة بين منحنى الدالة د (س) ومحور السينات تساوى ٨ وحدات مربعة

فإن : $\int_{0}^{2}$ (١ - د (س)) ء س = ...

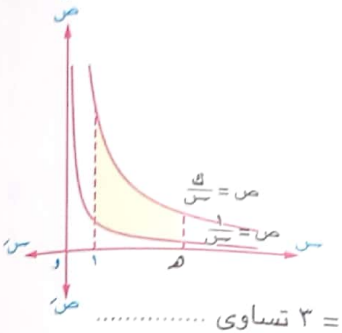
(أ) ١٢ (ب) ١٣ (جـ) ١٤ (د) ١٥

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٢٢) في الشكل المقابل :
إذا كانت مساحة المنطقة المظللة = $\frac{٨}{٣}$ وحدة مربعة
فإن : أ = ...
(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١
(ج) $\frac{٣}{٢}$ (د) ٢

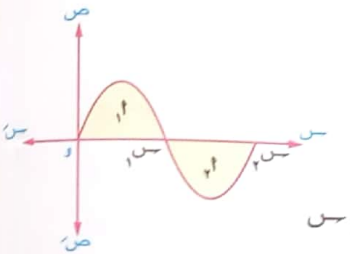


(٢٣) في الشكل المقابل :
إذا كانت مساحة المنطقة المظللة = ٢ وحدة مربعة
فإن : ك = ...
(أ) ٢ (ب) ٣
(ج) ٤ (د) ٥

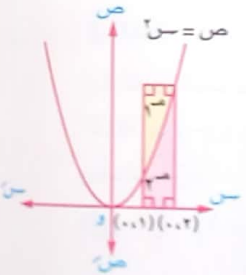


(٢٤) مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى س ص = ٤
ومحور السينات والمستقيمان س = ١ ، س = ٣ تساوى
(أ) ٢ لو$_{هـ}$ ٣ (ب) ٤ لو$_{هـ}$ ٣ (ج) ٣ لو$_{هـ}$ ٣ (د) ٣ لو$_{هـ}$ ٤

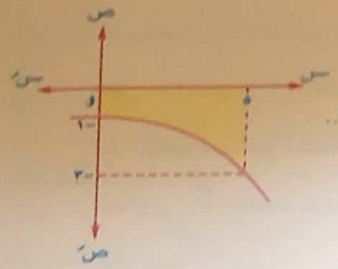
(٢٥) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د
فإن المساحة المحصورة بين منحنى الدالة د
وبين محور س تساوى
(أ) $\int_{س_١}^{س_٣}$ د (س) ء س
(ب) $\int_{س_١}^{س_٢}$ د (س) ء س + $\int_{س_٢}^{س_٣}$ د (س) ء س
(ج) $\int_{س_١}^{س_٢}$ د (س) ء س − $\int_{س_٢}^{س_٣}$ د (س) ء س
(د) $\left|\int_{س_١}^{س_٣} د (س) ء س\right|$



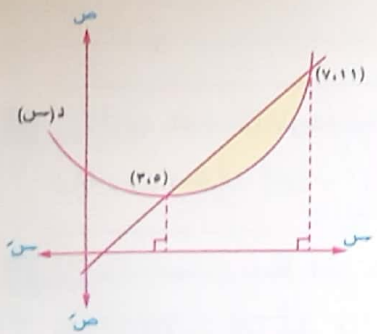
(٢٦) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د : د (س) = س^{٢}
فإن $\frac{م_١}{م_٢}$ = ...
(أ) $\frac{٢}{٧}$ (ب) $\frac{٣}{٧}$
(ج) $\frac{٤}{٧}$ (د) $\frac{٥}{٧}$



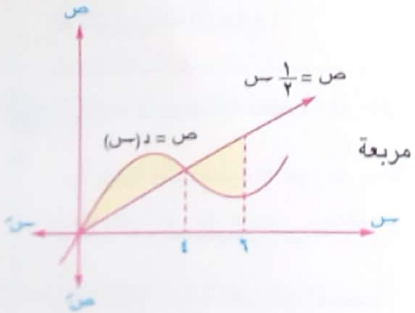
(٢٧) في الشكل المقابل :
إذا كانت مساحة الجزء المظلل = ١٠ وحدة مربعة
فإن : $\int_{٠}^{٥}$ [د (س) + د (س)] ء س = ...
(أ) −٤ (ب) −١٨
(ج) −١٢ (د) −٨



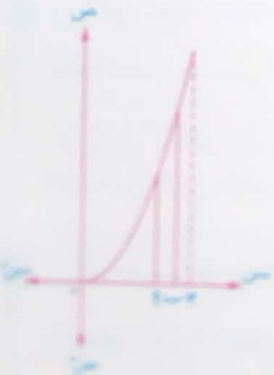
(٢٨) الشكل المقابل يمثل منحنى ص = د (س)
فإذا كانت المساحة المظللة = ٧ وحدة مربعة
فإن : $\int_{٥}^{١١}$ د (س) ء س = ...
وحدة مربعة.
(أ) ٢٥ (ب) ٢٣
(ج) ٢١ (د) ١٩



(٢٩) في الشكل المقابل :
إذا كان : $\int_{٠}^{٤}$ د (س) ء س = ٨
، $\int_{٤}^{٦}$ د (س) ء س = ٣
فإن مساحة المنطقة المظللة = ... وحدة مربعة
(أ) ٤ (ب) ٥
(ج) ٦ (د) ٨



(٣٠) في الشكل المقابل :
إذا كانت المساحة تحت المنحنى ص = س^{٢}
والمحصورة بين المستقيمين س = ٠ ، س = ٣
تنقسم إلى ثلاثة أجزاء متساوية بالمستقيمين
س = أ ، س = ب فإن أ × ب = ...
(أ) ٥ $\sqrt[٣]{٢}$ (ب) ٦ $\sqrt[٣]{٣}$
(ج) ٣ $\sqrt[٣]{٦}$ (د) ٢ $\sqrt[٣]{٩}$



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٦ إجابة أولى: الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة ق
ص = أ س − ٢ ، ص = ٢ √س
إذا كانت مساحة المنطقة المظللة
تساوى $\frac{١٣}{٦}$ وحدة مربعة
فإن قيمة الثابت أ =



(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) ٢

٧ أوجد بالوحدات المربعة مساحة المنطقة المحددة بمنحنى :
الدالة د : د (س) = (س − ٢)^{٣} ومحور السينات فى الفترة [٢ ، ٤] ٤ وحدة مربعة

٨ صمم مهندس مدخل فندق على شكل قوس معادلته ص = − $\frac{١}{٢}$ (س − ١) (س − ٧)
حيث س بالأمتار فإذا غُطى هذا المدخل بزجاج تكلفة المتر المربع الواحد منه ١٥٠٠ جنيه
كم تكون تكلفة الزجاج ؟ ٢٧٠٠٠ جنيهًا

٩ إذا كانت تكلفة تغطية المتر المربع الواحد من أرضية ممرات الفندق بالجرانيت
٤٠٠ جنيه وتم تغطية ٥ ممرات متطابقة بالجرانيت مساحة كل منها محدودة بمنحنى
الدالة د ، والمستقيمين س = ٠ ، ص = ٠ حيث د (س) = ١٢ − $\frac{١}{٣}$ س^{٢}
أوجد تكلفة تغطية الممرات الخمسة. ٩٦٠٠٠ جنيهًا

١٠ تقوم شركة إعلانات بإنتاج ملصق لتسويق سلعة ما فإذا كان الملصق على شكل
منطقة محددة بمنحنى الدالتين د ، ق حيث د (س) = ٢ س^{٢} ،
ق (س) = س^{٤} − ٢ س^{٢} ، س مقدرة بالديسيمتر احسب المساحة
اللازمة من الورق اللاصق لإنتاج ١٠٠٠ ملصق لهذه السلعة. $\frac{٢٥٦٠٠}{٣}$ ديسم^{٢}

١١ أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى : الدالة د : د (س) = $\frac{٤ س}{س^{٢} + ١}$
والمستقيم س = ٤ وتقع فوق محور السينات. ٢ لو$_{هـ}$ ١٧ وحدة مربعة

١٢ أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى : ص = س^{٣} − ٦ س^{٢} + ٨ س ومحور السينات.
٨ وحدة مربعة

١٣ إذا كانت د :]− ∞ ، ٣] ← ح حيث د (س) = س^{٣} − ٤ س أوجد مساحة
المنطقة المحددة بمنحنى الدالة ومحور السينات وتقع أعلى محور السينات.
١٠ $\frac{١}{٤}$ وحدة مربعة

١٤ إذا كانت د (س) = س^{٣} − ٣ س + ٢ أوجد :
(١) القيم القصوى المطلقة للدالة د فى الفترة [٠ ، ٢] ١ ، ٤
(٢) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د والمستقيمات
س = ٠ ، س = ٢ ، ص = ٠ . ٤ وحدة مربعة

١٥ أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين : منحنى الدالة د : د (س) = (٣ − س) (س − ١)^{٢}
ومحورى الإحداثيات حيث د (س) ≥ ٠ . $\frac{٩}{٤}$ وحدة مربعة

١٦ أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين : منحنى الدالة د :
د (س) = (س − ١) (س − ٢) (س − ٣) والمستقيمين س = ٤ ، ص = ٠ .
حيث د (س) ≥ ٠ . ٢ $\frac{١}{٢}$ وحدة مربعة

١٧ أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى :
√س + √ص = ١ والمستقيمين س = ٠ ، ص = ٠ . $\frac{١}{٦}$ وحدة مربعة

١٨ باستخدام التكامل المحدد أثبت أن مساحة المثلث الذى طول قاعدته يساوى أ
وارتفاعه يساوى ب هى $\frac{١}{٢}$ أ ب

١٩ أوجد مساحة المنطقة المحددة : بمنحنى الدالتين د ، ق حيث
د (س) = س^{٣} − ٣ س^{٢} + ٥ ، ق (س) = س + ٢ ٨ وحدة مربعة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى ص = س^{٢} والمستقيمين :

ص = ٢ س ، ص = س

أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنى : ص = − س^{٢} − ٤ س − ٣ والمماسين المرسومين

له عند النقطتين (١ ، −) ، (٣ ، −) الواقعتين عليه.

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين : ص = س^{٢} ، ص = $\frac{١}{٢}$ س^{٢}

أوجد المساحة المحدودة بالمنحنى : ص = س (س − ١)^{٢} ومحور السينات.

أوجد مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين المنحنيين :

ص = $\sqrt{\text{س}}$ ، ص = $\sqrt{٤ - ٣ \text{س}}$ والمستقيم ص = ٠

مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة

د ، ر في الفترة [٠ ، ٩] فإذا كان :

$\int_{٠}^{٩}$ د (س) ء س = $\int_{٠}^{٩}$ ر (س) ء س

فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤

(جـ) ٥ (د) ٨

في الشكل المقابل :

د (س) = س^{٢} + ١

فإن : ك التي تجعل مس = صر

تساوي

(أ) ٣ (ب) ٤

(جـ) ٥ (د) ٨

في الشكل المقابل :

إذا كان : صر = ٧ صر

فإن : ك = ...

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٢}$

(جـ) ١ (د) $\frac{٣}{٢}$

في الشكل المقابل :

إذا كان منحنى الدالة د (س) متصل

ومحدب لأسفل في الفترة [٢ ، ٨]

فإن : $\int_{٢}^{٨}$ د (س) ء س

لا يمكن أن يساوي

(أ) ٢٨ (ب) ٣٠ (جـ) ٣٢ (د) ٣٤

مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى الذي معادلته البارامترية ص = ٣ ن^{٢}

، س = ٦ ن ومحور السينات والمستقيمين س = صفر ، س = ١٢

تساوي وحدة مربعة.

(أ) ٤٨ (ب) ٩٦ (جـ) ١٣٢ (د) ١٩٢

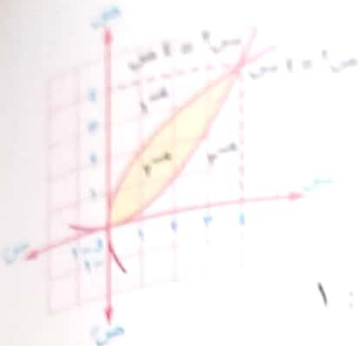
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑥ فى الشكل المقابل :

إذا كانت : م٣ هى مساحة المنطقة المحصورة

بين المنحنيين ص^{٢} = ٤ س ، س^{٢} = ٤ ص

فإن : م١ : م٢ : م٣ = ...

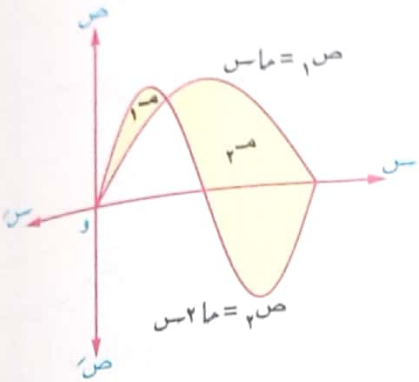


(أ) ٢ : ١ : ٢ (ب) ١ : ٢ : ١

(جـ) ١ : ١ : ١ (د) ٣ : ٢ : ٣

⑦ فى الشكل المقابل :

$\frac{م_{١}}{م_{٢}}$ = ...



(أ) ١ : ٩ (ب) ٦ : π

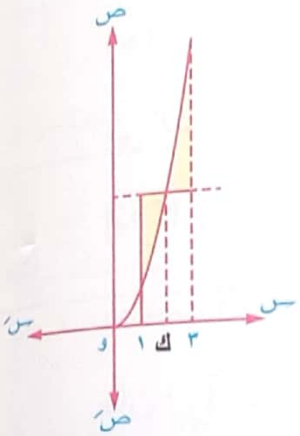
(جـ) ١ : ٤ (د) ٣ : ٢ : π

⑧ فى الشكل المقابل :

منحنى د (س) = ٦ س^{٢} فإن قيمة ك

التى تجعل المساحة المظللة أقل ما يمكن

تساوى



(أ) $\frac{١}{٤}$ ١ (ب) $\frac{٣}{٤}$ ١

(جـ) ٢ (د) $\frac{١}{٤}$ ٢

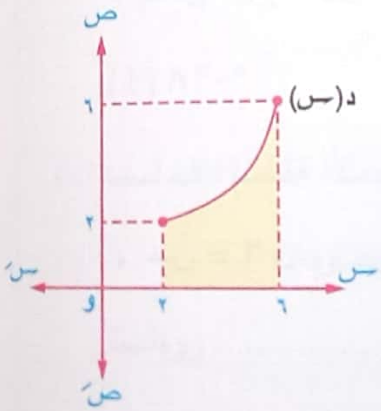
⑨ فى الشكل المقابل :

د (س) دالة معرفة على الفترة [٢ ، ٦]

وهى دالة أحادية ومتصلة

إذا كانت المساحة المظللة = ١٣ وحدة مربعة

فإن : $\int_{٢}^{٦}$ د$^{-١}$ (س) ء س = ...



(أ) ١٨ (ب) ١٩ (جـ) ٢٠ (د) ٢١

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الدرس 5

حجوم الأجسام الدورانية

المجسم الدورانى

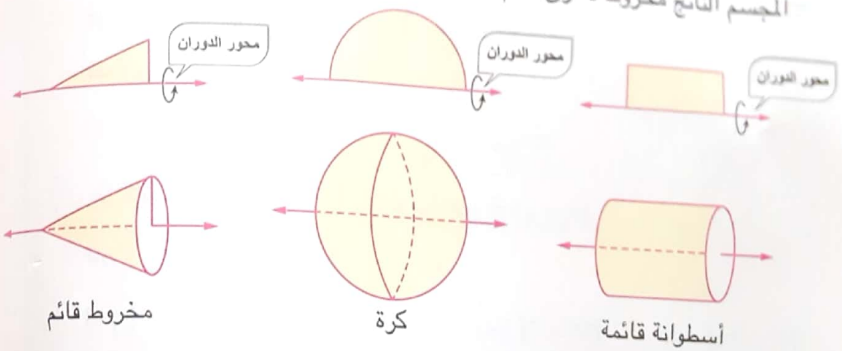
هو المجسم الناشئ من دوران منطقة مستوية دورة كاملة حول مستقيم ثابت فى مستويها يسمى «محور الدوران».

فمثلاً :

① إذا دارت منطقة على شكل مستطيل حول أحد أضلاعه دورة كاملة كان المجسم الناتج أسطوانة.

② إذا دارت منطقة على شكل نصف دائرة حول قطرها دورة كاملة كان المجسم الناتج كرة.

③ إذا دارت منطقة على شكل مثلث قائم الزاوية حول أحد ضلعى القائمة دورة كاملة كان المجسم الناتج مخروط دائرى قائم والأشكال التالية توضح ذلك :



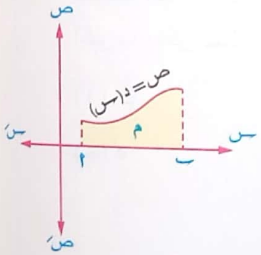
أولًا حجم الجسم الناشئ من دوران منطقة مستوية حول محور

① الدوران حول محور السينات :

بفرض د دالة متصلة على الفترة [أ ، ب]

، د (س) ≥ ٠ لكل س ∈ [أ ، ب]

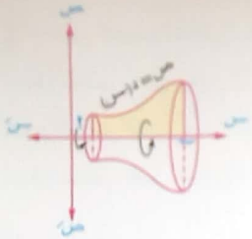
* إذا دارت المنطقة المستوية (م) المحصورة بين المنحنى ص = د (س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب دورة كاملة حول «محور السينات»



وبفرض ح هى حجم الجسم الدورانى الناشئ فإن :

ح = $\pi \int_{أ}^{ب} ص^{٢}$ ء س

= $\pi \int_{أ}^{ب} [د (س)]^{٢}$ ء س

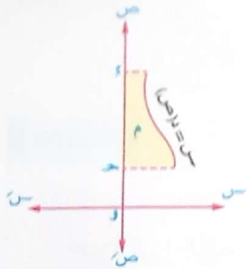


② الدوران حول محور الصادات :

بفرض د دالة متصلة على [حـ ، ء]

، د (ص) ≥ ٠ لكل ص ∈ [حـ ، ء]

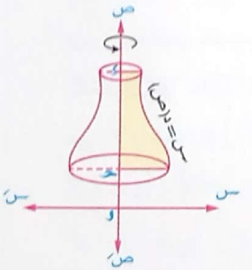
* إذا دارت المنطقة المستوية (م) المحصورة بين المنحنى س = د (ص) ومحور الصادات والمستقيمين ص = حـ ، ص = ء دورة كاملة حول «محور الصادات»



وبفرض ح هى حجم الجسم الدورانى الناشئ فإن :

ح = $\pi \int_{حـ}^{ء} س^{٢}$ ء ص

= $\pi \int_{حـ}^{ء} [د (ص)]^{٢}$ ء ص



ثانيًا حجم الجسم الناشئ من دوران منطقة محددة بمنحنيين

إذا كانت الدالتان ص١ = د (س) ، ص٢ = ر (س) متصلتين

وغير سالبتين على الفترة [أ ، ب] ،

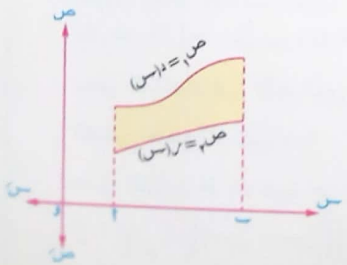
، بفرض أن ص١ ≥ ص٢ لكل س ∈ [أ ، ب] وكان

ح هو حجم الجسم الدورانى الناتج

عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين ص١ ، ص٢

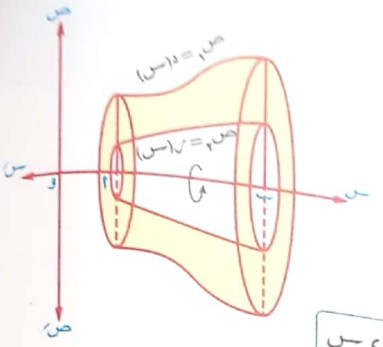
والمستقيمين س = أ ، س = ب دورة كاملة حول

محور السينات فإن :



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ع = حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة أسفل المنحنى ص١ وفوق [أ ، ب] مطروحًا منه حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة أسفل منحنى ص٢ وفوق [أ ، ب]

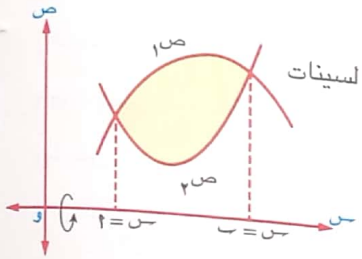


أى أن : ع = $\pi \int_{أ}^{ب} (ص_1^2 - ص_2^2)$ ء س

= $\pi \int_{أ}^{ب} [(د(س))^2 - (ر(س))^2]$ ء س

ملاحظات

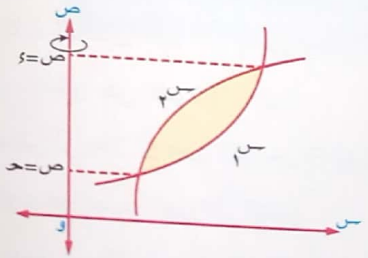
① إذا دارت المنطقة المحددة بالمنحنيين المتقاطعين ص١ = د (س) ، ص٢ = ر (س) حيث ص١ ≥ ص٢ لكل س ∈ [أ ، ب] دورة كاملة حول محور السينات فإن الإحداثيين السينيين لنقطتى تقاطع المنحنيين هما حدود التكامل أ ، ب حيث أ < ب ويكون



ع = $\pi \int_{أ}^{ب} [(ص_1^2 - ص_2^2)]$ ء س

أى : ع = $\pi \int_{أ}^{ب} ص_1^2$ ء س − $\pi \int_{أ}^{ب} ص_2^2$ ء س

② إذا دارت المنطقة المحددة بالمنحنيين المتقاطعين س١ = د (ص) ، س٢ = ر (ص) حيث س١ ≤ س٢ لكل ص ∈ [حـ ، ء] دورة كاملة حول محور الصادات فإن الإحداثيين الصاديين لنقطتى تقاطع المنحنيين هما حدود التكامل حـ ، ء حيث حـ < ء ويكون



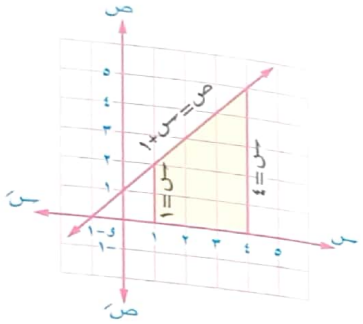
ع = $\pi \int_{حـ}^{ء} [(س_1^2 - س_2^2)]$ ء ص

أى : ع = $\pi \int_{حـ}^{ء} س_1^2$ ء ص − $\pi \int_{حـ}^{ء} س_2^2$ ء ص

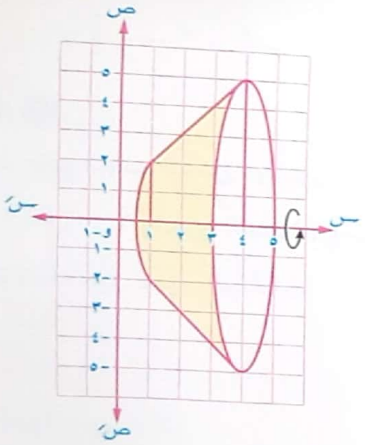
مثال ①

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمستقيمات : ص = س + ١ ، ص = صفر ، س = ١ ، س = ٤ دورة كاملة حول محور السينات.

الحل



«المنطقة المحددة بالمستقيمات»



«شكل الجسم الدورانى الناتج»

∵ الدالة متصلة على الفترة [١ ، ٤] ، د (س) ≥ ٠ لكل س ∈ [١ ، ٤]

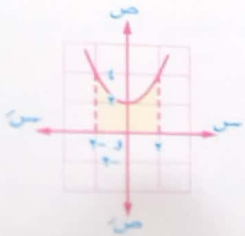
∴ حجم الجسم الدورانى (ع) = $\pi \int_{١}^{٤} ص^2$ ء س = $\pi \int_{١}^{٤} (س + ١)^2$ ء س

= $\pi \left[\frac{(س + ١)^3}{٣} \right]_{١}^{٤}$ = ٣٩ π وحدة مكعبة.

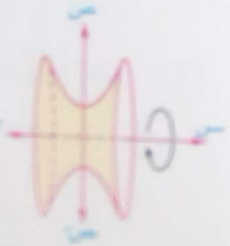
مثال ②

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى : ص = $س^2$ + ٢ ومحور السينات والمستقيمين س = −٢ ، س = ٢ دورة كاملة حول محور السينات.

الحل



«المنطقة المحددة بالمنحنى والمستقيمات»



«شكل الجسم الدورانى الناتج»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

∵ الدالة كثيرة حدود متصلة على الفترة [-٢ ، ٢]

، د (س) ≥ ٠ لكل س ∈ [-٢ ، ٢]

∴ ح = $\pi \int_{-٢}^{٢}$ ص^{٢} ء س = $\pi \int_{-٢}^{٢}$ (س^{٢} + ٢)^{٢} ء س

= $\pi \int_{-٢}^{٢}$ (س^{٤} + ٤ س^{٢} + ٤) ء س

= $\pi \left[\frac{١}{٥} س^{٥} + \frac{٤}{٣} س^{٣} + ٤ س \right]_{-٢}^{٢}$ = $\frac{٧٥٢}{١٥}$ π وحدة مكعبة.

مثال ٣

أوجد حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنى :

ص = س^{٢} + ٢ ومحور الصادات والمستقيم ص = ٦ والواقعة فى الربع الأول دورة كاملة حول محور الصادات.

الحل

∵ ص = س^{٢} + ٢

∴ س^{٢} = ص - ٢

، ∵ الدوران حول محور الصادات :

، عند س = ٠

∴ ص = ٢

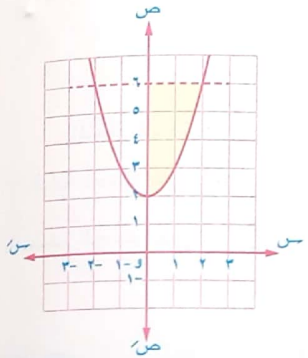
∴ حدود التكامل هى ص = ٢ ، ص = ٦

∴ ح = $\pi \int_{٢}^{٦}$ س^{٢} ء ص

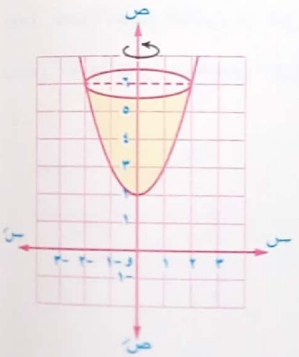
= $\pi \int_{٢}^{٦}$ (ص - ٢) ء ص

= $\pi \left[\frac{١}{٢} (ص - ٢)^{٢} \right]_{٢}^{٦}$

= ٨ π وحدة مكعبة.



«المنطقة المحددة بالمنحنى والمستقيمات»



«شكل الجسم الدورانى الناتج»

مثال ٤

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى :

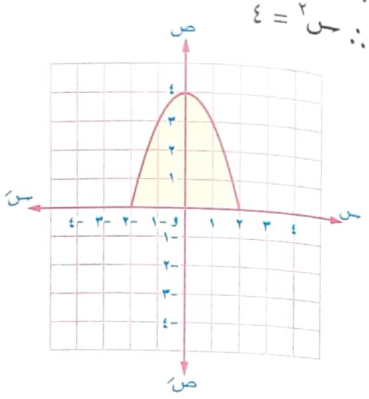
ص = ٤ - س^{٢} ، ومحور السينات دورة كاملة حول محور السينات.

الحل

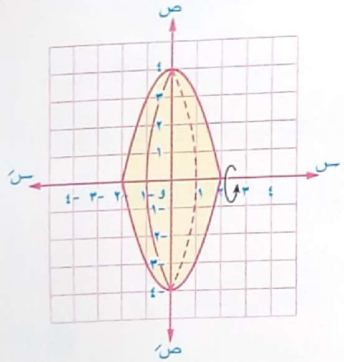
لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات نضع ٤ - س^{٢} = ٠

∴ س^{٢} = ٤

∴ س = ± ٢



«المنطقة المحددة بالمستقيمات»



«شكل الجسم الدورانى الناتج»

ح = $\pi \int_{-٢}^{٢}$ ص^{٢} ء س = $\pi \int_{-٢}^{٢}$ (٤ - س^{٢})^{٢} ء س = $\pi \int_{-٢}^{٢}$ (١٦ - ٨ س^{٢} + س^{٤}) ء س

= $\pi \left[١٦ س - \frac{٨ س^{٣}}{٣} + \frac{س^{٥}}{٥} \right]_{-٢}^{٢}$ = $\frac{٥١٢ \pi}{١٥}$ وحدة مكعبة.

مثال ٥

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى :

ص = $\sqrt{س + ٤}$ ومحورى الإحداثيات دورة كاملة إذا كان الدوران حول

① السينات. ② الصادات.

الحل

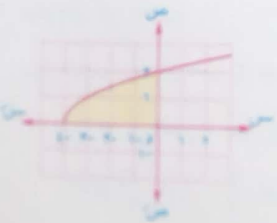
لإيجاد نقطة تقاطع المنحنى مع محور السينات :

نضع ص = ٠

∴ س + ٤ = ٠ ∴ س = - ٤

، لإيجاد نقطة تقاطع المنحنى مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ ص = $\sqrt{٤}$ = ٢



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

① إذا كان الدوران حول محور السينات :

∴ ح = π ∫ ص² د س = π ∫ (س + ٤) د س

= π [½ س² + ٤ س]

= ٨ π وحدة مكعبة.

② إذا كان الدوران حول محور الصادات :

∴ ح = π ∫ س² د ص = π ∫ (ص² − ٤)² د ص

= π ∫ (ص⁴ − ٨ ص² + ١٦) د ص

= π [⅕ ص⁵ − ⅜ ص³ + ١٦ ص]

= ٢٥٦/١٥ π وحدة مكعبة.

مثال ٦

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنيين :

س = ص² ، ص = س² دورة كاملة حول محور السينات.

الحل

* لإيجاد نقط تقاطع المنحنيين

نحل المعادلة س = ص² ، ص = س² معًا

∴ س = س⁴ ∴ س⁴ − س = ٠

∴ س (س³ − ١) = ٠ ∴ س = ٠ أ، س = ١

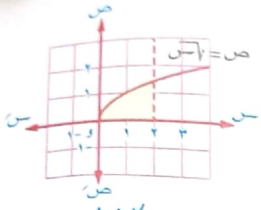
ويفرض س = ص₁² ، ص₂ = س²

ومن الرسم نجد أن ص₁ ≤ ص₂ لكل س ∈ [٠ ، ١]

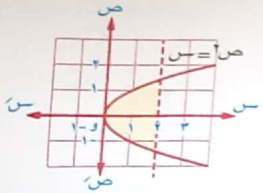
∴ ح = π ∫ (ص₁² − ص₂²) د س = π ∫ (س − س⁴) د س

= π [½ س² − ⅕ س⁵] = ٣/١٠ π وحدة مكعبة.

ملاحظة



شكل (١)



شكل (٢)

عند رسم المنحنيين ص = √س [شكل (١)] ، ص² = س [شكل (٢)]

ونظلل المساحة المحددة بالمنحنى ومحور السينات والمستقيم س = ٢ مثلًا [كما بشكل (١)]

وأيضا نظلل المساحة المحددة بالمنحنى والمستقيم س = ٢ مثلًا [كما بشكل (٢)]

نلاحظ ما يلى :

① مساحة المنطقة [فى شكل (١)] = ½ مساحة المنطقة فى [شكل (٢)]

② حجم الجسم الدورانى الناتج من دوران المنطقة المظللة فى [شكل (١)] دورة كاملة حول محور السينات يساوى حجم الجسم الدورانى الناتج من دوران المنطقة المظللة فى [شكل (٢)] نصف دورة حول محور السينات.

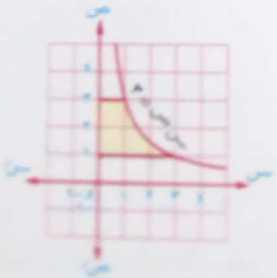
مثال ٧

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى :

س ص = ٣ والمستقيمين ص = ١ ، ص = ٣ ومحور الصادات دورة كاملة

① حول محور الصادات. ② حول محور السينات.

الحل



① الدوران حول محور الصادات :

∵ س = ٣/ص = ٣ ص⁻¹

∴ ح = π ∫ س² د ص = π ∫ (٣ ص⁻¹)² د ص

= ٩ π ∫ ص⁻² د ص = ٩ π [ص⁻¹/(−١)]

= ٦ π وحدة مكعبة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

② الدوران حول محور السينات

$\therefore$ ص $= \frac{٣}{س} = ٣ س^{-١}$

$\therefore$ ع $=$ ع$_{١}$ $+$ ع$_{٢}$

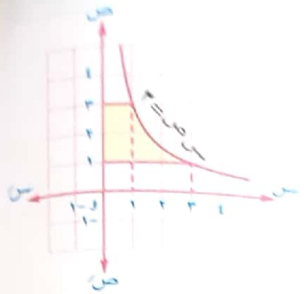
$= \pi \int_{١}^{٣} [(٣)^{٢} - (١)^{٢}]$ ء س

$+ \pi \int_{١}^{٣} [(٣ س^{-١})^{٢} - (١)^{٢}]$ ء س

$= \pi \int_{١}^{٣} ٨$ ء س $+ \pi \int_{١}^{٣} (٩ س^{-٢} - ١)$ ء س

$= \pi [٨ س]_{١}^{٣} + \pi [- ٩ س^{-١} - س]_{١}^{٣}$

$= \pi ٨ + \pi ٤ = \pi ١٢$ وحدة مكعبة.



مثال ٨

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى :

ص $= ٩ - س^{٢}$ والمستقيم ٣ س + ص $= ٩$ دورة كاملة حول محور الصادات.

الحل

$\therefore$ ص $= ٩ - س^{٢}$

$\therefore س^{٢} = ٩ -$ ص (١)

، ٣ س + ص $= ٩$

$\therefore س = \frac{٩ - ص}{٣}$ (٢)

ولإيجاد نقط تقاطع المنحنيين نحل المعادلتين

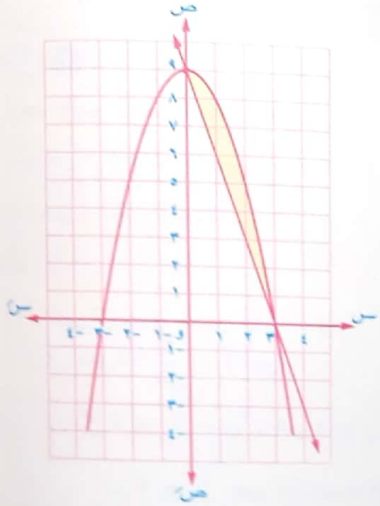
من (١) ، (٢) : $\therefore ٩ -$ ص $= \left(\frac{٩ - ص}{٣}\right)^{٢}$

$\therefore ٨١ - ٩$ ص $= ٨١ - ١٨$ ص $+$ ص^{٢}

$\therefore$ ص$^{٢} - ٩$ ص $= ٠$ $\therefore$ ص (ص $- ٩) = ٠$

$\therefore$ ص $= ٠$ ، أ ص $= ٩$

ويفرض أن س$_{١}^{٢} = ٩ -$ ص ، س$_{٢}^{٢} = \left(\frac{٩ - ص}{٣}\right)^{٢}$



من الرسم نجد أن س$_{١}^{٢} \leq$ س$_{٢}^{٢}$ لكل ص $\in [٠ ، ٩]$

$\therefore$ ع $= \pi \int_{٠}^{٩}$ (س$_{٢}^{٢} -$ س$_{١}^{٢}$) ء ص

$= \pi \int_{٠}^{٩} [(٩ -$ ص$) - (٣ - \frac{ص}{٣})^{٢}]$ ء ص

$= \pi \int_{٠}^{٩} (ص - \frac{ص^{٢}}{٩})$ ء ص $= \pi [\frac{١}{٢}$ ص$^{٢} - \frac{ص^{٣}}{٢٧}]_{٠}^{٩} = \pi \frac{٢٧}{٢}$

مثال ٩

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنى :

ص $= \sqrt{٢ س}$ ، والمستقيم ص $= \frac{١}{٢}$ س دورة كاملة حول محور

② الصادات.

① السينات.

الحل

لإيجاد نقط تقاطع المنحنيين : نحل المعادلتين ص $= \sqrt{٢ س}$ ، ص $= \frac{١}{٢}$ س معًا

$\therefore$ ص $= \frac{١}{٢}$ ص^{٢}

$\therefore$ ص$^{٢} - ٢$ ص $= ٠$ $\therefore$ ص (ص $- ٢) = ٠$

$\therefore$ ص $= ٠$ ومنها س $= ٠$

أ، ص $= ٢$ ومنها س $= ٤$

① إذا كان الدوران حول محور السينات (حدود التكامل ٠ ، ٤)

نفرض ص$_{١} = \sqrt{٢ س}$ ، ص$_{٢} = \frac{١}{٢}$ س

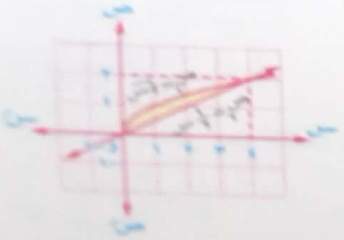
ومن الرسم نجد أن : ص$_{١} \geq$ ص$_{٢}$ لكل س $\in [٠ ، ٤]$

$\therefore$ ع $= \pi \int_{٠}^{٤}$ (ص$_{١}^{٢} -$ ص$_{٢}^{٢}$) ء س

$= \pi \int_{٠}^{٤} ((\sqrt{٢ س})^{٢} - (\frac{١}{٢}$ س$)^{٢})$ ء س

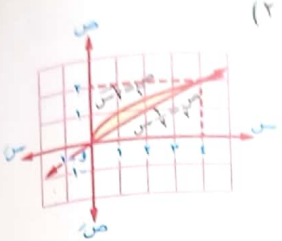
$= \pi \int_{٠}^{٤} (س - \frac{١}{٤}$ س$^{٢})$ ء س

$= \pi [\frac{١}{٢}$ س$^{٢} - \frac{١}{١٢}$ س$^{٣}]_{٠}^{٤} = \pi \frac{٨}{٣}$ وحدة مكعبة.



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

② إذا كان الدوران حول محور الصادات (حدود التكامل ٠ ، ٢)



بفرض أن ص = $\sqrt{س_١}$ ، ص = $\frac{١}{٢}$ $س_١$

∴ $س_١$ = $ص^٢$ ، $س_١$ = ٢ ص

ومن الرسم نجد أن : $س_١ \leq س_١$ لكل ص ∈ [٠ ، ٢]

∴ ع = $\pi \int_{٠}^{٢} (س_١^٢ - س_١^٢)$ ء ص

= $\pi \int_{٠}^{٢} ((٢ ص)^٢ - (ص^٢)^٢)$ ء ص

= $\pi \int_{٠}^{٢} (٤ ص^٢ - ص^٤)$ ء ص

= $\pi \left[\frac{٤ ص^٣}{٣} - \frac{١}{٥} ص^٥\right]_{٠}^{٢}$

= $\frac{٦٤}{١٥}$ π وحدة مكعبة.

مثال ١٠

أوجد حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحصورة بين المنحنى :

ص = $\sqrt{٢ س - ٢}$ والمماس المرسوم للمنحنى عند النقطة (٣ ، ٢)

ومحور السينات دورة كاملة حول محور السينات.

الحل

∵ ص = $\sqrt{٢ س - ٢}$

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{٢}{٢\sqrt{٢ س - ٢}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢ س - ٢}}$

∴ $\left(\frac{ء ص}{ء س}\right)_{س = ٣}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ معادلة المماس عند النقطة (٣ ، ٢)

هى $\frac{ص - ٢}{س - ٣}$ = $\frac{١}{٢}$ ∴ ٢ ص = س + ١

ولإيجاد نقطة تقاطع المماس مع محور السينات نضع ص = ٠ .

∴ س = − ١

∴ ع = $ع_١ - ع_٠$ = $\pi \int_{-١}^{١} (\frac{١}{٢}(س + ١))^٢$ ء س − $\pi \int_{١}^{٢} (\sqrt{٢ س - ٢})^٢$ ء س

= $\frac{\pi}{٤}$ $\left[\frac{١}{٣}(س + ١)^٣\right]_{-١}^{١}$ − $\pi \left[س^٢ - ٢ س\right]_{١}^{٢}$

= $\frac{\pi}{١٢} \times ٦٤ - ٤$ = $\pi \frac{٤}{٣}$ وحدة مكعبة.

مثال ١١

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى :

$\frac{س^٢}{حـ^٢} + \frac{ص^٢}{ء^٢}$ = ١ حيث حـ ، ء ثابتان دورة كاملة حول محور

① السينات. ② الصادات.

الحل

* لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات نضع ص = ٠ .

∴ $س^٢ = حـ^٢$ ∴ س = ± حـ

* لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات نضع س = ٠ .

∴ $ص^٢ = ء^٢$ ∴ ص = ± ء

① إذا كان الدوران حول محور السينات :

∴ ع = $\pi \int_{-حـ}^{حـ} ص^٢$ ء س = $\pi \int_{-حـ}^{حـ} ء^٢ (١ - \frac{س^٢}{حـ^٢})$ ء س

= $\pi ء^٢ \left[س - \frac{س^٣}{٣ حـ^٢}\right]_{-حـ}^{حـ}$

= $\pi ء^٢ \left[(حـ - \frac{حـ}{٣}) - (-حـ + \frac{حـ}{٣})\right]$

= $\frac{٤}{٣}$ $\pi ء^٢ حـ$

② إذا كان الدوران حول محور الصادات :

∴ ع = $\pi \int_{-ء}^{ء} س^٢$ ء ص = $\pi \int_{-ء}^{ء} حـ^٢ (١ - \frac{ص^٢}{ء^٢})$ ء ص

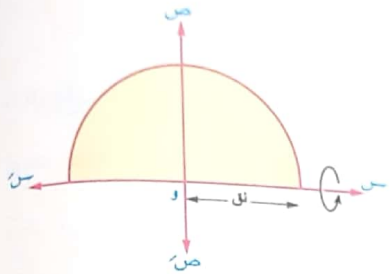
= $\pi حـ^٢ \left[ص - \frac{ص^٣}{٣ ء^٢}\right]_{-ء}^{ء}$

= $\pi حـ^٢ \left[(ء - \frac{ء}{٣}) - (-ء + \frac{ء}{٣})\right]$ = $\frac{٤}{٣}$ $\pi حـ^٢ ء$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ١٢

باستخدام التكامل أوجد حجم الكرة التى طول نصف قطرها = نق



الحل

نعتبر نصف دائرة مركزها (٠ ، ٠) وطول نصف قطرها نق وينطبق قطرها على محور السينات

فتكون معادلة نصف الدائرة هى :

$س^٢ + ص^٢ = نق^٢$ أى $ص = \sqrt{نق^٢ - س^٢}$

الكرة تنتج من دوران المنطقة المستوية المحصورة بين نصف الدائرة ومحور السينات حول محور السينات دورة كاملة.

$\therefore ح = \pi \int_{-نق}^{نق} ص^٢ \, ؤ س = \pi \int_{-نق}^{نق} (نق^٢ - س^٢) \, ؤ س$

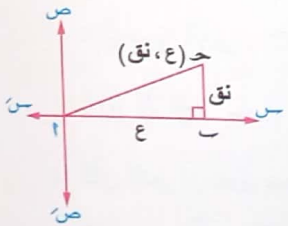
$= \pi \left[نق^٢ س - \frac{١}{٣} س^٣ \right]_{-نق}^{نق} = \frac{٤}{٣} \pi نق^٣$

مثال ١٣

باستخدام التكامل أثبت أن حجم المخروط الدائرى القائم يساوى :

$\frac{١}{٣} \pi نق^٢ ع$ حيث نق طول نصف قطر قاعدته ، ع ارتفاع

الحل



* نرسم مثلث قائم الزاوية أ ب حـ بحيث

تكون أ نقطة الأصل

، أحد ضلعى القائمة $\overline{أ ب}$ منطبق على محور السينات.

، طول $\overline{أ ب} = ع$ ، طول $\overline{ب حـ} = نق$

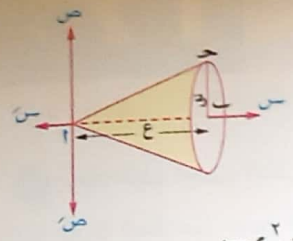
، ∵ أ (٠ ، ٠) ، حـ (ع ، نق)

∴ معادلة $\overleftrightarrow{أ حـ}$ هى $\frac{ص - ٠}{س - ٠} = \frac{نق - ٠}{ع - ٠}$ أى $\boxed{ص = \frac{نق}{ع} س}$

* المخروط الدائرى القائم ينتج من

دوران المثلث أ ب حـ المحصور بين المستقيم $\overleftrightarrow{أ حـ}$

ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = ع



∴ حجم المخروط = $\pi \int_{٠}^{ع} ص^٢ \, ؤ س$

$= \pi \int_{٠}^{ع} \frac{نق^٢}{ع^٢} س^٢ \, ؤ س = \frac{\pi نق^٢}{ع^٢} \int_{٠}^{ع} س^٢ \, ؤ س$

$= \frac{\pi نق^٢}{ع^٢} \left[\frac{١}{٣} س^٣ \right]_{٠}^{ع} = \frac{\pi نق^٢}{ع^٢} \times \frac{١}{٣} ع^٣ = \frac{١}{٣} \pi نق^٢ ع$

مثال ١٤

أ ب حـ مثلث فيه : أ (٠ ، ٠) ، ب (٥ ، ٠) ، حـ (٨ ، ٣)

أوجد باستخدام التكامل حجم الجسم الناشىء من دوران هذا المثلث دورة كاملة حول محور السينات.

الحل

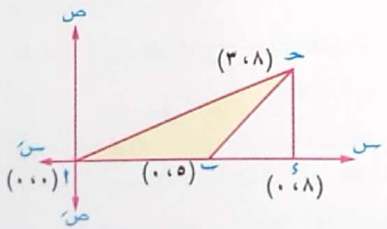
نرسم $\overleftarrow{حـ ؤ} \perp$ محور السينات.

، من الرسم معادلة $\overleftrightarrow{أ حـ}$ هى

$\frac{ص - ٠}{س - ٠} = \frac{٣ - ٠}{٨ - ٠}$ ∴ $ص = \frac{٣}{٨} س$

، معادلة $\overleftrightarrow{ب حـ}$ هى

$\frac{ص - ٠}{س - ٥} = \frac{٣ - ٠}{٨ - ٥}$ ∴ $ص = س - ٥$



∴ حجم الجسم الدورانى = حجم الجسم الدورانى الناتج من دوران المثلث القائم أ حـ ؤ

مطروحًا منه حجم الجسم الدورانى الناتج من دوران المثلث القائم ب حـ ؤ

$= \pi \int_{٠}^{٨} \left(\frac{٣}{٨} س \right)^٢ \, ؤ س - \pi \int_{٥}^{٨} (س - ٥)^٢ \, ؤ س$

$= \frac{\pi ٩}{٦٤} \left[\frac{س^٣}{٣} \right]_{٠}^{٨} - \pi \left[\frac{١}{٣} (س - ٥)^٣ \right]_{٥}^{٨}$

$= ٢٤ \pi - ٩ \pi = ١٥ \pi$ وحدة مكعبة.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمارين 19

على حجوم الأجسام الدورانية

اختبار تفاعلى

• فهم • تطبيق • مستويات عليا من أسئلة الكتاب المدرسى

١ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيات والمستقيمات المعطاة :
دورة كاملة حول محور السينات فى كل مما يأتى :

(١) ص = س ، س = ٣ ، ص = ٠ ، ٩ π وحدة حجم

(٢) ص = ٢ س + ١ ، ص = ٠ ، س = ٠ ، س = ٤ ، ١٢١ $\frac{١}{٣}$ π وحدة حجم

(٣) ص = ٣ − س ، س = ٠ ، ص = ٠ ، ٩ π وحدة حجم

(٤) ص = س^{٢} ، ص = ٠ ، س = ١ ، س = ٥ ، ٦٢٤ $\frac{٤}{٥}$ π وحدة حجم

(٥) د (س) = س^{٢} + ١ ، ص = ٠ ، س = − ١ ، س = ١ ، $\frac{٥٦}{١٥}$ π وحدة حجم

(٦) ص = $\sqrt{س}$ ، ص = ٠ ، س = ١ ، س = ٤ ، ٧ $\frac{١}{٢}$ π وحدة حجم

(٧) ص = $\sqrt{س+٥}$ ، ص = ٠ ، س = ١ ، س = ٣ ، ١٤ π وحدة حجم

(٨) ص = س^{٣} + ١ ، ص = ٠ ، س = ٠ ، س = ١ ، $\frac{٢٣}{١٤}$ π وحدة حجم

(٩) ص = $\frac{١}{س}$ ، س = ١ ، س = ٤ ، ص = ٠ ، $\frac{٣}{٤}$ π وحدة حجم

(١٠) ص = هـ^{س} ، ص = ٠ ، س = ٠ ، س = ٢ ، $\frac{\pi}{٢}$ (هـ^{٤} − ١) وحدة حجم

(١١) ص = |س| ، س = −٢ ، س = ٤ ، ص = ٠ ، ٢٤ π وحدة حجم

(١٢) ص = جا ٢ س ، ص = ٠ ، س = ٠ ، س = $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ π^{٢} وحدة حجم

(١٣) د (س) = ظا س ، ص = ٠ ، س = ٠ ، س = $\frac{\pi}{٤}$ ، π وحدة حجم

(١٤) د (س) = ظتا س ، ص = ٠ ، س = $\frac{\pi}{٤}$ ، س = $\frac{\pi}{٢}$ ، π وحدة حجم

٢ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيات والمستقيمات المعطاة
دورة كاملة حول محور الصادات فى كل مما يأتى :

(١) ص = س ، ص = ١ ، س = ٠ ، $\frac{١}{٣}$ π وحدة حجم

(٢) س + ٢ ص = ٠ ، س = ٠ ، ص = ٠ ، ص = ٣ ، ٣٦٠ π وحدة حجم

(٣) ص = س^{٢} ، س = ٠ ، ص = ٨ وتقع فى الربع الأول. ٣٢٠ π وحدة حجم

(٤) ص = س^{٢} + ١ ، س = ٠ ، ص = ٥ وتقع فى الربع الأول. ٨٠ π وحدة حجم

(٥) ص = س^{٣} ، س = ٠ ، ص = ٨ ، $\frac{٩٦}{٥}$ π وحدة حجم

(٦) ص = $\sqrt{س}$ ، س = ٠ ، ص = ١ ، ص = ٢ ، $\frac{٣١}{٥}$ π وحدة حجم

(٧) س ص = ٤ ، ص = ١ ، ص = ٤ ، س = ٠ ، ١٢ π وحدة حجم

(٨) $\sqrt{س}$ + $\sqrt{ص}$ = ١ ، س = ٠ ، ص = ٠ ، $\frac{١}{١٥}$ π وحدة حجم

٣ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المستوية المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = ٣ دورة كاملة حول محور السينات علمًا بأن د (س) = س ما اسم المجسم الناشئ ؟ بين كيف نتحقق هندسيًا من صحة إجابتك.
٩ π وحدة حجم

٤ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى :
ص = $\frac{١}{٤}$ س^{٢} ، والمستقيم ص = ١ والواقعة فى الربع الأول دورة كاملة.
(١) حول محور الصادات. (٢) حول محور السينات. ٢ π ، $\frac{٨}{٥}$ π وحدة حجم

٥ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى :
ص = س^{٢} ومحور السينات والمستقيم س = ٢ دورة كاملة.
(١) حول محور السينات. (٢) حول محور الصادات. $\frac{٣٢}{٥}$ π ، ٨ π وحدة حجم

٦ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى :
ص = $\sqrt{٤ - س}$ ومحورى الإحداثيات دورة كاملة.
(١) حول محور السينات. (٢) حول محور الصادات. ٨ π ، $\frac{٢٥٦}{١٥}$ π وحدة حجم

٧ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى :
ص = ٤ − س^{٢} والجزأين الموجبين من محورى الإحداثيات دورة كاملة.
(١) حول محور السينات. (٢) حول محور الصادات. $\frac{٢٥٦}{١٥}$ π ، ٨ π وحدة حجم

٨ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى :
ص^{٢} = ٨ س والمستقيم س = ٢ نصف دورة حول محور السينات. ١٦٠ π وحدة حجم

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٩ أوجد حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنى : ص^{٢} = ٤ − س والجزأين الموجبين من محورى الإحداثيات عندما تدور هذه المنطقة دورة كاملة.
① حول محور السينات. ② حول محور الصادات.
« $\frac{٢٥٦}{١٥}\pi$ وحدة حجم ، π ٨ »

١٠ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بمحور السينات والمنحنى المعطى دورة كاملة حول محور السينات فى كل مما يأتى :
① د (س) = ١ − س^{٢} ② د (س) = ٢ س − س^{٢}
③ د (س) = س^{٣} − س
« $\frac{١٦}{١٥}\pi$ ، $\frac{١٦}{١٥}\pi$ ، $\frac{١٦}{١٠٥}\pi$ وحدة حجم »

١١ إذا كان حجم الجسم الدورانى الناشئ عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = س^{٣} والمستقيمين س = ٠ ، ص = ١ دورة كاملة حول محور السينات يعادل حجم سلك أسطوانى الشكل طوله ٤٢ وحدة فما طول نصف قطر السلك. « $\frac{١}{٧}$ وحدة طول »

١٢ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = ٥ س − س^{٢} والمستقيم ص = ٤ دورة كاملة حول محور السينات. « ٤٤,١ π وحدة حجم »

١٣ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى د (س) = $\frac{١}{٢}$ + س^{٢} ، ر (س) = س فوق الفترة [٠ ، ٢] دورة كاملة حول السينات. « ٦,٩ π وحدة حجم »

١٤ (دور ثان ٢٠١٧) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = س^{٢} والمستقيم ص = ٢ س دورة كاملة حول محور السينات. « $\frac{٦٤}{١٥}\pi$ وحدة حجم »

١٥ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين ص = $\sqrt{س}$ ، ص = س^{٢} دورة كاملة حول محور السينات. « $\frac{٣}{١٠}\pi$ وحدة حجم »

١٦ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين ص^{٢} = ٨ س ، ص = س^{٢} دورة كاملة حول محور السينات. « $\frac{٤٨}{٥}\pi$ وحدة حجم »

١٧ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = ٤ − س^{٢} ، والمستقيم ٢ س + ص = ٤ دورة كاملة حول محور الصادات. « $\frac{٨}{٣}\pi$ وحدة حجم »

١٨ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين ٢ ص = س^{٢} ، ص = $\sqrt{٢ س}$ دورة كاملة حول محور الصادات. « ٩٥٠ π وحدة حجم »

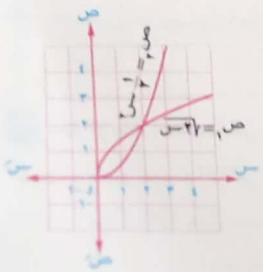
١٩ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = ٥ س − س^{٢} والمستقيم ص = س دورة كاملة حول محور السينات. « ٧٦,٨ π وحدة حجم »

٢٠ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = $\frac{٤}{س}$ والمستقيم س + ص = ٥ دورة كاملة حول محور السينات. « ٩ π وحدة حجم »

٢١ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين ص = $\frac{٤}{س}$ ، ص = (س − ٣)^{٢} دورة كاملة حول محور السينات. « ٥,٤ π وحدة حجم »

٢٢ إذا كانت م المنطقة المحددة بالمنحنى س ص = ٤ + س^{٢} والمستقيمات س = ١ ، س = ٤ ، ص = ٠ أوجد :
① مساحة المنطقة م بالوحدات المربعة لأقرب وحدة.
② حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة م دورة كاملة حول محور السينات.
« ٤ لو$_{هـ}$ ٤ + $\frac{١٥}{٢}$ وحدة مربعة ، ٥٧ π وحدة حجم »

٢٣ يوضح الشكل المقابل المنطقة المحددة بالمنحنيين :
ص$_{١}$ = $\sqrt{٢ س}$ ، ص$_{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} أوجد :
① مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين ص$_{١}$ ، ص$_{٢}$
② حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين ص$_{١}$ ، ص$_{٢}$ دورة كاملة حول محور السينات.



« $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١٢}{٥}\pi$ وحدة حجم »

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢٤ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $\frac{س^٢}{٩} + \frac{ص^٢}{٤} = ١$ ومحور السينات ، حيث ٩ ، ٤ ثابتان ، الدوران دورة كاملة حول محور السينات.

« $\frac{١}{٣}\pi$ ٩ ٤ وحدة مكعبة »

٢٥ باستخدام التكامل أثبت أن :

(١) حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}\pi$ نق^٣ (نق طول نصف قطر الكرة)

(٢) حجم الأسطوانة الدائرية القائمة = π نق^٢ ع (نق طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة ، ع ارتفاعها).

(٣) حجم المخروط الدائرى القائم = $\frac{١}{٣}\pi$ نق^٢ ع (نق طول نصف قطر قاعدته ، ع ارتفاعه)

٢٦ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = $\sqrt{٤ - س^٢}$ والمستقيم ص = ٠ دورة كاملة حول محور السينات.

« $\frac{٣٢}{٣}\pi$ وحدة حجوم »

٢٧ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى د (س) = $\sqrt{٢٥ - س^٢}$ ، ر (س) = ٣ دورة كاملة حول محور السينات.

« $\frac{٢٥٦}{٣}\pi$ وحدة حجوم »

٢٨ أوجد حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى ص = $\sqrt{١ - س^٢}$ والمستقيمان ص = س ، ص = − س دورة كاملة حول محور السينات.

« $\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}\pi$ وحدة حجوم »

٢٩ أوجد حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحصورة بين المنحنيين ص = س^٢ ، ص = س^٣ حول محور الصادات دورة كاملة.

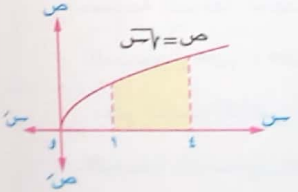
« $\frac{١}{١٠}\pi$ وحدة حجوم »

٣٠ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = ظا س والمنحنى ص = ظتا س ومحور الصادات حيث س ∈ $\left[٠ ، \frac{\pi}{٤}\right]$ دورة كاملة حول محور السينات.

« $\frac{١}{٢}\pi$ وحدة حجوم »

٣١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المظللة دورة كاملة حول محور السينات



= وحدة مكعبة.

(أ) $\frac{١٤}{٣}\pi$ (ب) $\frac{١٥}{٢}\pi$ (جـ) $\frac{١٥}{٢}$ (د) $\frac{١٤}{٣}$

(٢) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى د (س) = س^٢ ومحور السينات والمستقيمين س = − ٢ ، س = ٢ دورة واحدة حول محور السينات يساوى

(أ) $\frac{١٦}{٥}\pi$ (ب) $\frac{٣٢}{٥}\pi$ (جـ) $\frac{٦٤}{٥}\pi$ (د) ٤ π

(٣) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = س^٢ ، ومحور السينات ، س = ٢ حيث ٢ ∈ ح$^+$ دورة كاملة حول محور السينات يساوى

(أ) $\frac{١}{٢}\pi$ ٢^٤ (ب) π ٢^٣ (جـ) $\frac{١}{٥}\pi$ ٢^٥ (د) $\frac{١}{٣}\pi$ ٢^٣

(٤) $\int_{٠}^{\text{نق}} \pi$ س ء س = ...

(أ) محيط دائرة طول نصف قطرها نق

(ب) نصف حجم كرة طول نصف قطرها نق

(جـ) نصف محيط دائرة طول نصف قطرها نق

(د) نصف مساحة دائرة طول نصف قطرها نق

(٥) $\int_{٠}^{ع} \pi$ نق^٢ ء س

(أ) حجم أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها (ع) وطول نصف قطر قاعدتها نق.

(ب) مساحة سطح كرة نصف قطرها يساوى (ع)

(جـ) المساحة الجانبية لأسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها (ع) وطول نصف قطر قاعدتها نق

(د) $\frac{١}{٣}\pi$ ع^٣ + ث

(٦) $\pi \int_{-٢}^{٢} (٤ - س^٢)$ ء س ، هو حجم

(أ) كرة طول نصف قطرها ٤ وحدات.

(ب) مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٤ وحدات.

(جـ) كرة طول نصف قطرها ٢ وحدة.

(د) أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٤ وحدات.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٧) (دور أول ٢٠١٩) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنى ص = ٢ س^{٢} ، المستقيم ص = ٨ س دورة كاملة حول محور السينات يساوى

(أ) $\pi \int_{٠}^{٨} (٨ س - ٢ س^{٢})^{٢} ء س$ (ب) $\pi \int_{٠}^{٤} (٨ س - ٢ س^{٢})^{٢} ء س$

(جـ) $\pi \int_{٠}^{٤} (٦٤ س^{٢} - ٤ س^{٤}) ء س$ (د) $\pi \int_{٠}^{٤} (٤ س^{٤} - ٦٤ س^{٢}) ء س$

(٨) إذا دارت المنطقة المستوية المحصورة بين المنحنى ص = س^{٢} ، والمستقيم ص = ٢ دورة كاملة حول محور الصادات فإن حجم الجسم الناشئ من الدوران يساوى

(أ) $\int_{٠}^{٢} ص ء س$ (ب) $\pi \int_{٠}^{٢} ص ء ص$

(جـ) $\pi \int_{٠}^{٢} س ء س$ (د) $\pi \int_{٠}^{٢} س^{٢} ء س$

(٩) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص^{٢} = ٢ أ س ، المستقيم س = ب (حيث أ ، ب ∈ ح$^{+}$) نصف دورة حول محور السينات يساوى وحدة مكعبة.

(أ) π أ ب^{٢} (ب) π ب أ^{٢} (جـ) π أ ب (د) π أ^{٢} ب^{٢}

(١٠) عند دوران المنطقة المحددة بالمنحنى س = $\frac{١}{\sqrt{ص}}$ ، ١ ≤ ص ≤ ٤ ومحور الصادات ، دورة كاملة حول محور الصادات فإن حجم الجسم الناشئ مقدرًا بالوحدات المكعبة يساوى

(أ) $\pi \frac{٢}{٣}$ (ب) $\pi ٣\sqrt{٢}$ (جـ) ٢ π لو$_{هـ}$ ٢ (د) $\pi \frac{٢}{٣}$ لو ٣

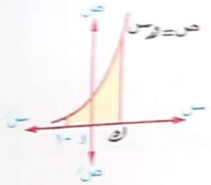
(١١) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = ق أ س والمستقيمين س = ٠ ، س = $\frac{\pi}{٣}$ دورة كاملة حول محور السينات = ... وحدة مكعبة.

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) $\frac{١}{٣\sqrt{٢}}$ (جـ) $\frac{\pi}{٣\sqrt{٢}}$ (د) $\pi ٣\sqrt{٢}$

(١٢) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = ق أ س ، ص = أ س والمستقيمين س = $\frac{\pi}{٦}$ ، س = $\frac{\pi}{٣}$ دورة كاملة حول محور السينات مقدرا بالوحدات المكعبة يساوى

(أ) $\frac{\pi^{٢}}{٦}$ (ب) $\frac{\pi^{٢}}{٣}$ (جـ) $\frac{\pi ٢^{٢}}{٥}$ (د) $\pi ٢^{٢}$

(١٣) في الشكل المقابل :



إذا كان حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المظللة دورة كاملة حول محور السينات تساوى $\frac{\pi}{٢}$ (هـ^{١٠} − هـ$^{-٢}$) وحدة مكعبة

فإن : ك = ...

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٠ (د) −٥

(١٤) النسبة بين حجم الجسم الناشئ من دوران منحنى الدالة ص = د (س) حول محور السينات دورة كاملة : حجم الجسم الناشئ من دوران نفس المنحنى حول محور السينات دورتين كاملتين = ...

(أ) ١ : ١ (ب) ١ : ٢ (جـ) ٢ : ١ (د) ١ : ٤

(١٥) النسبة بين حجم الجسم الناشئ من دوران منحنى الدالة ص = د (س) حول محور السينات نصف دورة : حجم الجسم الناشئ من دوران نفس المنحنى حول محور السينات دورتين ونصف = ...

(أ) ١ : ١ (ب) ١ : ٢ (جـ) ٥ : ١ (د) ١ : ٥

(١٦) حجم المجسم الناشئ من دوران الدائرة التى معادلتها (س − ٥)^{٢} + ص^{٢} = ٩ دورة كاملة حول محور السينات = ... وحدة مكعبة.

(أ) ١٨ π (ب) ٢٧ π (جـ) ٣٦ π (د) ٧٢ π

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تطبيقات عملية

(١٨) إذا كان حـ = {(س ، ص) : ص = $\sqrt{س}$} ، ك$_{1}$ هي مساحة المنطقة المحدة بالمنحنى حـ ومحور السينات والمستقيم س = ٢ وكانت ك$_{2}$ هي مساحة المنطقة المحدة بالمنحنى حـ والمستقيم س = ٢ وكان ج$_{1}$ ، ج$_{2}$ هما حجما الجسمين الدورانيين الناتجين من دوران المنطقة ك$_{1}$ ، ك$_{2}$ دورة كاملة حول محور السينات على الترتيب

فإن

(أ) ك$_{1}$ = ك$_{2}$ ، ج$_{1}$ = ج$_{2}$

(ب) ك$_{1}$ = $\frac{1}{2}$ ك$_{2}$ ، ج$_{1}$ = $\frac{1}{2}$ ج$_{2}$

(جـ) ك$_{1}$ = ك$_{2}$ ، ج$_{1}$ = $\frac{1}{2}$ ج$_{2}$

(د) ك$_{1}$ = $\frac{1}{2}$ ك$_{2}$ ، ج$_{1}$ = ج$_{2}$

(١٩) في الشكل المقابل :

حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المظللة دورة كاملة حول محور الصادات = ... وحدة مكعبة.

(أ) $\frac{٤}{٣}$ π

(ب) $\frac{٨}{٣}$ π

(جـ) ٦ π

(د) $\frac{١٦}{٣}$ π

(٢٠) في الشكل المقابل :

مخروط قائم ينطبق محوره على محور السينات ورأسه هو نقطة الأصل فإن حجمه = ...

(أ) π $\int_{0}^{ع} \left(\frac{نق}{ع} س\right)^{2}$ د س

(ب) π $\int_{0}^{نق} \left(\frac{ع}{نق} ص\right)^{2}$ د ص

(جـ) π $\int_{0}^{ع} \frac{نق^{2}}{ع^{2}} س^{2}$ د س

(د) π $\int_{0}^{نق} \frac{ع^{2}}{نق^{2}} ص^{2}$ د ص

(٢١) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة حـ = $\frac{س^{2}}{س^{3}+١}$

والمستقيم س = ٢ فإن حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المظللة دورة كاملة حول محور السينات = ... وحدة مكعبة.

(أ) $\frac{١}{٢}$ π

(ب) π

(جـ) ٢ π

(د) ٩ π

(٢٢) في الشكل المقابل :

إذا كان المظللة حول محور السينات = ٢ وحدة مكعبة وحول محور الصادات = ب وحدة مكعبة فإن أي من العبارات الآتية صحيحة

(أ) ٢ = ب كما أن الجسمين الناشئين يكونان متطابقين

(ب) ٢ = ب ولكن الجسمين غير متطابقين

(جـ) ٢ < ب

(د) ٢ > ب

(٢٣) في الشكل المقابل :

إذا كان المظللة حـ ك مربع فيه حـ = (١ ، ٠) فإن حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المظللة دورة كاملة حول محور السينات = ... وحدة مكعبة.

(أ) $\frac{٢ \pi}{٨}$

(ب) $\frac{٢ \pi}{١٦}$

(جـ) $\frac{٢ \pi}{٣٢}$

(د) $\frac{٢ \pi}{٦٤}$

(٢٤) في الشكل المقابل :

إذا كان π $\int_{١}^{٢} (د(س))^{2}$ د س = ١٣٥ π

فإن حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المظللة دورة كاملة حول محور السينات = ... وحدة مكعبة.

(أ) ٣٥ π

(ب) ٢٥ π

(جـ) ٢٠ π

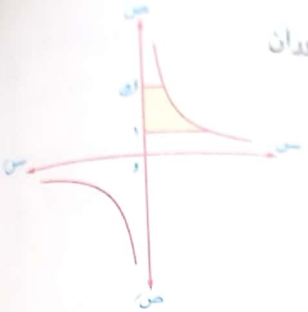
(د) ١٥ π

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٢٤) (مهارات ٢١ : ٢٣) إذا كان حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المظللة والمحددة بالمنحنى س ص = ٣ ، والمستقيمين ص = ١ ، ص = ك ، ومحور الصادات دورة كاملة حول محور الصادات يساوى ٦ π وحدة حجم ، فإن ك = ...

(أ) ٤ (ب) ٢

(جـ) ٣ (د) ١,٥

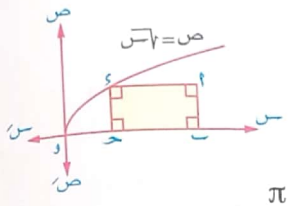


(٢٥) فى الشكل المقابل :

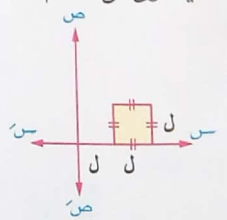
إذا كان ب = (١٢ ، ٠) أكبر حجم للجسم الناشئ من دوران المنطقة المظللة دورة كاملة حول محور السينات = ... وحدة مكعبة.

(أ) ٤٨ π (ب) ٣٦ π

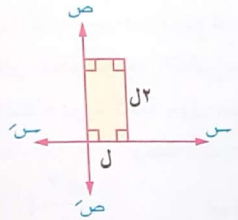
(جـ) ٢٤ π (د) ١٨ π



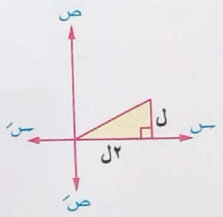
(٢٦) أى من المساحات المستوية التالية يكون فيها الجسم الناشئ من دورانها حول محور السينات يساوى فى الحجم الجسم الناشئ من دورانها حول محور الصادات ؟



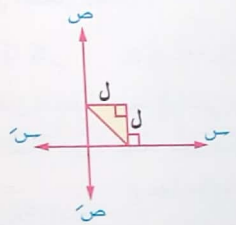
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

(٣١) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = ٢√س ومحور السينات والمماس للمنحنى عند النقطة (٢ ، ٢) الواقعة عليه عندما تدور هذه المنطقة دورة كاملة حول محور السينات.

« $\frac{٤}{٣}$ π وحدة حجم »

(٣٢) أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية المحدودة بالمستقيمات

س + ص = ٨ ، ٣ س − ٥ ص = ٠ ، ص = ٠ حول محور السينات.

« ٢٤ π وحدة حجم »

(٣٤) إذا كانت أ (٠ ، ٣) ، ب (١ ، ٤) ، حـ (٢ ، ٠) أوجد باستخدام التكامل :

(١) مساحة سطح المثلث أ ب حـ

(٢) حجم الجسم الناشئ من دوران المثلث أ و حـ دورة كاملة حول محور الصادات.

« $\frac{٥}{٢}$ وحدة مساحة ، ٤ π وحدة حجم »

(٣٥) كانت النقط أ (-٢ ، ٠) ، ب (١ ، ٥) ، حـ (٤ ، ٠) رؤوس المثلث أ ب حـ فأوجد حجم الجسم الناشئ عن دوران المثلث أ ب حـ دورة كاملة حول محور السينات.

« ٥٠ π وحدة حجوم »

(٣٦) المستقيم $\overleftrightarrow{أ ب}$ يقطع منحنى الدالة د فى النقطة حـ (س ، ص) حيث

س > ٠ ، أ (٠ ، ٢) ، ب (٦ ، ٤) ، د (س) = $\frac{٩}{س}$ ، أوجد :

(١) معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أ ب}$ (٢) إحداثيى النقطة حـ

(٣) معادلة العمودى على منحنى د عند النقطة حـ ، وأثبت أنه يمر بنقطة الأصل و

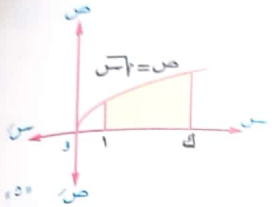
(٤) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالعمودى $\overleftrightarrow{و حـ}$ ومنحنى الدالة د والمستقيم س = ٦ دورة كاملة حول محور السينات.

« ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٢ ، (٣ ، ٣) ، س − ص = ٠ ، $\frac{٥٤}{٥}$ π وحدة حجوم »

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٣٧ إذا كان حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المظللة دورة كاملة حول محور السينات = (١٢ π) وحدة حجوم.

أوجد : قيمة ك



مسائل تقيس مهارات التفكير

٣٨ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = $\frac{١}{س - ١}$ والمستقيمين س = ٢ ، س = ٤ ومحور السينات دورة كاملة حول.

① محور السينات. ② محور الصادات.

« $\frac{٢}{٣}$ π ، ٢ π (٢ + لو$_{هـ}$ ٣) وحدة حجوم»

٣٩ أ ب حـ ء شكل رباعى رؤوسه هى :

أ (٠ ، ٠) ، ب (٧ ، ٠) ، حـ (٢ ، ٥) ، ء (٠ ، ٣) أوجد باستخدام التكامل حجم الجسم الناشئ من دوران سطح الشكل الرباعى أ ب حـ ء دورة كاملة حول محور السينات وأيضًا حجم الجسم الناتج من دوران سطح المثلث ب حـ ء دورة كاملة حول محور السينات.

« $\frac{٢٢٣}{٣}$ π ، $\frac{١٦٠}{٣}$ π وحدة حجوم»

مذكرات

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

التفاضل و التكامل
الرياضيات البحتة

يصرف مجانًا مع هذا الكتاب

- المراجعة الرسومة
- الجزء الخاص بالإجابات



CamScanner الممسوحة ضوئيا بـ



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner